国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

中外物理学精品书系

经典系列 · 14

邓稼先学术讲义 II
——量子场论

重排本

邓稼先 著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

中 外 物 理 学 精 品 书 系

经 典 系 列 · 1 4

邓稼先学术讲义 II
——量子场论

重排本

邓稼先　著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

邓稼先学术讲义. 2,量子场论:重排本/邓稼先著. —北京:北京大学出版社,2014.10

(中外物理学精品书系)

ISBN 978-7-301-24984-0

Ⅰ. ①邓… Ⅱ. ①邓… Ⅲ. ①物理学 ②量子场论 Ⅳ. ①O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 239730 号

书　　　名:邓稼先学术讲义Ⅱ——量子场论(重排本)

著作责任者:邓稼先　著

责 任 编 辑:赵晴雪　陈小红

标 准 书 号:ISBN 978-7-301-24984-0/O·1016

出 版 发 行:北京大学出版社

地　　　址:北京市海淀区成府路 205 号　100871

网　　　址:http://www.pup.cn

新 浪 微 博:@北京大学出版社

电 子 信 箱:zpup@pup.cn

电　　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752038　出版部 62754962

印　刷　者:北京中科印刷有限公司

经　销　者:新华书店

730 毫米×980 毫米　16 开本　11 印张　209 千字

2014 年 10 月第 1 版　2014 年 10 月第 1 次印刷

定　　　价:32.00 元

序　言

物理学是研究物质、能量以及它们之间相互作用的科学。她不仅是化学、生命、材料、信息、能源和环境等相关学科的基础，同时还是许多新兴学科和交叉学科的前沿。在科技发展日新月异和国际竞争日趋激烈的今天，物理学不仅囿于基础科学和技术应用研究的范畴，而且在社会发展与人类进步的历史进程中发挥着越来越关键的作用。

我们欣喜地看到，改革开放三十多年来，随着中国政治、经济、教育、文化等领域各项事业的持续稳定发展，我国物理学取得了跨越式的进步，做出了很多为世界瞩目的研究成果。今日的中国物理正在经历一个历史上少有的黄金时代。

在我国物理学科快速发展的背景下，近年来物理学相关书籍也呈现百花齐放的良好态势，在知识传承、学术交流、人才培养等方面发挥着无可替代的作用。从另一方面看，尽管国内各出版社相继推出了一些质量很高的物理教材和图书，但系统总结物理学各门类知识和发展，深入浅出地介绍其与现代科学技术之间的渊源，并针对不同层次的读者提供有价值的教材和研究参考，仍是我国科学传播与出版界面临的一个极富挑战性的课题。

为有力推动我国物理学研究、加快相关学科的建设与发展，特别是展现近年来中国物理学者的研究水平和成果，北京大学出版社在国家出版基金的支持下推出了“中外物理学精品书系”，试图对以上难题进行大胆的尝试和探索。该书系编委会集结了数十位来自内地和香港顶尖高校及科研院所的知名专家学者。他们都是目前该领域十分活跃的专家，确保了整套丛书的权威性和前瞻性。

这套书系内容丰富，涵盖面广，可读性强，其中既有对我国传统物理学发展的梳理和总结，也有对正在蓬勃发展的物理学前沿的全面展示；既引进和介绍了世界物理学研究的发展动态，也面向国际主流领域传播中国物理的优秀专著。可以说，“中外物理学精品书系”力图完整呈现近现代世界和中国物理

科学发展的全貌,是一部目前国内为数不多的兼具学术价值和阅读乐趣的经典物理丛书。

“中外物理学精品书系”另一个突出特点是,在把西方物理的精华要义“请进来”的同时,也将我国近现代物理的优秀成果“送出去”。物理学科在世界范围内的重要性不言而喻,引进和翻译世界物理的经典著作和前沿动态,可以满足当前国内物理教学和科研工作的迫切需求。另一方面,改革开放几十年来,我国的物理学研究取得了长足发展,一大批具有较高学术价值的著作相继问世。这套丛书首次将一些中国物理学者的优秀论著以英文版的形式直接推向国际相关研究的主流领域,使世界对中国物理学的过去和现状有更多的深入了解,不仅充分展示出中国物理学研究和积累的“硬实力”,也向世界主动传播我国科技文化领域不断创新的“软实力”,对全面提升中国科学、教育和文化领域的国际形象起到重要的促进作用。

值得一提的是,“中外物理学精品书系”还对中国近现代物理学科的经典著作进行了全面收录。20 世纪以来,中国物理界诞生了很多经典作品,但当时大都分散出版,如今很多代表性的作品已经淹没在浩瀚的图书海洋中,读者们对这些论著也都是“只闻其声,未见其真”。该书系的编者们在这方面下了很大工夫,对中国物理学科不同时期、不同分支的经典著作进行了系统的整理和收录。这项工作具有非常重要的学术意义和社会价值,不仅可以很好地保护和传承我国物理学的经典文献,充分发挥其应有的传世育人的作用,更能使广大物理学人和青年学子切身体会我国物理学研究的发展脉络和优良传统,真正领悟到老一辈科学家严谨求实、追求卓越、博大精深的治学之美。

温家宝总理在 2006 年中国科学技术大会上指出,“加强基础研究是提升国家创新能力、积累智力资本的重要途径,是我国跻身世界科技强国的必要条件”。中国的发展在于创新,而基础研究正是一切创新的根本和源泉。我相信,这套“中外物理学精品书系”的出版,不仅可以使所有热爱和研究物理学的人们从中获取思维的启迪、智力的挑战和阅读的乐趣,也将进一步推动其他相关基础科学更好更快地发展,为我国今后的科技创新和社会进步做出应有的贡献。

“中外物理学精品书系”编委会　主任
中国科学院院士,北京大学教授
王恩哥
2010 年 5 月于燕园

目　录

第1章　自由场的方程

在本章将讨论自旋为 $0,\frac{1}{2},1$ 及 $\frac{3}{2}$ 的自由场的方程.

在讨论场的方程之前,首先说明本书中所采用的单位制和时空度规张量.

§1　自然单位制和时空度规张量

我们用[A]表示任何量A的量纲,例如以[M]、[L]、[T]分别表示质量、长度和时间的量纲,于是光速 c 的量纲是

$$[c]=\frac{[\mathrm{L}]}{[\mathrm{T}]},$$

$\frac{1}{2\pi}\times$Planck 常数 $\hbar$ 的量纲是

$$[\hbar]=\frac{[\mathrm{M}][\mathrm{L}]^2}{[\mathrm{T}]},$$

精细结构常数 $\alpha=\frac{e^2}{\hbar c}\approx\frac{1}{137}$ 的量纲是

$$[\alpha]=1,$$

这里 e 是电荷.

在粒子物理中,习惯采用自然单位制,在这个单位制中,取

$$c=\hbar=1, \tag{1.1}$$

于是

$$[\mathrm{L}]=[\mathrm{T}], \tag{1.2}$$

$$[\mathrm{M}]=[\mathrm{L}]^{-1}, \tag{1.3}$$

$$[e^2]=[1]. \tag{1.4}$$

在自然单位制里,可以在计算中省去 c 和 $\hbar$ 的因子,只在计算的末尾再化成普通的单位制.

在本书中,三维矢量用 $\boldsymbol{x}$ 来表示,四维矢量表示为

$$x^\mu=(x^0,\boldsymbol{x})\quad(\mu=0,1,2,3). \tag{1.5}$$

其中 $x^0=t$,我们的时空度规张量是 $g_{\mu\nu}$,即

$$g=(g_{\mu\nu})=(g^{\mu\nu})=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},\quad g^{\mu}_{\nu}=\delta^{\mu}_{\nu}. \tag{1.6}$$

通过度规张量可将上角标降成下角标，或将下角标升成上角标，如

$$A_{\mu}=g_{\mu\nu}A^{\nu}. \tag{1.7}$$

在本书中，用拉丁字母角标表示 1，2，3，用希腊字母角标表示 0，1，2，3. 重复的（上下）拉丁字母角标表示从 1 到 3 求和，重复的（上下）希腊字母角标表示从 0 到 3 求和.

按照(1.6)式和(1.7)式，四维矢量 A 的分量是

$$\left.\begin{aligned}A^{\mu}&=(A^{0},\boldsymbol{A}),\\A_{\mu}&=(A^{0},-\boldsymbol{A}),\end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

两个四维矢量的标量积可写成

$$A_{\mu}B^{\mu}=g_{\mu\nu}A^{\nu}B^{\mu}. \tag{1.9}$$

用 ∂_{μ} 表示$\dfrac{\partial}{\partial x^{\mu}}$，$\partial^{\mu}$ 表示$\dfrac{\partial}{\partial x_{\mu}}$，即

$$\partial_{\mu}=\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}=\left(\frac{\partial}{\partial x^{0}},\nabla\right), \tag{1.10}$$

$$\partial^{\mu}=\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}=g^{\mu\nu}\partial_{\nu}=\left(\frac{\partial}{\partial x^{0}},-\nabla\right), \tag{1.11}$$

于是

$$\Box=\partial_{\mu}\partial^{\mu}=g_{\mu\nu}\partial^{\nu}\partial^{\mu}=\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}-\nabla^{2}. \tag{1.12}$$

时间导数也用点号表示，即 $\partial_{0}\phi=\dfrac{\partial\phi}{\partial x^{0}}=\dfrac{\partial\phi}{\partial t}=\dot{\phi}$. 在相对论中，四维矢量叫做 4 -矢量.

§ 2 Klein-Gordon 场

在相对论中，能量、动量和静质量 μ 之间的关系式是

$$P^{2}=P_{\mu}P^{\mu}=E^{2}-\boldsymbol{P}^{2}=\mu^{2}, \tag{2.1}$$

其中

$$P^{\mu}=(E,\boldsymbol{P}) \tag{2.2}$$

是动量 4 -矢量的时空分量，用熟知的量子化法则，即用算子替代 $P^{\mu}\to i\partial^{\mu}$（也就是 $E\to i\partial_{t}$ 和 $\boldsymbol{P}\to -i\nabla$）代入(2.1)式，得

$$(\Box+\mu^{2})\phi(\boldsymbol{x},t)=0, \tag{2.3}$$

这就是 Klein-Gordon 方程，$\phi(\boldsymbol{x},t)=\phi(x)$ 可理解成标量波函数，也可理解成相应于静质量为 μ 的粒子的场．我们知道，Klein-Gordon 场只能描述自旋为 0 的粒子．

方程(2.3)的平面波解的形式是

$$e^{-iEt+\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}=e^{-ik\cdot x},\tag{2.4}$$

式中 $k\cdot x=k_\mu x^\mu=Et-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}$．将平面波解代入 Klein-Gordon 方程，可得

$$E^2=\boldsymbol{k}^2+\mu^2\quad 或\quad E=\pm\omega_k=\pm(\boldsymbol{k}^2+\mu^2)^{\frac{1}{2}}\quad(\omega_k=(\boldsymbol{k}^2+\mu^2)^{\frac{1}{2}}>0).\tag{2.5}$$

于是存在正负能的解，为了构成解的完备集，取所有指数函数的集合如下：

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}e^{-i(\omega_k t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})}=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}e^{-ik\cdot x}\tag{2.6a}$$

和

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}e^{i(\omega_k t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})}=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}e^{ik\cdot x}.\tag{2.6b}$$

这里 $k\cdot x=k_\mu x^\mu=\omega_k t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}$，并把归一化因子取为$[(2\pi)^3 2\omega_k]^{\frac{1}{2}}$．

与非相对论性 Schrödinger 方程的处理方法相同，可以得到 Klein-Gordon 方程的荷-流矢量所满足的连续性方程，用 ϕ^* 乘(2.3)式，得

$$\phi^*(\Box+\mu^2)\phi=\phi^*\left((\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2)+\mu^2\right)\phi=0,$$

用 ϕ 乘(2.3)式的共轭方程，得

$$\phi(\Box+\mu^2)\phi^*=\phi\left((\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2)+\mu^2\right)\phi^*=0,$$

两式相减，得

$$\phi^*\Box\phi-\phi\Box\phi^*=\phi^*(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2)\phi-\phi(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2)\phi^*=0.\tag{2.7}$$

令概率密度 ρ 和流 $\boldsymbol{j}$ 分别为

$$\rho=i\left[\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t}-(\frac{\partial\phi^*}{\partial t})\phi\right],\tag{2.8}$$

$$\boldsymbol{j}=-i[\phi^*\nabla\phi-(\nabla\phi^*)\phi],\tag{2.9}$$

即

$$j^\mu=(\rho,\boldsymbol{j}),\ j_\mu=(\rho,-\boldsymbol{j}).\tag{2.10}$$

按照(1.10)式和(2.7)式，得

$$\begin{aligned}\partial_\mu j^\mu&=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{j}\\&=i\left[\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial t}+\phi^*\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial^2\phi^*}{\partial t^2}\right)\phi-\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right]\end{aligned}$$

$$-i[\nabla\phi^*\cdot\nabla\phi+\phi^*\nabla^2\phi-(\nabla^2\phi^*)\phi-\nabla\phi^*\cdot\nabla\phi]$$
$$=i\left[\phi^*\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\phi-\phi\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\phi^*\right]=0,$$

即

$$\partial_\mu j^\mu=\partial^\mu j_\mu=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0. \qquad (2.11)$$

从(2.8)式和(2.9)式可以看出流 $\boldsymbol{j}$ 和 Schrödinger 情形中的流在形式上完全相同，但对于 Klein-Gordon 情形，概率密度 ρ 含有对时间微分的项，这是由于 Klein-Gordon 方程含有对时间的二次微分项. 对于 Klein-Gordon 方程的平面波解来说，有 $i\frac{\partial\phi}{\partial t}=E\phi$，从而 $-i\frac{\partial\phi^*}{\partial t}=E\phi^*$，因此概率密度

$$\rho=i\left[\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t}-\left(\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\right)\phi\right]=E[\phi^*\phi+\phi^*\phi]=2E\phi^*\phi, \qquad (2.12)$$

由于 E 可以是正或负，ρ 的正负号和 E 的正负号是一样的.

历史上，负概率密度的问题以及负能量问题促使人们放弃了 Klein-Gordon 理论，但后来不久，Pauli 和 Weisskopf 将它解释为一种量子场论，认为 ρ 不是单粒子的概率密度，而是表示带正电的粒子与带负电的反粒子的集合的电荷(或者某种别的量子数)密度.

现在讨论 Klein-Gordon 方程的洛伦兹不变性，在洛伦兹变换下，有

$$x'^\mu = l^\mu_\nu x^\nu, \qquad (2.13)$$

且

$$g_{\rho\sigma} = g_{\mu\nu}l^\mu_\rho l^\nu_\sigma, \qquad (2.14)$$

即

$$x'=lx, \qquad (2.15)①$$
$$g=l^T g l. \qquad (2.16)$$

式中 l 是 4×4 阶矩阵，它的矩阵元就是 l^μ_ν，且 l^μ_ν 是实数，l^T 是 l 的转置矩阵，首先将(2.16)式两边取行列式，得

$$|g| = |l^T|\cdot|g|\cdot|l|,$$

从而

$$|l|=\pm1. \qquad (2.17)$$

$|l|=+1(-1)$ 相当于正(非正)洛伦兹变换. 例如：矩阵 l 等于矩阵 g 的洛伦兹变换就是非正洛伦兹变换；物理学上，它相当于 $x^0\to x^0$，$x^i\to -x^i$，即空间反射. 其次，在(2.14)式中，取 $\rho=\sigma=0$，得

$$1 = (l^0_0)^2 - \sum_{i=1}^{3}(l^i_0)^2,$$

① 由于“量子场论”的一些特点，本文中的矩阵和旋量不用黑体字母表示. ——作者.

从而
$$|l_0^0| \geqslant 1, \tag{2.18}$$
当 $l_0^0 \geqslant 1$ 时，洛伦兹变换称做正时的；$l_0^0 \leqslant 1$ 时，洛伦兹变换称做非正时的. 因此，洛伦兹变换可分为四种：

(1)正-正时的洛伦兹变换(也叫做狭义的洛伦兹变换)($l_+^\uparrow$)：$|l| = +1$，　$l_0^0 \geqslant 1$.

(2)正-非正时的洛伦兹变换($l_+^\downarrow$)：$|l| = +1$，　$l_0^0 \leqslant -1$.

(3)非正-正时的洛伦兹变换($l_-^\uparrow$)：$|l| = -1$，　$l_0^0 \geqslant 1$.

(4)非正-非正时的洛伦兹变换($l_-^\downarrow$)：$|l| = -1$，　$l_0^0 \leqslant -1$.

例如，时间反演的定义是 $x'^0 = -x^0, x'^i = x^i$. 于是 $|l| = -1, l_0^0 = -1$，它属于 $l_-^\downarrow$，全反射的定义是 $x'^0 = -x^0, x'^i = -x^i$，它属于 $l_+^\downarrow$，即 $|l| = +1, l_0^0 = -1$. 全反射是空间反射和时间反演之积.

上面已经讲过，Klein-Gordon 方程的 $\phi(\boldsymbol{x},t)$ 是标量波函数，即对于正-正时的洛伦兹变换 $l_+^\uparrow$，有
$$\phi'(\boldsymbol{x}',t') = \phi(\boldsymbol{x},t), \tag{2.19}$$
式中 $\phi'(\boldsymbol{x}',t')$ 表示在新的参考系中变换后的场. 但 $\phi(\boldsymbol{x},t)$ 又分为标量场和赝标量场. 对于正-正时的洛伦兹变换 $l_+^\uparrow$ 来说，标量场和赝标量场都满足(2.19)式. 对于空间反射或非正-正时的洛伦兹变换 $l_-^\uparrow$ 来说，标量场不变，仍满足(2.19)式，但赝标量场要改变一个符号，即
$$\phi'(\boldsymbol{x}',t') = -\phi(\boldsymbol{x},t). \tag{2.20}$$
上面还曾讲过，Klein-Gordon 场只能描述自旋为 0 的粒子. 从转动群和洛伦兹群的群表示论可知自旋 s 为 0,1,2,…的粒子用 $2s+1$ 个无关的分量来描述，自旋 s 为 $\frac{1}{2},\frac{3}{2}$,…的粒子用$2(2s+1)$个无关的分量来描述，所以标量场或赝标量描述自旋为 0 的粒子. 但标量场或赝标量所描述的粒子的内禀宇称是不相同的，标量场所描述的粒子的内禀宇称是正的，而赝标量所描述的粒子的内禀宇称是负的. π 介子的内禀宇称是负的，应该用赝标量场来描述. π 介子既有带电的，也有中性的. 如果粒子是带电的，电荷 ρ 不等于零，从(2.8)式可以看出带电粒子应用复数场来描述. 而中性粒子的 ρ 等于零，由(2.8)式可知实数场的 ρ 等于零，所以实数场描述中性粒子.

我们现在先暂不讨论粒子的宇称问题，因此先暂不分标量场和赝标量场，从而首先仅考虑正-正时洛伦兹变换 $l_+^\uparrow$. 在 $l_+^\uparrow$ 变换下，$\phi(\boldsymbol{x},t)$ 是标量，$\partial_\mu\phi$ 是 4 -矢量，$\partial_\mu\partial_\nu\phi$ 是张量，而 $g_{\mu\nu}\partial^\mu\partial^\nu\phi$ 是一个新标量，因此 Klein-Gordon 方程在 $l_+^\uparrow$ 变换下是保持不变的.

虽然 $g_{\mu\nu}\partial^\mu\partial^\nu\phi$ 是一个新标量，但由于 ϕ 满足 Klein-Gordon 方程，$g_{\mu\nu}\partial^\mu\partial^\nu\phi$ 和 ϕ 不是无关的. 反之，如果假设不存在与标量 ϕ 无关的标量，那么

$$a\Box\phi + b\phi = 0.$$

令 $\frac{b}{a}=\mu^2$（μ 是静质量），我们就得到自由场的 Klein-Gordon 方程.

考虑无穷小的洛伦兹变换

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, \tag{2.21}$$

δx^μ 决定于参量 $\delta\omega^p$，即

$$\delta x^\mu = f^{\ \mu}_{p}(x)\delta\omega^p, \tag{2.22}$$

其中 $f^\mu_p(x)$ 可以是 $\frac{\delta x^\mu}{\delta\omega^p}$. 不同的角标 p 表示不同的变换参量. 例如：对于时空平移

$$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu, \tag{2.23}$$

$$\delta x^\mu = \varepsilon^\mu, \quad \delta\omega^p = \varepsilon^\nu, \quad f^{\ \mu}_{p} = \delta^\mu_\nu (p = \nu), \tag{2.24}$$

对于无穷小的正洛伦兹变换 $l^\uparrow_+$

$$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^{\mu\nu}x_\nu. \tag{2.25}$$

将上式与(2.13)式相比较，并按照(1.6)式 $g^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu$，得

$$l^\mu_\lambda = g^\mu_\lambda + \varepsilon^{\mu\nu}g_{\nu\lambda} = \delta^\mu_\lambda + \varepsilon^{\mu\nu}g_{\nu\lambda}, \tag{2.26}$$

利用(2.14)式，并略去高阶无穷小项，就得

$$\begin{aligned} g_{\rho\sigma} &= g_{\mu\lambda}l^\mu_\rho l^\lambda_\sigma = g_{\mu\lambda}(\delta^\mu_\rho + \varepsilon^{\mu\nu}g_{\nu\rho})(\delta^\lambda_\sigma + \varepsilon^{\lambda\nu}g_{\nu\sigma}) = g_{\mu\lambda}\delta^\mu_\rho\delta^\lambda_\sigma + g_{\mu\lambda}\varepsilon^{\mu\nu}g_{\nu\rho}\delta^\lambda_\sigma + g_{\mu\lambda}\delta^\mu_\rho\varepsilon^{\lambda\nu}g_{\nu\sigma} \\ &= g_{\rho\sigma} + g_{\mu\sigma}\varepsilon^{\mu\nu}g_{\nu\rho} + g_{\rho\lambda}\varepsilon^{\lambda\nu}g_{\nu\sigma} = g_{\rho\sigma} + \varepsilon_{\sigma\rho} + \varepsilon_{\rho\sigma}, \end{aligned}$$

或

$$0 = \varepsilon_{\sigma\rho} + \varepsilon_{\rho\sigma},$$

亦即

$$\varepsilon_{\sigma\rho} = -\varepsilon_{\rho\sigma}, \tag{2.27}$$

于是

$$\varepsilon^{\mu\nu} = g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}\varepsilon_{\rho\sigma} = -g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}\varepsilon_{\sigma\rho} = -g^{\nu\sigma}g^{\mu\rho}\varepsilon_{\sigma\rho} = -\varepsilon^{\nu\mu}, \tag{2.28}$$

这表明 $\varepsilon^{\mu\nu}$（或 $\varepsilon_{\rho\sigma}$）是反对称张量，它具有 $\frac{4\times 3}{2}=6$ 个独立参量. 令

$$f^{\ \mu}_{\rho\sigma} = (\delta^\mu_\rho g_{\sigma\nu} - \delta^\mu_\sigma g_{\rho\nu})x^\nu, \tag{2.29}$$

于是

$$f^{\ \mu}_{\rho\sigma} = -f^{\ \mu}_{\sigma\rho}, \tag{2.30}$$

且

$$f^{\ \mu}_{\rho\sigma}\varepsilon^{\rho\sigma} = \varepsilon^{\rho\sigma}(\delta^\mu_\rho g_{\sigma\nu} - \delta^\mu_\sigma g_{\rho\nu})x^\nu = (\varepsilon^{\mu\sigma}g_{\sigma\nu} - \varepsilon^{\rho\mu}g_{\rho\nu})x^\nu = (\varepsilon^{\mu\sigma}g_{\sigma\nu} + \varepsilon^{\mu\rho}g_{\rho\nu})x^\nu = 2\varepsilon^{\mu\nu}x_\nu,$$

即

$$\varepsilon^{\mu\nu}x_\nu = \frac{1}{2}f^{\ \mu}_{\rho\sigma}\varepsilon^{\rho\sigma}. \tag{2.31}$$

代入(2.25)式,得

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu\nu}x_{\nu} = x^{\mu} + \frac{1}{2}f^{\ \mu}_{\rho\sigma}\varepsilon^{\rho\sigma}. \tag{2.32}$$

将上式与(2.21)和(2.22)式相比较,可知对于无穷小的正洛伦兹变换 $l_{+}^{\uparrow}$,有

$$\delta x^{\mu} = \varepsilon^{\mu\nu}x_{\nu},\ \delta\omega^{p} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\rho\sigma},\quad f^{\ \mu}_{p} = f^{\ \mu}_{\rho\sigma}\quad (p \to \rho\sigma). \tag{2.33}$$

在无穷小的洛伦兹变换下,由于 Klein-Gordon 场 ϕ 是标量,应用(2.19)式,得

$$\phi'(x') = \phi'(x+\delta x) = \phi(x),$$

即

$$\phi'(x-\delta x+\delta x) = \phi'(x) = \phi(x-\delta x), \tag{2.34}$$

所以

$$\delta\phi = \phi'(x) - \phi(x) = \phi(x-\delta x) - \phi(x) = -\partial_{\mu}\phi\delta x^{\mu}. \tag{2.35}$$

将(2.22)式代入,得

$$\delta\phi = -\partial_{\mu}\phi f^{\ \mu}_{p}(x)\delta\omega^{p}. \tag{2.36}$$

§3 狄拉克场

自旋等于$\frac{1}{2}$的自由粒子的狄拉克方程是

$$i\frac{\partial\Psi(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = (-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + \beta m)\Psi(\boldsymbol{x},t), \tag{3.1}$$

式中 m 是粒子的静质量. 上节曾讲过,自旋 s 等于$\frac{1}{2}$的粒子应由 $2(2s+1)=4$ 个无关的分量来描述,从而波函数 $\Psi(\boldsymbol{x},t)$ 是 4 个分量,它可以看做是 4 个分量的列矩阵,它叫做旋量,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和 β 是 4×4 阶厄米特矩阵. 为了满足相对论关系式

$$p^2 = p_{\mu}p^{\mu} = E^2 - \boldsymbol{p}^2 = m^2, \tag{3.2}$$

狄拉克方程的波函数也应相应地满足

$$-\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = (-\nabla^2 + m^2)\Psi. \tag{3.3}$$

按照(3.1)式,有

$$\begin{aligned}\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)^2_{\Psi} &= (-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + \beta m)(-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + \beta m)\Psi \\ &= -\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i}{2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^i\partial x^j} - im\sum_{i=1}^{3}(\alpha_i\beta + \beta\alpha_i)\frac{\partial\Psi}{\partial x^i} + \beta^2m^2\Psi,\end{aligned} \tag{3.4}$$

令曲括号的定义是

$$\{A,B\}=AB+BA, \tag{3.5}$$

如果

$$\{\alpha_i,\alpha_j\}=\alpha_i\alpha_j+\alpha_j\alpha_i=0 \quad (i,j=1,2,3;i\neq j), \tag{3.6a}$$

$$\{\alpha_i,\beta\}=\alpha_i\beta+\beta\alpha_i=0 \quad (i=1,2,3), \tag{3.6b}$$

$$\alpha_i^2=\beta^2=1, \tag{3.6c}$$

那么(3.4)式就变成(3.3)式,即(3.3)式就可得到满足.引入矩阵 γ^μ,则

$$\gamma^0=\beta, \tag{3.7a}$$

$$\gamma^i=\beta\alpha_i \quad (i=1,2,3), \tag{3.7b}$$

于是按照(3.4a),(3.4b),(3.4c)式,得

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2g^{\mu\nu}, \tag{3.8}$$

将狄拉克方程(3.1)式从左边乘以 $\beta=\gamma^0$,得

$$\left(i\beta\frac{\partial}{\partial t}+i\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla-\beta^2m\right)\Psi=(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\Psi=0.$$

定义

$$\gamma_\mu=g_{\mu\nu}\gamma^\nu, \tag{3.9}$$

引进 Feynman 的带斜划的符号

$$\not{a}=\gamma^\mu a_\mu=\gamma_\mu a^\mu=g_{\mu\nu}\gamma^\nu a^\mu=\gamma^0a^0-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{a}, \tag{3.10a}$$

特别是

$$\not{\partial}=\gamma^\mu\partial_\mu=\gamma^0\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla, \tag{3.10b}$$

我们可将狄拉克方程重新写成

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\Psi=(i\not{\partial}-m)\Psi=0. \tag{3.11}$$

将上式从左边乘上$(i\not{\partial}+m)$即得 Klein-Gordon 方程.

我们选择所谓狄拉克表示,在这表示中,γ 等矩阵取以下形式:

$$\gamma^0=\begin{pmatrix}I&0\\0&-I\end{pmatrix},\quad \gamma^i=\begin{pmatrix}0&\sigma_i\\-\sigma_i&0\end{pmatrix}, \tag{3.12a}$$

$$\beta=\begin{pmatrix}I&0\\0&-I\end{pmatrix},\quad \alpha_i=\begin{pmatrix}0&\sigma_i\\\sigma_i&0\end{pmatrix}, \tag{3.12b}$$

其中 I 是 2×2 阶单位矩阵,$\sigma_i(i=1,2,3)$是 2×2 阶 Pauli 矩阵,即

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\ \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}. \tag{3.12c}$$

当然,γ 等矩阵的形式不是唯一的,在不同的表示中,γ 等矩阵的形式是不同的.

历史上,建立狄拉克方程的主要原因在于得到正定的概率密度 $\rho=j^0$,对狄拉

克方程(3.11)取厄米特共轭,得

$$\Psi^{+}(i\gamma^{\mu+}\overleftarrow{\partial}_{\mu}+m)=0, \tag{3.13}$$

其中 $\Psi^{+}=(\Psi^{*})^{T}$ 是 Ψ 的厄米特共轭,它是 4 分量的行矩阵,且

$$\Psi^{+}\overleftarrow{\partial}_{\mu}=\partial_{\mu}\Psi^{+}. \tag{3.14}$$

但 $\gamma^{\mu+}\equiv(\gamma^{\mu*})^{T}$ 是 γ^{μ} 矩阵的厄米特共轭矩阵,它们很容易用 γ^{μ} 表示出来,即

$$\gamma^{0+}=\gamma^{0}=\gamma^{0}\gamma^{0}\gamma^{0},$$

$$\gamma^{i+}=(\beta\alpha_{i})^{+}=\alpha_{i}^{+}\beta^{+}=\alpha_{i}\beta=\beta(\beta\alpha_{i})\beta=\gamma^{0}\gamma^{i}\gamma^{0}\quad(i=1,2,3). \tag{3.15}$$

由上式以及(3.6b)式可以看出

$$\gamma^{0+}=\gamma^{0} \tag{3.16a}$$

是厄米特矩阵,而

$$\gamma^{i+}=\alpha_{i}\beta=-\beta\alpha_{i}=-\gamma^{i}\quad(i=1,2,3) \tag{3.16b}$$

是反厄米特矩阵.(3.15)式又可写成

$$\gamma^{\mu+}=\gamma^{0}\gamma^{\mu}\gamma^{0}, \tag{3.17}$$

引入共轭旋量

$$\overline{\Psi}=\Psi^{+}\gamma^{0}=\Psi^{+}\beta, \tag{3.18}$$

(3.13)式变成

$$\overline{\Psi}(i\gamma^{\mu}\overleftarrow{\partial}_{\mu}+m)\gamma^{0}=0$$

或

$$\overline{\Psi}(i\gamma^{\mu}\overleftarrow{\partial}_{\mu}+m)=\overline{\Psi}(i\overleftarrow{\not\partial}+m)=0. \tag{3.19}$$

将(3.11)式从左边乘上 $\overline{\Psi}$,而将(3.19)式从右边乘上 Ψ,相加后,得

$$\overline{\Psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Psi+\overline{\Psi}\gamma^{\mu}\overleftarrow{\partial}_{\mu}\Psi=\partial_{\mu}(\overline{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi)=0.$$

令概率密度 ρ 和 流 $\boldsymbol{j}$ 分别是

$$\rho=j^{0}=\overline{\Psi}\gamma^{0}\Psi=\Psi^{+}\gamma^{0}\gamma^{0}\Psi=\Psi^{+}\Psi, \tag{3.20a}$$

$$\boldsymbol{j}=\overline{\Psi}\boldsymbol{\gamma}\Psi=\Psi^{+}\beta(\beta\boldsymbol{\alpha})\Psi=\Psi^{+}\boldsymbol{\alpha}\Psi, \tag{3.20b}$$

即

$$j^{\mu}=(\rho,\boldsymbol{j})=\overline{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi, \tag{3.20c}$$

于是

$$\partial_{\mu}j^{\mu}=\partial_{\mu}(\overline{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi)=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0. \tag{3.21}$$

这就是连续性方程,从(3.20a)式可以看出概率密度 ρ 是正定的,因此狄拉克理论是给出正定的概率密度.实际上,与 Klein-Gordon 理论一样,在量子场论中,ρ 是带正负电荷的粒子的系集的荷密度,而(3.20c)式作为荷-流矢量.下面我们将看到在洛伦兹变换下,j^{μ} 是 4 -矢量.

在正-正时洛伦兹变换 $\tau_{+}^{\uparrow}$ 下,狄拉克方程必须是协变的.令 $\Psi(x)$是在变换前

的参考系中的波函数，$\Psi'(x')$是在变换后的参考系中的波函数. 为了确立狄拉克方程的协变性，$\Psi(x)$与$\Psi'(x')$须满足同样的方程，即按照(3.11)式和(2.13)式，有

$$\left(i\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}-m\right)\Psi'(x')=0 \quad (x'^{\mu}=l^{\mu}_{\nu}x^{\nu}). \tag{3.22}$$

$\Psi(x)$和$\Psi'(x')$还应有一定的关系使得在$\Psi(x)$给定的条件下，在变换后的参考系的观察者能建立起描述同一物理状态的$\Psi'(x')$. 因为狄拉克方程和坐标的洛伦兹变换两者本身都是线性的，我们可以要求$\Psi(x)$和$\Psi'(x')$之间存在着如下的线性关系

$$\Psi'(x')=D(l)\Psi(x). \tag{3.23}$$

这里$D(l)$是4×4阶非退化的矩阵，它的矩阵元是l^{μ}_{ν}的函数，按照(2.15)式，上式可写成

$$\Psi'(x')=\Psi'(lx)=D(l)\Psi(x)=D(l)\Psi(l^{-1}x'), \tag{3.24}$$

于是

$$\Psi(x)=D^{-1}(l)\Psi'(x')=D^{-1}(l)\Psi'(lx). \tag{3.25}$$

另外，我们考虑带撇的参考系经过洛伦兹变换$l^{\updownarrow}$ $(x=l^{-1}x')$变成不带撇的参考系，那么按照(3.24)式，应该得到

$$\Psi(x)=\Psi(l^{-1}x')=D(l^{-1})\Psi'(x')=D(l^{-1})\Psi'(lx). \tag{3.26}$$

将此式与(3.25)式相比较，就给出恒等关系

$$D(l^{-1})=D^{-1}(l). \tag{3.27}$$

主要问题是求$D(l)$，它必须满足(3.24)、(3.25)、(3.26)和(3.27)各式，如果求出$D(l)$，在给定$\Psi(x)$的条件下，在带撇的参考系的观察者就能够应用(3.23)式构成$\Psi'(x')$.

利用(3.25)式，将狄拉克方程(3.11)用$\Psi'(x')$重新表示出来，我们就可检验(3.22)式是否成立. 将(3.25)式代入(3.11)式，并从左边乘以$D(l)$，得

$$[iD(l)\gamma^{\mu}D^{-1}(l)\partial_{\mu}-m]\Psi'(x')=0.$$

利用(2.13)式，写出

$$\partial_{\mu}=\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}=\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}}=l^{\nu}_{\mu}\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}},$$

可求出带撇的方程是

$$\left(iD(l)\gamma^{\mu}D^{-1}(l)l^{\nu}_{\mu}\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}}-m\right)\Psi'(x')=0. \tag{3.28}$$

只要能够找到$D(l)$，它满足

$$D(l)\gamma^{\mu}D^{-1}(l)l^{\nu}_{\mu}=\gamma^{\nu}$$

或

$$l^{\nu}_{\mu}\gamma^{\mu}=D^{-1}(l)\gamma^{\nu}D(l), \tag{3.29}$$

那么(3.28)式就是(3.22)式，亦即(3.22)式成立，(3.29)式是确定$D(l)$的基本关