本书出版受华夏英才基金支持

经济和金融数学模型的理论与实践

韩 东 胡锡健 著

上海交通大学出版社

本书出版受华夏英才基金支持

经济和金融数学模型的理论与实践

韩　东　胡锡健　著

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书介绍了近年来在经济与金融数学模型方面的一些研究成果。内容主要包括列昂惕夫投入产出模型、华氏投入产出模型、随机投入产出模型、经营管理决策模型、马尔可夫链组合预测模型、证券投资分析、期权定价与价差等。本书以作者的研究工作为主线，同时也介绍了有关国内外同行的一些研究成果。

本书可供数理经济学、金融学、管理科学、系统工程、统计学、应用数学等专业的大学生和研究生阅读，也可作为上述专业的教师和研究人员的参考书。一般的经济、金融管理工作者也可从中发现许多有趣的结论和实用的方法。

图书在版编目(CIP)数据

经济和金融数学模型的理论与实践/韩东、胡锡键著. —上海：上海交通大学出版社，2003

ISBN7-313-03121-1

Ⅰ. 经… Ⅱ. ①韩… ②胡… Ⅲ. 经济数学-数学模型 Ⅳ. F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第056855号

经济和金融数学模型的理论与实践

韩 东 胡锡健 著

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路877号 邮政编码200030)

电话：64071208 出版人：张天蔚

上海交通大学印刷厂印刷 全国新华书店经销

开本：787mm×1092mm 1/16 印张：11.25 字数：274千字

2003年1月第1版 2003年1月第1次印刷

印数：1-1550

ISBN7-313-03121-1/F·439 定价：17.00元

前　言

随着我国经济建设的迅猛发展，在经济和金融管理工作中人们越来越重视经济分析和预测的数量化、管理和决策的科学化。这使得各种各样的数学理论模型和方法广泛地应用于经济学、金融学和管理科学的各个领域。但是，什么样的数学模型和方法在什么条件下、什么范围内才适用于经济分析和预测？如何依据经济理论和统计数据，研究和改进已有的经济数学模型或建立新的、更符合实际的数学模型？这些都是摆在我们面前亟待解决的理论和实际问题。

正是基于此，我们从 1992 年初开始，对若干个经济与金融数学模型进行了研究。本书大部分内容就是我们这些年来研究工作的一个总结。

本书分上、下篇共 12 章。上篇共有 9 章。第 1 章论述了列昂惕夫变系数动态投入产出模型的几个极限定理，包括经济系统失控定理、价格相对平衡增长定理和资金积累的大道定理。第 2 章围绕着华罗庚先生所提出的一种经济数学模型——华氏投入产出模型，讨论了华氏非齐次投入产出模型和适应市场需求的华氏投入产出模型的极限性质。第 3 章介绍了随机投入产出模型（投入系数和消费系数为随机变量）。第 4 章论述了广告费用最优控制的随机模型、最佳经营管理模型和供应链库存优化管理模型。第 5 章介绍了报酬规则的选择模型。第 6 章概述了宏观经济和金融危机的预警系统。第 7 章介绍了马尔可夫链组合预测模型，并以此模型分析和预测股市价格的波动。第 8 章和第 9 章分别讨论了证券投资风险、投资策略和收益以及期权定价公式的推导与期权垂直价差等问题。

下篇共有 3 章，主要介绍模型的应用。第 10 章利用投入产出模型对新疆经济发展与产业结构变动因素以及乌鲁木齐市产业结构的协调性进行了分析。第 11 章介绍了监测预警系统在新疆及乌鲁木齐市经济运行状况分析中的应用。最后一章利用马尔可夫链组合预测模型对 2002 年中国股市进行了分析预测，并对股价波动的政策因素进行了分析，最后还对 Markowitz 投资组合模型进行了实证分析。

在金融学已成为经济学核心的今天，将金融学中所使用或产生出的数学模型称之为金融数学模型这是理所当然的。因此，本书的第 7、8、9 章所论述的模型可归属于金融数学模型。

本书的多数章节仅假定读者具有一元微积分、线性代数和概率统计的知识。可供数理经济学、金融学、管理科学、系统工程、统计学、应用数学等专业的大学生和研究生阅读，也可供上述专业的教师、研究人员参考。一般的经济、金融管理工作者也可从中发现一些有趣的结论和实用的方法。

借此机会，衷心地感谢北京师范大学严士健教授和陈木法教授多年来的辛勤培养和帮助；感谢上海交通大学叶中行教授，中国科学院应用数学所程侃研究员，北京理工大学叶其孝教授和西安电子科技大学赵玮教授的许多宝贵的帮助；感谢北京师范大学刘秀芳教授、李勇教授、王风雨教授、清华大学陈冬青博士，香港科技大学宗季福博士的帮助；感谢新疆大学鲍敦全教授、张华孝教授、郭晓峰教授，新疆农业大学张正中教授，新疆财经学院胡毅教授、王公达教授以及海通证券有限公司朱维宝高级工程师，宏源信托投资股份有限公司证券业务总部陈亮副

总经理、新疆统计局王跃经济师的大力支持；这里还要向我们的许多同事、朋友和学生表示深深的谢意，正是由于他们的贡献才使本书的内容变得较为丰富。

本书的出版，得到了华夏英才基金会的资助，在此深表谢意。

最后，对无私支持我们研究工作的崔国珍、焦淑慧表示最衷心的感谢，没有她们的理解，本书是不可能完成的。

韩　东　胡锡健

2002年3月15日

目　　录

上篇　理论和模型

下篇 应用(实证分析)

上篇　理论与模型

1 列昂惕夫(Leontief)投入产出模型

1.1 引言

自 20 世纪 30 年代列昂惕夫(Leontief)首次提出投入产出模型以来，经过 70 多年的发展，它无论是在理论研究上还是在实际应用中都取得了丰硕的成果。尤其是最近 10 多年，我国学者(甚至包括一些知名数学家)对投入产出模型进行了广泛深入的理论研究，提出了许多更符合实际的投入产出模型。

尽管投入产出模型已成为许多国家进行宏观经济分析与预测的重要手段，但由于列昂惕夫所提出的投入产出模型是建立在同质性、线性比例性和投入系数不变的假设基础上的，因而，在利用投入产出模型分析和预测经济系统运行状况时，常常与实际情况不符，尤其是对经济系统进行中、长期分析预测时，情况更是如此。正因为此，近 20 年来，国内外关于投入产出模型的理论研究主要是围绕着如何清除或削弱这三个假设，建立更符合经济系统实际的投入产出模型。

本章着重论述列昂惕夫变系数(投入系数和资本系数在不同的周期有不同的值)动态投入产出模型的几个极限定理，包括经济系统失控定理、价格相对平衡增长定理和资金积累的大道定理。

1.2 经济系统失控的极限定理[26]

1.2.1 模型和主要结论

本节所讨论的列昂惕夫变系数动态投入产出模型如下：

$$\boldsymbol{X}_n = \boldsymbol{A}_n\boldsymbol{X}_n + \boldsymbol{B}_{n+1}(\boldsymbol{X}_{n+1} - \boldsymbol{X}_n) + \boldsymbol{Y}_n, \tag{1-1}$$

其中，$\boldsymbol{X}_n$ 为 m 维列向量，其各分量表示第 n 年各生产部门的产品总量；m 维列向量 $\boldsymbol{Y}_n$ 的各分量表示第 n 年各部门的最终产品量；$m\times m$ 非负矩阵 $\boldsymbol{A}_n$ 和 $\boldsymbol{B}_n$ 分别表示第 n 年的投入(或消耗)系数矩阵和资本系数矩阵。

定义 1.1 如果一个由模型(1-1)所描述的经济系统，在第 n 年至少有一个生产部门其产品总量为负值，则称此经济系统在第 n 年失控，也即，$\boldsymbol{X}_n$ 至少有一个分量为负值。

下面陈述本节的主要结论。

定理 1.1 设(1-1)中的 $\boldsymbol{Y}_n = \boldsymbol{C}_n\boldsymbol{X}_n$，并设 $\boldsymbol{A}_n$，$\boldsymbol{C}_n$ 和 $\boldsymbol{B}_{n+1}$ 满足：

(ⅰ) 矩阵 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_n-\boldsymbol{C}_n+\boldsymbol{B}_{n+1}$ 可逆且 $\boldsymbol{G}_n \triangleq [\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_n-\boldsymbol{C}_n+\boldsymbol{B}_{n+1}]^{-1}\boldsymbol{B}_{n+1}$ 是非负不可约的可逆矩阵；

(ⅱ) 存在一个非负不可约且其循环指数为 r 的矩阵 $\boldsymbol{G}$ 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\frac{G_n}{\rho(G_n)}-\frac{G}{\rho(G)}\right\|<\infty, \tag{1-2}$$

其中，I 为 $m\times m$ 单位矩阵，G_n 为 $m\times m$ 矩阵，$\rho(G_n)$ 和 $\rho(G)$ 分别表示 G_n 和 G 的谱半径，$\|(a_{ij})_{m\times m}\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\sum\limits_{j=1}^{m}|a_{ij}|$，那么，存在一个 r 维非负向量子空间 $\boldsymbol{\Omega}_r$，使得当 $X_0\notin\boldsymbol{\Omega}_r$ 时，存在一个自然数 n_0，使得当 $n\geqslant n_0$ 时，X_n 至少有一个分量为负值，这里 X_0 表示初始年份各生产部门的总产量所构成的列向量。

推论 1.1 如果 $C_n=0, A_n=A, B_n=B$ 且 $r=1$，并设 U 为 G 的最大特征根 $\rho(G)$ 所对应的右特征向量（显然是正向量），则当 $X_0=U$ 时，$X_n=(\rho(G))^{-n}U, n\geqslant 0$；当 $X_0\neq U$（除常数因子外）时，则存在某个自然数 n_0，使得当 $n\geqslant n_0$，X_n 至少有一个分量为负值。

由推论 1.1 知，如果每年的最终需求为零或最终产品都用于生产，则当初始年份的各部门和（投入）产量向量 X_0 与 U 相同时（可以差常数因子），此经济系统永不会失控且每年各部门的产量的增长因子为 $1/\rho(G)$；当 X_0 与 U 不同比例时，此经济系统经过若干年必定失控。

定理 1.2 设 $Y_n=(I+C)^nY, A_n=A, B_n=B$ 且 X_n 是模型(1-1)的解，其中 C 为 $m\times m$ 非负矩阵，$\rho(A)<1$ 且非负矩阵 B 没有零行和零列。如果 $D=\sum\limits_{k=0}^{\infty}[B(I-A)^{-1}]^kC^k$ 是一个收敛的矩阵序列，则我们有如下结论：

（ⅰ）如果 $X_0=aU+(I-A)^{-1}DY$，则模型(1-1)有非负的平衡增长解

$$X_n=a\left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^nU+(I-A)^{-1}D(I+C)^nY, \tag{1-3}$$

其中，$a\geqslant 0$ 是一个常数，λ 是 $(I-A)^{-1}B$ 的最大正的特征根，而 U 是对应于 λ 的非负特征向量。

（ⅱ）如果 $(I-A+B)$ 可逆且 $(I-A+B)^{-1}B$ 是一个循环指数为 r 的非负不可约矩阵，则存在一个 r 维非负向量子空间 $\boldsymbol{\Omega}_r$ 使得当 $X_0-(I-A)^{-1}DY\notin\boldsymbol{\Omega}_r$ 时，存在自然数 n_0，当 $n\geqslant n_0$ 时 $X_n-(I-A)^{-1}D(I+C)^nY$ 至少有一个分量为负值。

例 1.1 设 $A_n=(1-a_n)A_0+a_nA, B_n=(1-b_n)B_0+b_nB$，其中 $a_0=0, b_0=0, 0\leqslant a_n, b_n\leqslant 1$，$A_0, B_0$ 分别是初期的投入（消耗）系数和资本系数矩阵，而 A, B 分别是某种新技术完全推广后所对应的投入系数和资本系数矩阵。如果设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-a_n)<+\infty$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-b_n)<+\infty$，并设 $(I-A+B)^{-1}B$ 是一循环指数为 r 的非负不可约矩阵，$(I-A_n+B_{n+1})^{-1}B_{n+1}$ 是非负矩阵，则可验证定理 1.1 的条件满足（此时，需令 $C_n=0$）。

1.2.2 定理的证明

为证明定理，我们先给出几个引理，引理的证明可参考本书的 2.2 节。

引理 1.1 设 G 为循环指数为 r 的 $m\times m$ 非负不可约矩阵，其谱半径为 $\rho(G)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{G}{\rho(G)}\right)^{rn}=Q\Lambda H\Lambda^{-1}Q^{-1},$$

并且存在常数 $M\geqslant 1$，使得对所有 $n\geqslant 1$，有

$$\left\|\left(\frac{G}{\rho(G)}\right)^{rn}\right\|\leqslant M,$$

其中，Q 是一个 $m\times m$ 置换矩阵，

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Lambda}_1 & & & 0\\ & \boldsymbol{\Lambda}_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boldsymbol{\Lambda}_r\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_k=\mathrm{diag}(\lambda_{k1},\lambda_{k2},\cdots,\lambda_{ks}),\lambda_{kj}>0,1\leqslant k\leqslant r,rs=m,$$

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{1}_s & & & 0\\ & \boldsymbol{H}_2\boldsymbol{1}_s & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boldsymbol{H}_r\boldsymbol{1}_s\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{H}_k=(h_{k1},\cdots,h_{ks})^{\mathrm{T}},1\leqslant k\leqslant r,\sum_{j=1}^{s}h_{kj}>0;\boldsymbol{1}_s=(1,1,\cdots,1)。$$

引理 1.2 令 $\bar{\boldsymbol{G}}=\dfrac{\boldsymbol{G}}{\rho(\boldsymbol{G})},\bar{\boldsymbol{G}}_k=\dfrac{\boldsymbol{G}_k}{\rho(\boldsymbol{G}_k)},\boldsymbol{F}_{m,m}=\prod_{k=1}^{r(n-m)}\bar{\boldsymbol{G}}_{m+k}=\bar{\boldsymbol{G}}_{m+1}\cdots\bar{\boldsymbol{G}}_{m-1}\bar{\boldsymbol{G}}_m$,
则当 $n>m$ 时,有

$$\lim_{m\to\infty}\|\boldsymbol{F}_{m,m}-\bar{\boldsymbol{G}}^{r(n-m)}\|=0。$$

引理 1.3 令

$$\boldsymbol{F}_n=\prod_{k=1}^{n}\bar{\boldsymbol{G}}_k,$$

则存在 $m\times m$ 非负矩阵 $\boldsymbol{F}$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{F}_m=\boldsymbol{F}$ 且 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{FQ\Lambda H\Lambda}^{-1}\boldsymbol{Q}^{-1}$。

引理 1.4 存在一个 $m\times m$ 广义置换矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和一个秩为 r 的既无零行也无零列的非负矩阵 $\boldsymbol{T}$、使得 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{TP}$,其中 r 是 $\boldsymbol{G}$ 的循环指数。

定理 1.1 的证明 令 $\boldsymbol{\Omega}_r=\{\boldsymbol{U}:\boldsymbol{U}=\sum_{k=1}^{m}a_k\boldsymbol{U}_k,a_k\geqslant 0$ 是任意常数,而 $\boldsymbol{U}_k$ 是矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的列向量$\}$,并设 $\boldsymbol{X}_0\notin\boldsymbol{\Omega}_r$,不失一般性可设 $\boldsymbol{1}_m\boldsymbol{X}_0=1$,这里 $\boldsymbol{1}_m$ 表示元素均为 1 的 m 维行向量。假若 $\boldsymbol{X}_n\geqslant 0$ 对一切 n 成立,则由式(1-1)和引理 1.2 得

$$\boldsymbol{F}_n\boldsymbol{X}_n^*=\boldsymbol{X}_0,\quad \boldsymbol{X}_n^*=\Big(\prod_{k=1}^{n}\rho(\boldsymbol{G}_k)\Big)\boldsymbol{X}_{n+1}。$$

而由引理 1.3、引理 1.1 和引理 1.4 知,存在两个正数 b_2,b_1 和自然数 n_0 使得当 $n\geqslant n_0$ 时,有

$$b_1\boldsymbol{1}_m\boldsymbol{X}_m^*\leqslant\boldsymbol{1}_m\boldsymbol{F}_m\boldsymbol{X}_m^*=\boldsymbol{1}_m\boldsymbol{X}_0=1,$$

$$b_2\boldsymbol{1}_m\boldsymbol{X}_m^*\geqslant\boldsymbol{1}_m\boldsymbol{F}_m\boldsymbol{X}_m^*=\boldsymbol{1}_m\boldsymbol{X}_0=1,$$

也即

$$\frac{1}{b_2}\leqslant\boldsymbol{1}_m\boldsymbol{X}_m^*\leqslant\frac{1}{b_1}。$$

注意到 $\boldsymbol{X}_m^*\geqslant 0$,因而存在自然数的子列 $\{n_k\}$ 和一个非负非零向量 $\boldsymbol{X}^*$,使得 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{X}_{m_k}^*=\boldsymbol{X}^*$。再由引理 1.1 和引理 1.4 可得

$$\boldsymbol{X}_0=\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{F}_{m_k}\boldsymbol{X}_{m_k}^*=\boldsymbol{FX}^*=\boldsymbol{TPX}^*\in\boldsymbol{\Omega}_r。$$

这与假设矛盾,此说明,只要 $\boldsymbol{X}_0\notin\boldsymbol{\Omega}_r$,一定存在一个自然数 n_0 使得当 $n\geqslant n_0$ 时,$\boldsymbol{X}_0$ 有负的分量。

定理 1.2 的证明 因为 $\rho(G)<1$,因而 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}^k$ 是一个非负矩阵,而 $\boldsymbol{B}$ 是一个既无零行也无零列的非负矩阵,因此 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}$ 有一个最大正的特征根 λ。容易验证满足式(1-3)的 $\boldsymbol{X}_n$ 就是式(1-1)的一个平衡增长解。为证明(ⅱ),设

$$\boldsymbol{W}_n=\boldsymbol{X}_n-(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C})^n\boldsymbol{Y}, \tag{1-4}$$

将此式代入式(1-1)并利用 $\boldsymbol{D}=\sum_{k=0}^{\infty}[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]^k\boldsymbol{C}^k$ 是一个收敛的矩阵序列,则有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}_n&=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{W}_{n+1}-\boldsymbol{W}_n)+(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{I})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C})^n\boldsymbol{Y}+(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C})^n\boldsymbol{Y}\\&=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{W}_{n+1}-\boldsymbol{W}_n)+\boldsymbol{D}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C})^n\boldsymbol{Y}。\end{aligned}$$

而由式(1-4)有 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}_n=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{W}_n+\boldsymbol{D}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C})^n\boldsymbol{Y}$,因而有

$$\boldsymbol{W}_n=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{W}_{n-1}。$$

由此式并应用证明定理 1.1 的同样方法可证明(ⅱ)。

推论 1.1 的证明 当 $r=1$,则 $\boldsymbol{\Omega}_1=\{aU_1:a>0$ 是任意常数$\}$,其中 U_1 是 $\boldsymbol{T}$ 的列向量且每个分量大于零。令 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{U}_1=(p_1,p_2,\cdots,p_m)^{\mathrm{T}}$,其中 $\boldsymbol{P}$ 由引理 1.4 所定义,则有

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{U}_1=\left(\sum_{k=1}^{m}p_k\right)\boldsymbol{U}_1。$$

此式说明 $\boldsymbol{U}_1$ 是 $\boldsymbol{TP}$ 的右正特征向量。易验证 $\boldsymbol{U}_1$ 又是 $\boldsymbol{G}$ 的特征向量,从而当 $\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{U}_1$ 时,有 $\boldsymbol{X}_n=\left(\frac{1}{\rho(\boldsymbol{G})}\right)^nU_1,n\geqslant0$。推论 1.1 的后半部分结论可由定理 1.1 推出。

1.3 价格相对平衡增长的极限定理[27]

1.3.1 引言

设 $\boldsymbol{P}_n=(p_{n1},p_{n2},\cdots,p_{nm})$ 表示在周期为 n 时的价格向量,其中 p_{nj} 表示在第 n 期第 j 个产品的价格,假设这 m 个产品的生产都需一个周期完成,且市场是完全竞争的。另外,假设每个部门均可以以利率 r_n 贷出其在第 n 期进行经济活动所持有的钱或进行投资生产。并设原材料成本远高于劳动力成本。这样我们有如下的动态投入产出模型的基本价格方程(参见文献[20]102):

$$\boldsymbol{P}_n=(1+r_{n-1})\boldsymbol{P}_{n-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1},$$

其中 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{I}$ 分别是投入系数矩阵、资本系数矩阵和单位矩阵,并且 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 是可逆阵。虽然变系数(投入系数和资本系数在不同的周期有变化)动态投入产出模型已有学者涉及讨论过(参见文献[14]75),但如下的变系数动态投入产出模型的价格方程

$$\boldsymbol{P}_n=(1+r_{n-1})\boldsymbol{P}_{n-1}\boldsymbol{B}_{n-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_n+\boldsymbol{B}_{n-1})^{-1}=R_{n-1}\boldsymbol{P}_0\prod_{k=0}^{n-1}\boldsymbol{G}_k \tag{1-5}$$

却少有人研究,其中,$R_n=\prod_{k=0}^{n-1}(1+r_n)$,$\boldsymbol{G}_k=\boldsymbol{B}_k(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_{k+1}+\boldsymbol{B}_k)^{-1}$。

本节将给出当 $n\to\infty$ 时,价格向量 $\boldsymbol{P}_n$ 的极限性质。

1.3.2 相对平衡增长极限定理

定义 1.2 设 $\boldsymbol{P}_n$ 是满足式(1-5)的解，且其初始价格向量 $\boldsymbol{P}_0 \not\geq 0$。如果存在一列正向量 $\boldsymbol{P}_n^* = \boldsymbol{R}_{n-1}\lambda^n \boldsymbol{P}^*$，其中 $\lambda > 0$ 是一个常数，使得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\boldsymbol{P}_n}{\boldsymbol{P}_n^*} = c\boldsymbol{1}_m。\tag{1-6}$$

这里$\dfrac{\boldsymbol{P}_n}{\boldsymbol{P}_n^*}$表示 $\boldsymbol{P}_n$ 和 $\boldsymbol{P}_n^*$ 对应的各分量相除而得的向量，$c>0$ 是一个常数，$\boldsymbol{1}_m$ 表示由 m 个 1 所构成的行向量，则称 $\boldsymbol{P}_n$ 满足相对平衡增长，或称 $\boldsymbol{P}_n$ 是相对平衡增长的。

定理 1.3 设式(1-5)中对每个 n，$\boldsymbol{G}_n$ 是一非负的可逆阵。如果存在一个非负不可约矩阵 $\boldsymbol{G}$ 使得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \| \boldsymbol{G}_n - \boldsymbol{G} \| < +\infty, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} | \rho(\boldsymbol{G}_n) - \rho(\boldsymbol{G}) | < +\infty, \tag{1-7}$$

其中，$\rho(\boldsymbol{G}_n)$ 和 $\rho(\boldsymbol{G})$分别是 $\boldsymbol{G}_n$ 和 $\boldsymbol{G}$ 的谱半径，则式(1-5)的解 $\boldsymbol{P}_n$满足相对平衡增长的充要条件是 $\boldsymbol{G}$ 是本原矩阵。

证明 充分性。设 $\boldsymbol{G}$ 是本原的，显然 $\boldsymbol{G}$ 的循环指数 $r=1$，因而 $\rho(\boldsymbol{G})$是 $\boldsymbol{G}$ 的唯一的正特征向量 $\boldsymbol{P}^*$ 对应的特征根，即 $\boldsymbol{P}^*\boldsymbol{G} = \rho(\boldsymbol{G})\boldsymbol{P}^*$。由式(1-7)可得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\rho(\boldsymbol{G}_0)\rho(\boldsymbol{G}_1)\cdots\rho(\boldsymbol{G}_{n-1})}{(\rho(\boldsymbol{G}))^n} = \rho, \quad (0 < \rho < \infty)。$$

令 $\boldsymbol{P}_n^* = \boldsymbol{R}_{n-1}(\rho(\boldsymbol{G}))^n\boldsymbol{P}^*$，则由 1.2 节的引理 1.3 和引理 1.4 可得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\boldsymbol{P}_n}{\boldsymbol{P}_n^*} = \lim_{n\to\infty} \frac{\rho(\boldsymbol{G}_0)\rho(\boldsymbol{G}_1)\cdots\rho(\boldsymbol{G}_{n-1})}{(\rho(\boldsymbol{G}))^n} \frac{\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{F}_n}{\boldsymbol{P}^*} = \rho \frac{\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{TP}}{\boldsymbol{P}^*}。\tag{1-8}$$

利用文献[6]第 9 章的有关结论可知 $\boldsymbol{G} = \rho(\boldsymbol{G})\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}$，其中 $\boldsymbol{H}$ 是列和为 1 的非负方阵，$\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)$且 $\lambda_i > 0$。由于 $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{U}_1\boldsymbol{1}_m$，$\boldsymbol{P} = \lambda_1\boldsymbol{\Lambda}^{-1}$，则

$$\boldsymbol{1}_m\boldsymbol{PG} = \lambda_1\boldsymbol{1}_m\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{G} = \lambda_1\rho(\boldsymbol{G})\boldsymbol{1}_m\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Lambda}^{-1} = \lambda_1\rho(\boldsymbol{G})\boldsymbol{1}_m\boldsymbol{\Lambda}^{-1} = \rho(\boldsymbol{G})\boldsymbol{1}_m\boldsymbol{P}。$$

此说明 $\boldsymbol{1}_m\boldsymbol{P}$ 是 $\boldsymbol{G}$ 的一个正特征向量。因为 $\boldsymbol{G}$ 的正特征向量唯一，因而存在一个正常数 d 使得 $\boldsymbol{1}_m\boldsymbol{P} = d\boldsymbol{P}^*$，再由式(1-8)即可得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\boldsymbol{P}_n}{\boldsymbol{P}_n^*} = \rho d\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{1}_m。$$

必要性。假若 $\boldsymbol{G}$ 不是本原的，则其循环指数 $r>1$。不失一般性，可设 $r=2$，由 1.2 节的引理 1.3 和引理 1.4 得 $\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{1}_s, \boldsymbol{U}_2\boldsymbol{1}_s)$，其中 $2s=m$，$\boldsymbol{U}_1$ 和 $\boldsymbol{U}_2$ 线性无关，这样可设

$$\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{T} = (a, a, \cdots, a, b, b, \cdots, b)。$$

显然，对任意正的向量 $\boldsymbol{P}^*$，我们可取 $\boldsymbol{P}_0$ 使得 $a>0$，$b>0$，$a \neq b$ 并且

$$\frac{\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{TP}}{\boldsymbol{P}^*} \neq c(\boldsymbol{P}_0)\boldsymbol{1}_m。$$

这里 $c(\boldsymbol{P}_0)$是 $\boldsymbol{P}_0$ 的一个正函数，此与必要条件矛盾。