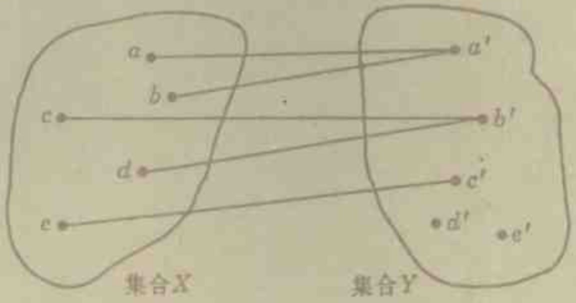
全国高等教育自学考试

$$\frac{ER}{EP}=\frac{dR}{dP}\cdot\frac{P}{R}$$



主编　凌明娟

高等数学(一)学习辅导

同济大学出版社

全国高等教育自学考试

高等数学(一)学习辅导

主编　凌明娟

同济大学出版社

(沪)新登字 204 号

内 容 提 要

本书根据"高等数学（一）自学考试大纲"和"高等数学考核目标"，结合作者多年来从事自学考试辅导的体会编写而成．内容有：函数及其图形、极限和连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、积分、无穷级数、多元函数微积分和微分方程初步等八章，每章包括基本要求、主要内容简述和典型例题、自我检查题与历年自学考试试题四个部分．书末附有答案和提示．

本书针对学生自学为主的特点，力求紧扣自学考试大纲，叙述深入浅出、循序渐进；选材简明扼要、重点突出；解题思路清晰，指导性强．本书可作为经济管理人员自学用书，也可供数学教师教学参考．

责任编辑　李炳钊
封面设计　李志云

高等数学(一)学习辅导
主编　凌明娟
同济大学出版社出版
(上海市四平路 1239 号)
新华书店上海发行所发行
印刷厂印刷
开本 850×1168 1/32　印张 12.5　字数 360 千字
1995 年 9 月第 1 版　1995 年 9 月第 1 次印刷
印数 1–8 000　定价 16 元
ISBN　7–5608–1469–7/O.140

前　言

本书根据“高等数学（一）自学考试大纲”和全国高等教育自学考试委员会高等数学题库建设研究组编写的“高等数学考核目标”，结合编者从事自学考试辅导的体会，针对自学考试考生的特点编写而成。本书力求紧扣大纲，深入浅出，内容简明，重点突出，解题思路清晰，每章配有自测题和历年自学考试按章编辑的试题，书末附有答案和提示，便于学生自学和社会助学以适应考试的要求。

本书按大纲分为八章，每章包括下述四部分：

一、基本要求

二、主要内容简述和典型例题

三、自我检查题

四、历年自学考试试题（附部分试题题解）

本书由上海财经大学基础部副教授凌明娟主编，李炳钊、方能文、张震峰、丁家声、杨勇等同志也参加了部分章节的编写，并得到了吴立熙教授的具体帮助和指导。

在本书编写过程中，作者得到了同济大学出版社的热情支持，也得到了上海市自学考试办公室、上海财经大学自学考试办公室有关同志和上海市电子信息应用教育中心、广博财贸进修学院、凌云财贸进修学校、求实经贸管理进修学院等自学考试辅导点的支持和帮助，并征求了贝时春老师、部分自学考试辅导老师和学员的意见，在此向有关人员表示衷心感谢。

限于编者水平，成书仓促，缺点和错误在所难免，欢迎读者批评指正。

编者　1995 年 3 月

目　录

第一章 函数及其图形

一、基本要求

(1) 了解集合概念，掌握集合的运算。

(2) 理解绝对值、区间、邻域等概念。

(3) 了解映射概念，深刻理解函数的概念。掌握函数定义中的两个要素——定义域和对应法则，会求函数的定义域和函数值域。

(4) 理解函数的单调性、有界性、奇偶性和周期性。

(5) 熟记基本初等函数的表达式、定义域、图形和性质。

(6) 深刻理解反函数的概念，会求给定函数的反函数，并能根据 $y=f(x)$ 求出反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域。

(7) 深刻理解复合函数的概念，会正确地分析复合函数的复合过程。

(8) 理解初等函数的概念，能区别分段函数与初等函数。

二、主要内容简述和典型例题

(一) 预备知识

1. 集合的概念和运算

(1) 基本概念

集合 具有某种属性的事物的全体，形成一个集合。集合是一种原始概念，它和点、线、面、体一样，不能用另外的概念来规定它的定义。集合可用大写字母 A，B，C，…表示。

元素 构成集合的事物称为该集合的元素。元素可用小写字母 a, b, c, …表示。

属于 元素 a 是集合 A 中的元素，记作$a \in A$，读作 a 属于 A；如果 a 不是集合 A 的元素，则记作$a \bar{\in} A$，读作 a 不属于 A。

全集 被研究的所有对象构成的集合称为全集，记作 U。全集是相对的。一个集合在一定的研究范围内是全集，在另一研究范围内就可能不是全集。例如，讨论的问题仅限于整数，则整数集 J 为全集。如果讨论的问题包括全体实数，则整数集 J 就不是全集。

空集 不包含任何元素的集合，称为空集，用 φ 表示。注意：$\{0\} \neq \varphi$，$\{0\}$包含一个元素“0”。

(2) 集合的表示法

列举法 将集合中的元素不重复、不遗漏、不计次序列出，写在花括号{ }内，这种表示集合的方法叫做列举法。

例如：小于 6 的自然数的集合为$\{1, 2, 3, 4, 5\}$；

$\{1, 2, 3\}$，$\{3, 2, 1\}$都表示由 1，2，3 三个元素组成的同一个集合。

注意：$\{a\}$与 a 不同，a 是元素，$\{a\}$是只含有一个元素 a 的集合，两者概念不同。a 是集合$\{a\}$的元素，两者的关系是 $a \in \{a\}$。

描述法(亦称为构造式法) 把对于集合中元素的共同属性的描述写在花括号内。如果 x 表示集合 A 中的任意元素，而用 $p(x)$来描述 x 的性质，那么集合 A 可以表示为

$$A = \{x \mid p(x)\} \quad 或 \quad \{x: p(x)\}$$

这就是集合 A 的构造式。

例如：在平面直角坐标系上，所有与原点距离等于 1 的点的集合可以表示为$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$；

方程$x^2 - 3x + 2 = 0$的解集 A 可表示为

$$A=\{x \mid x^2-3x+2=0\}$$

图示法 在同一平面内，用一条封闭曲线所围成的图形表示集合。这种图形叫做韦恩图。

(3) 集合的包含与相等

子集 如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，则集合 A 叫做集合 B 的子集，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，读作 A 包含于 B 或 B 包含 A。

集合的相等 如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$。

显然① $A\subset A$，即集合 A 是其自身的子集。

② 空集是任意集合 A 的子集，任意集合是全集的子集。即

$$\varphi\subset A,\ A\subset U$$

③ 如果 $A\subset B$，$B\subset C$，则 $A\subset C$。

(4) 集合的运算

交集 由同时属于 A 和 B 的一切元素所组成的集合叫做集合 A 和集合 B 的交集，记作 $A\cap B$。

即 $A\cap B=\{x \mid x\in A$ 且 $x\in B\}$

显然 $A\cap B\subset A$，$A\cap B\subset B$。

并集 由属于 A 或属于 B 的一切元素所组成的集合叫做集合 A 和集合 B 的并集，记作 $A\cup B$。即

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

$$A\subsetneq A\cup B,\qquad B\subset A\cup B.$$

差集 由属于 A 而不属于 B 的所有元素组成的集合叫做集合 A 与集合 B 的差集，记作 $A-B$。即

$$A-B=\{x \mid x\in A \text{ 但 } x\overline{\in} B\}$$

补集 若 U 为全集，由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合叫做 A 的补集，记作 $\overline{A}$。即 $\overline{A}=\{x \mid x\in U$ 且 $x\overline{\in} A\}$。

图 1-1 为用韦恩图表示集合的运算。

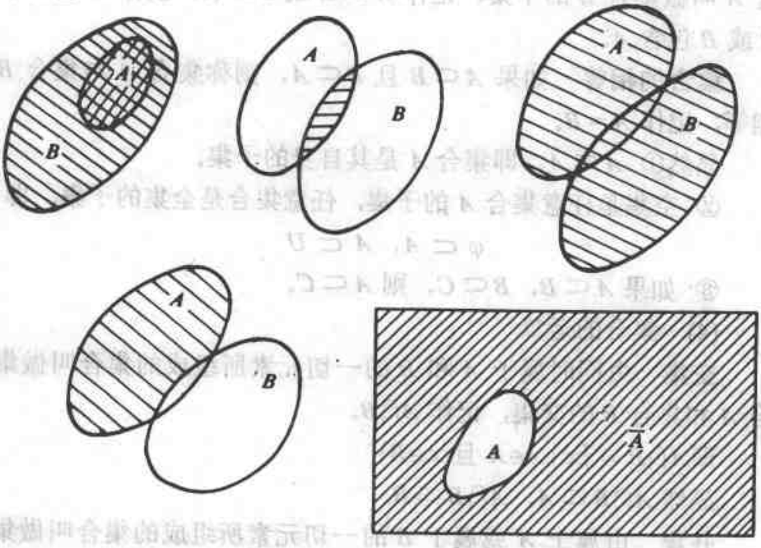


图 1-1　$A \subset B$;　$A \cap B$;　$A \cup B$;　$A-B$;　$\overline{A}$

例如$A=\{x|-2<x<2\}$，$B=\{x|0 \leqslant x \leqslant 5\}$。

则$A \cap B=\{x|0 \leqslant x<2\}$；$A \cup B=\{x|-2<x \leqslant 5\}$；

$A-B=\{x|-2<x<0\}$；$\overline{A}=\{x|-\infty<x \leqslant -2,\ 2 \leqslant x <+\infty\}$。

2. 实数、区间、邻域和绝对值

(1)　实数与数轴

数是数学中一个重要的的研究对象，在实数范围内数可归类

为

$$
\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数(自然数)}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\ \qquad\qquad\text{(有限小数和无限循环小数)}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}\\ \text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\quad\text{(有限不循环小数，如}\sqrt{2},\pi,e\text{等)}\\ \text{负无理数}\end{cases}\end{cases}
$$

实数轴(图 1–2) 是具有方向、原点和单位长度的有向直线。实数与数轴上的点是一一对应的。点 a 与数 a 意义相同，无需区别。

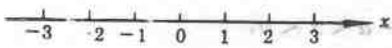


图 1–2

(2) 区间

表示介于两个实数之间的全体实数。这两个实数叫做区间的端点。

开区间$(a,\ b)$ 表示满足不等式$a<x<b$的全体实数 x 的集合，即$(a,\ b)=\{x|\ a<x<b\}$。

闭区间$[a,\ b]$ 表示满足不等式$a\leqslant x\leqslant b$的全体实数 x 的集合，即$[a,\ b]=\{x|\ a\leqslant x\leqslant b\}$。

半开区间$[a,\ b)$或$(a,\ b]$ 表示满足$a\leqslant x<b$或$a<x\leqslant b$的全体实数 x 的集合，即$[a,b)=\{x|\ a\leqslant x<b\}$；$(a,\ b]=\{x|a<x\leqslant b\}$。

无穷区间 $(-\infty,\ +\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$表示全体实数。

$(a,\ +\infty)=\{x|\ a<x<+\infty\}$表示大于 a 的全体实数。同

样可以定义$(-\infty, b]$，$(-\infty, b)$和$[a, +\infty)$。

(3) 绝对值

实数 x 的绝对值，记作 $|x|$，定义为

$$|x|=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

它表示 x 到原点 0 的距离。绝对值具有以下 6 条性质：

① $|x|=\sqrt{x^2}$；

② $|x|\geqslant 0$;

③ $|x|=|-x|$;

④ $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$;

⑤ $|x|-|y|\leqslant |x\pm y|\leqslant |x|+|y|$;

⑥ 如果 $a>0$，则

$|x|<a \qquad -a<x<a$,

即$\{x \mid |x|<a\}=\{x \mid -a<x<a\}$;

$|x|\geqslant a \qquad x\geqslant a$或$x\leqslant -a$,

即$\{x \mid |x|\geqslant a\}=\{x \mid x\geqslant a\}\cup\{x \mid x\leqslant -a\}$。

(4) 邻域

实数集合$\{x \mid |x-x_0|<\delta, \ \delta>0\}$叫做 a 的 δ 邻域，其中 a 叫做邻域的中心，δ 称为邻域的半径。a 的 δ 邻域在数轴上常以开区间$(x_0-\delta, \ x_0+\delta)$表示。如图 1–3 所示。

图 1–3

例如$|x-1|<2$，表示以 $x_0=1$ 为中心，2 为半径的邻域，也就是开区间$(-1, 3)$。

3. 充分条件、必要条件、充要条件与无关条件

若由 A 能推得 B，用 $A \Rightarrow B$ 表示，则 A 是 B 的**充分条件**；B 是 A 的**必要条件**。

若 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$，即 $A \Leftrightarrow B$，则 A 与 B 互为**充分必要条件**。

若 $A \nRightarrow B$ 且 $B \nRightarrow A$，则 A 与 B 互为**无关条件**。

以上四个概念在今后各章的定理、性质中经常用到，必须正确识别。

(二) 函数

1. 映射

定义：若两个集合 X，Y 间的一种对应关系 f 满足下列条件：

(1) 对于集合 X 的每一个元素，都按某种规则与集合 Y 的某个元素对应；

(2) 对于集合 X 的每一个元素，集合 Y 中与它对应的元素只有一个。

则称这样的对应关系 f 为集合 X 到集合 Y 的**映射**，记作 f：$X \to Y$。

对应关系 f 将集合 X 中的每一个元素 $x \in X$ 与集合 Y 中的某个(唯一的)元素 $y \in Y$ 对应，习惯上记作 $y = f(x)$。

说明：在映射中，集合 Y 中的任一元素不一定与集合 X 中的某个元素相应；集合 Y 中的一个元素也可以允许是集合 X 中的两个或多个元素的对应元素，见图 1−4。

2. 函数的定义

两个变量 x，y，如果变量 x 在某变化范围 D 内任取一个数值时，变量 y 按一定的规律有唯一确定的值与它对应，则称 y 是 x 的函数。记作 $y = f(x)$。变量 x 称为**自变量**，自变量的取值范

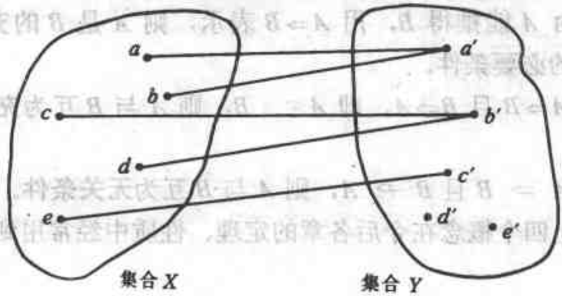


图 1-4

围称为**定义域**，记作 D_f。变量 y 称为**因变量**，y 的取值范围称为函数的**值域**，记作 Z_f。函数与自变量的记号无关，如果定义域相同，则 $f(x)$与 $f(t)$表示同一函数。函数实质上是实数集合 D_f 和 Z_f之间的映射 f: $D_f \to Z_f$

3. 函数定义中的两个要素

(1) 定义域及其求法

① 应用题中函数的定义域由变量的实际意义而定；

② 用解析式表示的函数，其定义域应使该解析式在实数范围内有意义。

偶次根式要求被开方数大于、等于零。

分式要求分母不等于零。

对数函数要求真数大于零，底数大于零且不等于 1。

反三角函数也有特殊限定。例如 $\arcsin f(x)$，$\arccos f(x)$要求$|f(x)| \leqslant 1$。

分段函数的定义域是各个定义区间的并集。

多项函数的定义域是每一项函数定义域的交集。

反函数 $y=f^{-1}(x)$的定义域是直接函数 $y=f(x)$的函数值域。

复合函数 $y=f[\varphi(x)]$的定义域应使 $u=\varphi(x)$的值域包含于 $y=f(u)$的定义域。

例 1 求下例函数的定义域，并用区间表示。

(1) $f(x)=\sqrt{16-x^2}+\dfrac{1}{\ln(2x-3)}$;

(2) $f(x)=\ln(2^x-4)+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$。

分析 要使函数有意义，必须而且只需

(1) 偶次根号被开方数 $16-x^2\geqslant 0$，对数函数中真数 $2x-3>0$，分式中分母 $\ln(2x-3)\neq 0$，定义域是各不等式解的交集。

(2) 真数 $2^x-4>0$，且 2^x 是递增的，反正弦函数中 $|\dfrac{2x-1}{7}|\leqslant 1$。

解(1)

$$\begin{cases}16-x^2\geqslant 0\\2x-3>0\\2x-3\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x|\leqslant 4\\x>\dfrac{3}{2}\\x\neq 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 4\\x>\dfrac{3}{2}\\x\neq 2\end{cases}$$

$\therefore D_f=(\dfrac{3}{2},\ 2)\cup(2,\ 4]$

(2)

$$\begin{cases}2^x-4>0\\|\dfrac{2x-1}{7}|\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2^x>2^2\\-1\leqslant\dfrac{2x-1}{7}\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>2\\-3\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$$

$\therefore D_f=(2,\ 4]$

例 2 已知 $f(x)$ 的定义域为 $(0,\ 4]$，求 $f(x+1)$ 和 $f(x^2)$ 的定义域。

分析 $f(x+1)$ 由 $y=f(u)$，$u=x+1$ 复合而成；

$f(x^2)$ 由 $y=f(u)$，$u=x^2$ 复合而成。