

2005 考研辅导教材



双博士系列

硕士研究生入学考试

历年真题解析及 双色 点评

数学四

编写

双博士考研数学课题组

支持

双博士在线

www.bbdd.cc

总策划

胡东华

礼品

买80元双博士考研书送80元

机械工业出版社
China Machine Press

硕士研究生入学考试 历年真题解析及双色点评

(数学四)

主 编 北京大学数学科学学院 田勇
编 写 双博士考研数学课题组
支 持 双博士在线 www.bbdd.cc
总策划 胡东华

机械工业出版社

声明:本书封面及封底均采用双博士品牌专用图标(见右图);
该图标已由国家商标局注册。未经本策划人同意,禁止其
他单位或个人使用。



图书在版编目(CIP)数据

硕士研究生入学考试历年真题解析及双色点评(数学四)/田勇主编. - 北京:
机械工业出版社, 2004. 4
考研辅导教材

ISBN 7-111-12078-7

I. 硕... II. 田... III. 经济数学-研究生-入学考试-自学参考资料 IV. G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 032139 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮编:100037)

责任编辑:于宁 牛涛

责任校对:胡惠鹏

封面设计:吴亦锋

责任印制:何全君

北京市高岭印刷有限公司

机械工业出版社出版发行

2004 年 4 月第 2 版 第 1 次印刷

787mm × 1092mm 1/16 印张 15.875 字数 370 千字

定价:18.00 元

©版权所有 违法必究

盗版举报电话:13801064123(著作权者)

封面无防伪标识均为盗版

(注:防伪标识揭开有用户名(十位)和密码(六位))

为了保护您的消费权益,请使用正版图书。正版双博士品牌考研图书均贴有防伪标识物(揭开后可见 10 位数字组成的 ID 和 6 位组成的 PW)。凭此 ID 和 PW 可登录双博士在线(www.bbdd.cc)中的网络课堂、全国各大学历年专业课试题库以及考前各科密押试卷。(该试卷去年版本押中大量 2004 年考研真题)。每购一本双博士图书,可点击以上非公开栏目 30 次。

<http://www.bbdd.cc> (双博士在线)

凡购买本书,如有字迹不清、缺页、倒页、脱页,由本社发行部负责调换。

<http://www.bbdd.cc>(网络课堂)

“考研押题讲座”授课计划

一、内容:考研政治、英语、数学(一、二、三、四)、西医综合科目考前押题讲座

二、讲座总策划:胡东华

三、讲座资料提供:

北大、清华、人大考研辅导班资料采编组

联合提供

京城考研命题信息搜集研究组

四、讲座时间:2004年12月1日—2005年1月7日(以网上通知为准)

五、课程表:

科 目 研	12月第1周	12月第2周	12月第3周	12月第4周	1月第1周
政 治	马克思主义哲学 政治经济学	毛泽东思想 概论	邓小平理论与 三个代表重要 思想概论	当代世界经济 与政治、 形势与政策	点题
英 语	听力	英语知识运用	阅读理解 A (命题趋势)	阅读理解 B (英译汉)	写作命题预测 及背诵范文
数 学 一	高数 (1~5)	高数 (6~11)	线性代数	概率论与 数理统计	点题
数 学 二	高数(1~3)	高数(4~6)	高数(7~11)	线性代数	点题
数 学 三	微积分 (1~5)	微积分 (6~10)	线性代数	概率论与 数理统计	点题
数 学 四	微积分 (1~5)	微积分 (6~10)	线性代数	概率论	点题
西医综合	生理学 生物化学	病理学	外科学	内科学	点题

注:本讲座需凭双博士考研图书封面上的防伪标识提供的 ID(十位数字)和 PW(六位密码)方可登录。(每购一本双博士图书,可点击双博士在线非公开栏目 30 次。)

双博士在线 www.bbdd.cc 在线咨询

您在复习备考尤其是复习专业课过程中,会经常遇到很多疑难问题,在您的具体客观条件下,这些疑难问题都不能得到及时正确的解答和引导,日久成积,直接影响了您的考试结果。基于对此的认识,双博士在线,以您为服务对象,以您的疑难问题为切入点,为您提供个性化、一对一、实质性的专业咨询。双博士在线聘用您欲报考大学的在校优秀研究生作为您的专业咨询员,他们都是该专业的顶尖高手,会学习更会考试!他们的点"金"成"金"将为您的考试赢得关键性的分数!

来自北京大学研究生会的感谢信

双博士:

您好!

首先感谢您对北京大学“十佳教师”评选活动的热情支持和无私帮助!师恩难忘,北京大学“十佳教师”评选活动是北京大学研究生会的品牌活动之一,是北京大学所有在校研究生和本科生对恩师情谊的最朴素表达。双博士作为大学教学辅导及考研领域全国最大的图书品牌之一,不忘北大莘莘学子和传道授业的老师,其行为将永久的被北大师生感怀和铭记。

作为考研漫漫征途上的过来人,双博士曾陪伴我们度过无数个考研岁月的日日夜夜,曾带给我们无数个明示和启发,当然也带给我们今天的成功。

特致此信,向双博士表达我们内心长久以来的感激之情,并祝愿双博士事业蒸蒸日上。

北京大学研究生会

二零零二年十二月

安徽某大学学生的来信

双博士:

您好!

我是一名在校大学生,从去年来到学校时,我就认定了双博士图书,我认为它非常实用。我很喜欢。所以今年我一来就又一次购买了双博士图书,还推荐给我们班许多同学了。他们都感觉双博士不错。

现在,我们班同学均报了英语四级,我上了 www.bbdd.cc 网看了一下,我觉得非常适合我们的备考。在此我非常感谢你们,希望你们工作顺利!

买了双博士图书,还可以获得赠品,我觉得这是一个非常好的事……,我的地址是:安徽省安庆师范学院东一区×数学×班,我的名字是:谢××。邮编 246003。谢谢!

谢××

2003年10月28日

前言

任何事物的发展都具有规律性,考研命题也不例外。通过对历年考研试题的科学分析,我们可以发现,知识点的考察总是具有稳定性、普遍性和反复出现的共性。近几年的数学试题都可以在往届的考卷中觅到踪影,有些题目甚至完全雷同。因此,任何模拟题的练习效果,都不如演练真题,真题具有无可比拟的权威性和实战性。

本着“想考生所想,急考生所急”的宗旨,双博士考研数学课题组精心打造了这本《硕士研究生入学考试真题解析及双色点评(数学四)》,本书的特点如下:

1. 考点及思路:每道题目均有名师点拨命题考点,归纳解题思路。
2. 双色点评:每个考题均注有点评,或详细分析了此类题型的解题方法,或指出了考生易犯的错误,或评价了题目的难易程度,或点出考题的出处,点评透彻准确。
3. 考点分类汇编:在本书的第二部分,我们将历年考点的分布按章节统计成表格,依此总结了命题规律并对发展趋势作出了科学预测。
4. 解题技巧总结:紧跟第二部分中的各章考点汇编,我们结合历年考题将解题技巧进行了进一步总结,相信定会使读者达到“一览众山小”的境界。

考生在使用本书过程中遇到问题可登录双博士在线 www.bbdd.cc/本站论坛/我爱双博士下面留言提问。在准备考研公共课和专业课中遇到的问题,也可登录双博士在线 www.bbdd.cc 在线咨询。

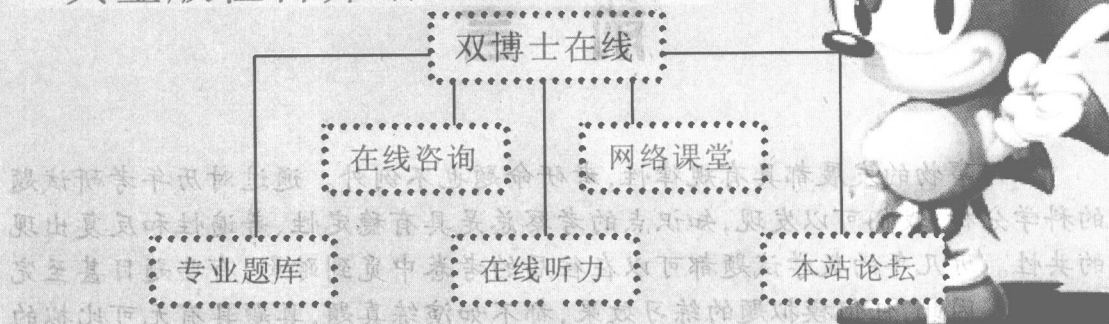
双博士在线在考前提供密押试卷(政治、英语、西医),本试卷去年版直接命中2004考研真题。获取本试卷的具体方法为:揭开封面上的防伪标识,获得10位数字ID和6位PW方可登录。每购一本双博士图书,可点击双博士在线非公开栏目30次。

与本系列配套的双博士系列用书《2005 考研数学应试题典》(理工、经济)2004年4月出版,《2005 考研数学公式掌中宝》(理工、经济)2004年4月出版,《2005 考研最后冲刺》(理工、经济)2004年9月出版。

双博士短信课堂:订阅双博士短信课堂,每日两条考试信息,快乐备考,轻松过级。考研直通车栏目包括:高频词汇、低频词汇、词汇速记巧记、黄金短语、经典句型;政治考点精华背诵、时事直通车、特快消息。

双博士在线 (www.bbdd.cc)

黄金版栏目介绍



双博士在线 (www.bbdd.cc) 专业提供考研和四六级考试资源网站, 日访问量超过 10000 次。

- 在线咨询:

提供考研专业课和公共课个性化一对一实质性的专业咨询服务。双博士在线聘用你欲报考学校的在校优秀研究生作为您的专业咨询员, 为你提供专家级的解答和服务。咨询电话: 010 82608053

- 网络课堂:

随时随地, 省时省钱, 灵活有效享受面授无法比拟的教育资源服务。

- 专业题库:

包括全国各高校和科研单位历年考研专业课试题。

- 在线听力:

包括真题及 20 套模拟试题, 本栏目是同类网站中音频文件最为密集的栏目, 练就此栏目的音频文件听力过关不用愁。

- 在线测试:

考研政治、英语、数学、西医、中医和 MBA 5 门科目真题和模拟。

- 短信课堂:

订阅双博士短信课堂, 每日两条考试信息, 快乐备考, 轻松过级。时尚英语、经典句子, 休闲、时尚、实用一个都不能少。

- 英语聊天室:

适应教育部英语听说能力训练改为机考进行的趋势; 适合考研听力和复试口语测试的需要; 24 小时可随时找到合适自己的练习伙伴。聊天就能过级!

注: 购书登录双博士在线

每购一本双博士品牌图书, 可凭双博士考研图书封面上的防伪标识提供的 ID (十位数字) 和 PW (六位密码) 登录 30 次双博士网站的非公共资源栏目。如欲继续享受本服务, 请咨询 010 82608053

目 录

第一部分 真题实战演练及双色点评

2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学(四)试题	(2)
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学(四)试题	(19)
2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学(四)试题	(33)
2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学(四)试题	(48)
2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学(四)试题	(60)
1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学(四)试题	(74)
1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学(四)试题	(89)
1997 年全国硕士研究生入学统一考试数学(四)试题	(102)
1996 年全国硕士研究生入学统一考试数学(四)试题	(114)
1995 年全国硕士研究生入学统一考试数学(四)试题	(127)
1994 年全国硕士研究生入学统一考试数学(四)试题	(140)
1993 年全国硕士研究生入学统一考试数学(四)试题	(153)
1992 年全国硕士研究生入学统一考试数学(四)试题	(165)
1991 年全国硕士研究生入学统一考试数学(四)试题	(177)
1990 年全国硕士研究生入学统一考试数学(四)试题	(189)
1989 年全国硕士研究生入学统一考试数学(四)试题	(202)
1988 年全国硕士研究生入学统一考试数学(四)试题	(214)

第二部分 考点分类汇编及技巧总结

第一篇 微积分	(226)
第一章 函数 极限 连续	(226)
第二章 一元函数微分学	(227)
第三章 一元函数积分学	(229)
第四章 多元函数微积分学	(231)
第五章 常微分方程	(233)

第二篇 线性代数	(235)
第一章 行列式	(235)
第二章 矩阵	(236)
第三章 向量	(238)
第四章 线性方程组	(239)
第五章 特征值与特征向量	(240)

第三篇 概率论与数理统计	(242)
第一章 随机事件和概率	(242)
第二章 随机变量及其分布	(243)
第三章 多维随机变量及其分布	(244)
第四章 随机变量的数字特征	(245)
第五章 大数定律和中心极限定理	(246)



第一部分

真题实战演练 及双色点评





2004 年全国硕士研究生入学统一考试 数学(四) 试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分,把答案填在题中横线上。)

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - a} (\cos x - b) = 5$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) 设 $y = \arctan e^x - \ln \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}}$, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = \underline{\hspace{2cm}}$

(3) 设 $f(x) = \begin{cases} xe^{x^2}, & -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}, \\ -1, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$, 则 $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x-1) dx = \underline{\hspace{2cm}}$

(4) 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = P^{-1}AP$, 其中 P 为三阶可逆矩阵, 则 $B^{2004} - 2A^2 = \underline{\hspace{2cm}}$

(5) 设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ 是实正交矩阵, 且 $a_{11} = 1, b = (1, 0, 0)^T$, 则线性方程组 $Ax = b$ 的解是

(6) 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布, 则 $P\{X > \sqrt{DX}\} = \underline{\hspace{2cm}}$

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分,在每小题给出的四个选项中,只有一个是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内)。

(7) 函数 $f(x) = \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界

(A) $(-1, 0)$ (B) $(0, 1)$ (C) $(1, 2)$ (D) $(2, 3)$ 【 】

(8) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$,

$$g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

(A) $x = 0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点。

(B) $x = 0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点。

(C) $x = 0$ 必是 $g(x)$ 的连续点。

(D) $g(x)$ 在点 $x = 0$ 处的连续性与 a 的取值有关。 【 】

(9) 设 $f(x) = |x(1-x)|$, 则

(A) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0, 0)$ 不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点。

(B) $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0, 0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点。

(C) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 且 $(0, 0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点。

(D) $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, $(0, 0)$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点。 【 】



$$(10) \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases} F(x) = \int_0^x f(t) dt, \text{ 则}$$

(A) $F(x)$ 在 $x = 0$ 点不连续。

(B) $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 在 $x = 0$ 点不可导。

(C) $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 且满足 $F'(x) = f(x)$ 。

(D) $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 但不一定满足 $F'(x) = f(x)$ 。 []

(11) 设 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f'(a) > 0, f'(b) < 0$, 则下列结论中错误的是

(A) 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f(x_0) > f(a)$ 。

(B) 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f(x_0) > f(b)$ 。

(C) 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f'(x_0) = 0$ 。

(D) 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f(x_0) = 0$ 。 []

(12) 设 n 阶矩阵 A 与 B 等价, 则必有

(A) 当 $|A| = a (a \neq 0)$ 时, $|B| = a$ 。

(B) 当 $|A| = a (a \neq 0)$ 时, $|B| = -a$ 。

(C) 当 $|A| \neq 0$ 时, $|B| = 0$ 。

(D) 当 $|A| = 0$ 时, $|B| = 0$ 。 []

(13) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0, 1)$, 对给定的 $a \in (0, 1)$, 数 u_a 满足 $P\{X > u_a\} = a$, 若 $P\{|X| < x\} = a$, 则 x 等于

(A) $u_{\frac{a}{2}}$

(B) $u_{1-\frac{a}{2}}$

(C) $u_{1-\frac{a}{2}}$

(D) u_{1-a} []

(14) 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 1)$ 独立同分布, 且其方差为 $\sigma^2 > 0$. 令随机变量 $Y =$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \text{ 则}$$

$$(A) D(X_1 + Y) = \frac{n+2}{n} \sigma^2$$

$$(B) D(X_1 - Y) = \frac{n+1}{n} \sigma^2$$

$$(C) \text{Cov}(X_1, Y) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$(D) \text{Cov}(X_1, Y) = \sigma^2$$
 []

三、(本题满分 8 分)

$$\text{求 } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2} \right)$$

四、(本题满分 8 分)

求 $\iint_D (\sqrt{x^2 + y^2} + y) d\sigma$, 其中 D 是由圆 $x^2 + y^2 = 4$ 和 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ 所围成的平面区域。

五、(本题满分 8 分)

设 $f(u, v)$ 具有连续偏导数, 且满足

$$f'_u(u, v) + f'_v(u, v) = uv.$$

求 $y(x) = e^{-2x} f(x, x)$ 所满足的一阶微分方程, 并求其通解。

六、(本题满分 9 分)

设某商品的需求函数为 $Q = 100 - 5P$, 其中价格 $P \in (0, 20)$, Q 为需求量。

(I) 求需求量对价格的弹性 $E_d (E_d > 0)$;



(II) 推导 $\frac{dR}{dP} = Q(1 - E_d)$ (其中 R 为收益), 并用弹性 E_d 说明价格在何范围内变化时, 降低价格反而使收益增加。

七、(本题满分 9 分)

设 $F(x) = \begin{cases} e^{2x}, & x \leq 0, \\ e^{-2x}, & x > 0, \end{cases}$ S 表示夹在 x 轴与曲线 $y = F(x)$ 之间的面积, 对任何 $t > 0$, $S_1(t)$

表示矩形 $-t \leq x \leq t, 0 \leq y \leq F(t)$ 的面积, 求

(I) $S(t) = S - S_1(t)$ 的表达式;

(II) $S(t)$ 的最小值。

八、(本题满分 13 分)

设线性方程组 $\begin{cases} x_1 + \lambda x_2 + \mu x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + (2 + \lambda)x_2 + (4 + \mu)x_3 + 4x_4 = 1. \end{cases}$

已知 $(1, -1, 1, -1)^T$ 是该方程组的一个解, 试求

(I) 方程组的全部解, 并用对应的齐次线性方程组的基础解系表示全部解;

(II) 该方程组满足 $x_2 = x_3$ 的全部解。

九、(本题满分 13 分)

设三阶实对称矩阵 A 的秩为 2, $\lambda_1 = \lambda_2 = 6$ 是 A 的二重特征值。若 $a_1 = (1, 1, 0)^T$, $a_2 = (2, 1, 1)^T$, $a_3 = (-1, 2, -3)^T$ 都是 A 的属于特征值 6 的特征向量。

(I) 求 A 的另一特征值和对应的特征向量;

(II) 求矩阵 A 。

十、(本题满分 13 分)

设 A, B 为两个随机事件, 且 $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B|A) = \frac{1}{3}$, $P(A|B) = \frac{1}{2}$, 令

$$X = \begin{cases} 1, A \text{ 发生}, \\ 0, A \text{ 不发生}, \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 1, B \text{ 发生}, \\ 0, B \text{ 不发生}, \end{cases}$$

求:

(I) 二维随机变量 (X, Y) 的概率分布;

(II) X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY} ;

(III) $Z = X^2 + Y^2$ 的概率分布。

十一、(本题满分 13 分)

设随机变量 X 在区间 $(0, 1)$ 上服从均匀分布, 在 $X = x (0 < x < 1)$ 的条件下, 随机变量 Y 在区间 $(0, x)$ 上服从均匀分布, 求:

(I) 随机变量 X 和 Y 的联合概率密度;

(II) Y 的概率密度;

(III) 概率 $P\{X + Y > 1\}$ 。



2004 年全国硕士研究生入学统一考试 数学(四) 答案及双色点评

一、填空题

1. 1, -4

考点: 极限的运算。

思路: 利用极限的运算和无穷的概念来计算。

【解析】 $\because \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - a} (\cos x - b)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - a} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - b)$$

$$= (1 - b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - a} \quad \text{可知 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - a} \text{ 为一常数}$$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \rightarrow 0$, 所以 $e^x - a \rightarrow 0$

$$\therefore a = 1$$

$$\therefore (1 - b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - a}$$

$$= (1 - b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - 1}$$

$$= (1 - b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$= 1 - b$$

$$= 5$$

$$\therefore b = -4$$

点评: 解此题过程中, 要注意逐步化简并结合分析, 找出隐含条件, 例如 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - a}$ 为一常数, 然

后分离出来进一步分析得出 a 的值, 再利用 a 值得出 b , 此类题型的关键是逐步分析找出隐含的条件! 近几年考研题中已出现过几次相关题型(2002 数一、三) 应该引起大家的注意。

$$2. \frac{e-1}{e^2+1}$$

考点: 某点的导数值的计算。

思路: 利用复合函数的求导方法。

【解析】 $y = \arctan e^x - \frac{1}{2} \ln e^{2x} + \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1)$

$$= \arctan e^x - x + \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{1+e^{2x}} - 1 + \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$$



$$\therefore \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = \frac{e-1}{1+e^2}$$

点评:本题属于求导问题中比较复杂的一种类型。题中需要考生注意的是求导前先进行必要的化简,要注意的就是化简过程中一些细节性的问题,这种类型的题是得分性题目,不能眼高手低。

$$3. -\frac{1}{2}$$

考点:定积分的计算。

思路:运用定积分的性质简化计算。

【解析】 $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x-1) dx$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{t=x-1} \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) dt \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) dt \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} xe^{x^2} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 -1 dt \\ &= 0 + (-x) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 \quad (\text{对称区间上积分的性质}). \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

点评:通过此题,我们应该注意利用奇函数在对称区间上积分为零的性质可大大简化计算,如果我们不运用这一结论题中的原积分计算起来就会非常麻烦,所以考生要掌握好这一结论,并能灵活运用,以便于在相应的积分计算中利用它迅速、简单地计算出积分结果。

$$4. \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

考点:矩阵的运算。

思路:利用连乘的性质。

【解析】 B^{2004}

$$\begin{aligned} &= P^{-1}AP \cdot P^{-1}AP \cdots P^{-1}AP \cdot P^{-1}AP \\ &= P^{-1}A^{2004}P \end{aligned}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \dots, A^{2004} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore B^{2004} = 2A^2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

点评:本题考查的是矩阵的运算题中,在计算的过程里采用了一种带有技巧性的运算方法就是用了连乘的性质,这样就使原本比较复杂的矩阵运算变得简单了。



5. $(1, 0, 0)^T$

考点: 正交矩阵及线性方程组

思路: 利用矩阵正交的性质。

【解析】设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$\because A$ 实正交

$\therefore AA^T = E$, 又 $\because a_{11} = 1$

$\therefore$ 易求得: $a_{12} = 0, a_{13} = 0, a_{21} = a_{31} = 0, a_{22} = a_{23} = 1$

$a_{23} = a_{32} = 0$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ 解为 $(1, 0, 0)^T$

点评: 本题要求考生要深刻理解正交矩阵的概念以及熟练掌握正交矩阵的性质, 以便于可以灵活地利用它们来解题。

6. $\frac{1}{e}$

考点: 指数分布以及分布函数的计算。

思路: 利用计算概率分布的公式。

【解析】 $P\{x > \sqrt{DX}\}$

$$= 1 - P\{x \leq \frac{1}{\lambda}\} \quad (X \text{ 服从参数为 } \lambda \text{ 的指数分布})$$

$$= 1 - \int_0^{\frac{1}{\lambda}} \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= 1 - (-e^{-\lambda x}) \Big|_0^{\frac{1}{\lambda}}$$

$$= \frac{1}{e}$$

点评: 对于几种常见的概率分布考生应牢记其相应的数字特征, 绝对不能记错。

二、选择题

7. A

考点: 初等函数有界性。

思路: 判断函数 $f(x)$ 在区间内有界, 对于初等函数也就是在端点处的有界性。

【解析】判断函数 $f(x)$ 在区间内有界, 对于初等函数也就是在端点处的有界性。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} \\ &= \frac{1}{4} \sin 2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$$



$$= \frac{1}{4} \sin 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-2)^2} \cdot \frac{1}{x-1} = \infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x|}{x(x-1)} \cdot \frac{\sin(x-2)}{x-2} \cdot \frac{1}{x-2} \\ &= \infty \end{aligned}$$

$\therefore$ 区间 $(0,1), (1,2), (2,3)$ 无界

$\therefore$ 选(A)。

点评: 本题要求考生掌握初等函数相关的基本性态和概念, 由初等函数具有连续性, 因此, 端点处是否有界性即决定了函数的有界无界性。

8. D

考点: 间断点的类型及极限的计算。

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$

$\therefore$ 当 $a = 0$ 时 $g(x)$ 在 $x = 0$ 连续。

当 $a \neq 0$ 时 $x = 0$ 为 $g(x)$ 的第一类间断点, 故选(D)。

点评: 本题首先是搞清楚间断点的类型, 然后就是区分清楚 $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ 与 $f(x)$ 就可以得出结论了。

9. C

考点: 极值点、拐点。

思路: 利用分段函数的图形。

【解析】 去掉绝对值得:

$$f(x) = \begin{cases} -x(1-x) & x \leq 0 \\ x(1-x) & 0 < x < 1 \\ x(x-1) & x \geq 1 \end{cases}$$

如右图, 易知 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点。

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-1 & x < 0 \\ 1-2x & 0 < x < 1 \\ 2x-1 & x > 1 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & x < 0 \\ -2 & 0 < x < 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases}$$

当 $x < 0$ 时 $f''(x) > 0$ 当 $x > 0$ 时 $f''(x) < 0$ 。

$\therefore (0,0)$ 为拐点。

故选 C。

