数学概貌丛书

# 常微分方程概貌

秦元勳 著

科学技术文献出版社

数学概貌丛书

# 常微分方程概貌

秦元勋 著

科学技术文献出版社

## 内 容 提 要

本书以常微分方程的发展历史为主线，介绍了常微分方程的概貌．全书计分四章，即：常微分方程的创立及实域解析理论，常微分方程复域解析理论，常微分方程实域定性理论，本世纪常微分方程的重大发展．读者可从中对常微分方程这一数学分支有一个大致的了解．本书可供大学数学、物理系师生、旁学科的科学工作者以及数学爱好者阅读、参考．

数学概貌丛书

常微分方程概貌

秦元勋 著

*

科学技术文献出版社出版

(北京市复兴路 15 号)

上海市中华印刷厂印刷

新华书店上海发行所发行　各地新华书店经售

*

开本 850×1156　1/32　印张 2.125　字数 42,000

1989 年 12 月第 1 版　1989 年 12 月第 1 次印刷

印数 1—2000 本

定价：(平装本) 1.25 元

ISBN 7-5023-0652-8/0·42

# 目　录

常微分方程，是一个有长期历史，而又正在不断发展的学科；是一个既有理论研究意义，又有实际应用价值的学科；是一个既得力于其他数学分支的支持，又为其他数学分支服务的学科；是一个表现客观自然规律的工具学科，又是一个数学可以为实际服务的学科．为了系统地介绍这一学科，我们准备以它的历史发展系统为线索，逐步展开对它的丰富内容的叙述．

按照它的主线的历史发展，可以划分为四个阶段，即：常微分方程创立及实域解析理论的阶段，常微分方程复域解析理论的阶段，常微分方程实域定性理论的阶段和常微分方程广泛深入发展的阶段．

# 一、常微分方程的创立及实域解析理论

三百年前，牛顿(I. Newton)和莱布尼兹(G. W. Leibniz)发明了微积分，同时也就开始了常微分方程的研究．现在我们用的微积分记号，便是莱布尼兹创造的．而最初将微积分应用于解决行星运动和月球运动的，则归功于牛顿．因此，常微分方程有着长期的历史．

牛顿力学的第二定律是指：动量随时间的变化率等于力；其数学表达形式便是常微分方程

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)=\boldsymbol{F}, \tag{1}$$

这里$m$是质量，$\boldsymbol{r}$ 是位置向量，$t$ 是时间，$\boldsymbol{F}$ 是作用于质点的力.

牛顿引力定律：引力与距离的平方成反比，与质量成正比；即

$$\boldsymbol{F}=-G\frac{Mm}{|\boldsymbol{r}|^2}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}, \tag{2}$$

这里 $G$ 是万有引力常数，$M$ 与 $m$ 为互相吸引的两质点的质量，$\boldsymbol{r}$ 是由$M$点到 $m$ 点的距离向量．其中的“－”号表示吸引力．$\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$ 只表示方向，因其长度为 1.

将这两个定律合并在一起，就得到常微分方程

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)=-G\frac{Mm}{|\boldsymbol{r}|^2}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}. \tag{3}$$

这便是统治行星绕太阳、月球绕地球、人造卫星绕地球等等运动的常微分方程式.

将常微分方程(3)解出，可以得到开普勒(J. Kepler)由实测数据总结出来的行星绕日运动三定律，即：

i．行星是在以太阳为焦点的一个椭圆轨道上运动.

ii．行星到太阳的向径扫过的面积，与时间成正比.

iii．行星周期 $T$ 的平方与行星椭圆轨道的半长轴的三次方成正比.

这是常微分方程的实际应用的第一次历史性的胜

利．在牛顿的经典著作《自然哲学的数学原理》一书中，主要是研究形如(3)的方程在天文方面的各种应用．由此可见，常微分方程从一开始便紧密联系客观实际，并为当时的天文、航海等需要服务的．

常微分方程(3)的求解，可分两步．首先，可证其解在一个平面上（即初始位置向量和初始速度所决定的平面上），这是动量守恒的结果．因此，可以引入极座标$(r,\theta)$．其次，引入变量$u=\dfrac{1}{r}$，则可以得到$u$对$\theta$的二阶常系数线性常微分方程

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=GM\left(\frac{m}{K_\theta}\right)^2, \tag{4}$$

这里$K_\theta$是系统的角动量，是一个常量．由此解出

$$\frac{1}{r}=u=u_0\cos(\theta-\theta_0)+GM\left(\frac{m}{K_\theta}\right), \tag{5}$$

这里$u_0$及$\theta_0$为两个常数，由初始速度及位置之值而定．

这里立即可以看出，同一个微分方程，由于初始条件（位置与速度）不同，而可以有不同的解．事实上，九大行星和数以百计的小行星，都服从同一个微分方程(3)（取$M=M_{日}$太阳质量，并以太阳位置为原点），然而，它们的运动却各不相同．这是微分方程比代数方程更为复杂的一点．含足够多常数的解，称为通解．

微分方程一旦产生，便有数学家对它们的求解作系统的研究．十七世纪末和整个十八世纪对常微分方程的研究，便是寻求实域中各类型的方程的有明显表达形式的通解．下面是当时取得的一系列进展：

（一）可分离变量的方程.

设方程有形式

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y),$$

则可以化为积分

$$\int^{x} f(x)dx=\int^{y}\frac{dy}{g(y)}.$$

这样，即将求解微分方程问题化成求积分的问题.问题降了一级.

（二）齐次方程.

设方程有形式

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right).$$

引入新变量 $y/x=v$，则有

$$x\frac{dv}{dx}+v=f(v)$$

或

$$\frac{dv}{dx}=\frac{f(v)-v}{x}.$$

这是可分离变量的类型，立即可用(一)中之法求解.

（三）线性变系数方程.

设方程有形式

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x).$$

引入 $y=uv$，则有

$$v\frac{du}{dx}+u\left(\frac{dv}{dx}+pv\right)=q.$$

利用 $\frac{dv}{dx}+pv=0$ 的可分离变量性，求出

$$v=e^{-\int^{x}p(x)dx},$$

即可由 $v\frac{du}{dx}=q$ 的可分离变量性，求出

$$u=\int^x \frac{q}{v}\,dx,$$

由此得出

$$y=e^{-\int^x p(x)dx}\int^x q(x)e^{\int^x p(x)dx}dx.$$

前面的一系列成果，主要是由莱布尼茨和伯努利家族(Bernoulli)取得的.

（四）伯努利方程.

伯努利家族进一步研究了形如

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^n$$

的方程式（现在通称为**伯努利方程**）. 他们利用了变换 $u=y^{1-n}$,将上述方程化为线性方程

$$\frac{du}{dx}+(1-n)p(x)u=(1-n)q(x),$$

再利用(三)求解.

（五）黎卡提方程.

丹尼尔·伯努利研究过下面特殊形式的方程

$$\frac{dy}{dx}+y^2=1+\frac{\nu(\nu+1)}{x^2},$$

并对 $\nu$ 为非负整数时，求得两个特解：

$$y=y_1(x)=\frac{\nu+1}{x}+\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{d^\nu}{d(x^2)^\nu}\left(\frac{e^x}{x}\right)\right),$$

和

$$y=y_2(x)=\frac{\nu+1}{x}+\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{d^\nu}{d(x^2)^\nu}\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)\right).$$

意大利数学家黎卡提(J. F. C. Riccati) 曾研究过一般的最低次的非线性方程

$$\frac{dy}{dx}=A(x)y^2+B(x)y+C(x),$$

得到如下的求解办法：只要知道它的一个特解$y=y_1(x)$，则引入 $z(x)=y(x)-y_1(x)$，立即可有

$$\frac{dy_1(x)}{dx}=A(x)y_1^2(x)+B(x)y_1(x)+c(x).$$

故

$$\begin{aligned}\frac{dz(x)}{dx}&=\frac{d(y(x)-y_1(x))}{dx}\\&=A(x)(y^2(x)-y_1^2(x))+B(x)(y(x)-y_1(x))\\&=A(x)(y(x)-y_1(x))^2+(B(x)+2y_1(x))(y(x)-y_1(x))\\&=A(x)z^2(x)+(B(x)+2y_1(x))z(x).\end{aligned}$$

这又是一个伯努利方程，可以用积分求解.

如果知道它的两个特解$y=y_1(x)$及 $y=y_2(x)$，则由

$$\frac{d}{dx}\ln(y-y_1)=\frac{A(y^2-y_1^2)+B(y-y_1)}{y-y_1}=A(y+y_1)+B,$$

及

$$\frac{d}{dx}\ln(y-y_2)=\frac{A(y^2-y_2^2)+B(y-y_2)}{y-y_2}=A(y+y_2)+B,$$

可有

$$\frac{d}{dx}\ln\frac{y-y_1}{y-y_2}=A(x)(y_1-y_2).$$

亦即通解可写成

$$\frac{y-y_1}{y-y_2}=c\cdot e^{\int^x A(x)(y_1(x)-y_2(x))dx},$$

其中 $C$ 是常数. 注意到右方只与 $A(x)$及 $y_1(x)$、$y_2(x)$有关，因此，如果还知第三个解 $y=y_3(x)$，则立即可得通解形式为

$$\left(\frac{y(x)-y_1(x)}{y(x)-y_2(x)}\right)\Big/\left(\frac{y_3(x)-y_1(x)}{y_3(x)-y_2(x)}\right)=\text{常数}.$$

（六）阿贝尔方程.

由线性方程、黎卡提方程的研究，引起了沿这个方向的进一步的发展，这便是阿贝尔(N. H. Abel)研究的形如

$$\frac{dy}{dx}=A(x)y^3+B(x)y^2+C(x)y+D(x)$$

及

$$\frac{dy}{dx}=\frac{A(x)y^2+B(x)y+C(x)}{y+D(x)}$$

的方程(现在通称阿贝尔第一类和第二类方程).

注意到线性方程、伯努利方程、黎卡提方程的通解都具有下面的典型形式

$$G(x)\prod_{j=1}^{n}(y-y_j(x))^{\mu_j}=\text{常数}.$$

简称为“第一类显易解结构”. 对线性方程，$n=1$；对黎卡提方程，$n=2$(并有 $\mu_1+\mu_2=0$)；对伯努利方程，则为一般的整数 $n$. 因此，人们也想寻求阿贝尔第一类方程是否具有 $n=3$ 的第一类显易解结构，结果是：阿贝尔第一类方程要具有第一类显易解结构的充要条件为

$$(H+\alpha)\Phi\equiv 0,$$

其中

$$\Phi\equiv AD^2+\frac{1}{3}\left(D\frac{dC}{dx}-C\frac{dD}{dx}-BCD\right)+\frac{2}{27}C^3,$$

$$H\equiv\frac{1}{3\Phi^{5/3}}\left(\Phi\left((3DB-C^2+3\frac{dD}{dx}\right)-D\frac{d\Phi}{dx}\right),$$

$\alpha$ 为任意常数，但 $\alpha\neq 3\left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}$.

当 $\Phi\equiv 0$ 时，则化为伯努利方程，已知解型.

当 $\Phi\neq 0$ 时,则 $H+\alpha=0$,故 $H=-\alpha\neq-3\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}$. 这时,代数方程

$$v^3-\alpha v+1=\prod_{j=1}^{3}(v-v_j)$$

有三个单根 $v_1$、$v_2$、$v_3$. 引入变量

$$y=\frac{3\Phi^{1/3}v-C}{3D},$$

则通解有

$$e^{-\int^x\frac{\Phi^{2/3}}{D}dx}\prod_{j=1}^{3}(v(x)-v_j)^{\lambda_j}=\text{常数},$$

这里

$$v(x)=\frac{3Dy(x)+C}{3\Phi^{1/3}},$$

$$\lambda_1=\frac{v_3-v_2}{\Delta},\quad \lambda_2=\frac{v_1-v_3}{\Delta},\quad \lambda_3=\frac{v_2-v_1}{\Delta},$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} v_2v_3 & v_3v_1 & v_1v_2\\ v_2+v_3 & v_3+v_1 & v_1+v_2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}.$$

当 $\alpha=3\left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}$，则代数方程出现重根. 积分中出现对于重根 $v=v_1=2^{-\frac{1}{3}}$ 的指数因子,通解为下形

$$e^{-\int^x\frac{\Phi^{1/3}}{D}dx}\left[e^{-\frac{C_1}{v(x)-v_1}}(v(x)-v_1)^{C_2}\right](v-v_3)^{C_3}=\text{常数}.$$

其中 $C_1=-\frac{5}{9}2^{1/3}$, $C_2=-C_3=-\frac{2^{2/3}}{9}$; $v_3=2^{2/3}$. 这类出现指数的形式,称为“第二类显易解结构”.

阿贝尔第一类方程要具有显易解结构，必须满足条件

$$(H+\alpha)\Phi\equiv 0.$$

因此，一般没有取得更多进展.

从第一类显易解结构

$$G(x)(y-y_1(x))^{\mu_1}(y-y_2(x))^{\mu_2}=\text{常数}$$

出现，当$\mu_1+\mu_2=0$，得出黎卡提方程；当 $\mu_1+\mu_2\neq 0$，则导致阿贝尔第二类方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{A(x)y^2+B(x)y+C(x)}{y+D(x)}.$$

反过来，当阿贝尔第二类方程要"有显易解结构"，$A$、$B$、$C$、$D$ 也必须有条件，即有一常数 $\lambda$，使

$$y=\frac{D\left[-\left(1+\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)AD+B+\frac{1-\lambda}{\lambda}\frac{dD}{dx}\right]-\left(1-\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)C}{2\frac{1-\lambda}{\lambda}AD-\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)\frac{dD}{dx}-\frac{1-\lambda}{\lambda}B}$$

是方程的一个解.由此可见，一般没有这种解.这样，沿这条路走下去，可能积出的类型越来越少了.

（七）雅可比方程.

有时，也偶然遇到一些很特殊的方程，而具有"显易解结构".德国数学家雅可比(C.G. J. Jacobi)找到

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y(Ay+Bx+C)-(Dy+Ex+F)}{x(Ay+Bx+C)-(Gy+Hx+K)},$$

这里常数 $A$、…、$K$ 形成的特征方程

$$\begin{vmatrix} D-\mu & E & F \\ G & H-\mu & K \\ A & B & C-p \end{vmatrix}=0$$

的三个根 $\mu_1$、$\mu_2$、$\mu_3$ 互不相等，则其通解为第一类显易解结构：

$$(a_{11}y+a_{12}x+a_{13})^{\mu_2-\mu_3}(a_{21}y+a_{22}x+a_{23})^{\mu_3-\mu_1}(a_{31}y+a_{32}x+a_{33})^{\mu_1-\mu_2}=\text{常数};$$

如果 $\mu$ 有重根,则有第二类显易解结构.

求解析通解的工作,在常系数线性系统中,得到了完全的解决.

(八) 常系数线性常微分方程

$$\sum_{m=0}^{n} a_m \frac{d^m y}{dx^m}=0,$$

其中 $a_m$ 为常数.命 $y=e^{\lambda x}$,即得

$$\sum_{m=0}^{n} a_m \lambda^m=0.$$

由此解出 $\lambda=\lambda_1、\lambda_2、\cdots、\lambda_n$, 则方程之通解为

$$y=\sum_{m=1}^{n} C_m e^{\lambda_m x}.$$

如果某一根 $\lambda_j$ 有重根, 则对应的重根还有形如

$$e^{\lambda_j x}\sum_{k=0}^{h-1} d_k x^k$$

的 $h$ 个解, $h$ 为重次.

当方程是非齐次的,即

$$\sum_{m=0}^{n} a_m \frac{d^m y}{dx^m}=f(x),$$

任取一根 $\lambda$,命 $y=e^{\lambda x}z(x)$,代入上方程,有

$$a_n e^{\lambda x}\frac{d^n z}{dx^n}+\cdots+z(x)\left(\sum_{m=0}^{n} a_m \frac{d^m e^{\lambda x}}{dx^m}\right)=f(x).$$

左方最后一项为

$$z(x)e^{\lambda x}\sum_{m=0}^{n} a_m \lambda^m=0,$$

故方程化为

$$a_n\frac{d^n z}{dx^n}+\cdots+b_0\frac{dz}{dx}=e^{-\lambda x}f(x).$$

以$\frac{dz}{dx}=u$，则

$$\sum_{m=0}^{n-1} b_m \frac{d^m u}{dx^m}=G(x)\,(=e^{-\lambda x}f(x)).$$

这样，方程右方已降了一阶，但仍为常系数线性常微分方程. 由此可见，一定能用有限次运算，经过积分，得到非齐次方程的一个特解 $y=y_0(x)$. 于是，通解即可写成

$$y=y_0(x)+\sum_{m=1}^{n} C_m e^{\lambda_m x}.$$

（九）欧拉方程.

作为常系数线性常微分方程的一个变体，有如下形式：

$$a_0x^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_ny=0.$$

欧拉 (L. Euler) 引入变换 $x=e^t$，将上面的方程化为

$$b_0\frac{d^ny}{dt^n}+b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+b_0=0,$$

又得到常系数线性常微分方程.

欧拉还第一个想到一般的常微分方程解的存在性问题，并提出一种数值方法来近似求解. 他所采用的办法，现在通称为**欧拉折线法**，即对常微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y);\quad x=x_0,\quad y=y_0$$

用公式

$$y_{n+1}=y_n+f(x_n,\ y_n)(x_{n+1}-x_n)\qquad (\text{其中 } n=0,1,2,\cdots)$$

逐次求解. 但是，严格的收敛性证明，则有待后一阶段才能完成. 这个方法也只有在电子计算机出现以后，才真正得到广泛应用.

欧拉还发现了"积分因子"的概念，亦即对于常微分方程

$$M(x,\ y)dy+N(x,\ y)dy=0,$$

如有函数 $J(x,\ y)$ 及 $F(x,y)$，使得

$$dF(x,\ y)\equiv J(x,\ y)[M(x,\ y)dy+N(x,\ y)dy],$$

则 $J(x,\ y)$ 称为这个方程的**积分因子**．这个方程的通解便可写成

$$F(x,y)=\text{常数}.$$

（十）克勒罗全微分方程条件

特别，当 $J(x,\ y)=1$ 时，克勒罗(A. C. Clairaut)得到：$F(x,y)$ 存在使

$$dF\equiv M(x,\ y)dy+N(x,\ y)dy=0$$

的充要条件为

$$\frac{\partial M}{\partial y}\equiv\frac{\partial N}{\partial x}.$$

实域解析解的成果，大体上便是上述这些可积形式．这些成果在天文、力学等方面，已经取得了很多重要应用(包括二体问题的彻底解决)．但是，理论基础则有待于下一阶段来完成．

## 二、常微分方程复域解析理论

十九世纪初期，法国数学家柯西(A. L.Cauchy)建立了现代分析概念，并引入了复数域，数学得到了一次划时代的发展．

柯西将这一概念运用到微分方程，开创了常微分方程的解析理论这一分支.

给定一个复域的微分方程

$$\frac{dw}{dz}=f(w,\ z)=\sum_{0<l,m}a_{l,m}z^{l}w^{m},$$

方程右边的幂级数在 $|z|\leqslant r_1$、$|w|\leqslant\rho_1$ 中收敛. 要研究 $z=0$ 时，$w=0$ 的解析解 $w=\sum\limits_{m>1}b_mz^m$ 的存在性.

这里，问题的提法已经不是求有解析表达式的实域中的通解，而是求幂级数形式的复域中的特定的($w=0$，$z=0$)定解. 因此，这种问题又称**定解问题**，或**柯西问题**. 常微分方程中，通常称为**初值问题**，以别于“通解问题”和后面要提到的“边值问题”.

问题的解法分为两个步骤：

第一步，先形式地求出 $b_m$，不管这个级数的收敛性；第二步，确定一个半径，以保证其收敛性，完成解的存在性.

将 $w=\sum\limits_{m>1}b_mz^m$ 代入方程，比较 $z$ 的同次幂：

$$\sum_{m>1}b_mmz^{m-1}=\frac{dw}{dz}=\sum_{l,m>0}a_{lm}z^{l}\Big(\sum_{n>1}b_nz^n\Big)^m$$

$$=a_{00}+a_{10}z+a_{01}b_1z+z^2+\cdots\cdots.$$

由此，有 $z$ 的同次幂的系数关系为

$$b_1=a_{00},$$

$$2b_2=a_{10}+a_{01}b_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

由此即有关系，

$$b_n=P_n(a_{j,k}),\quad 其中\ j+k<n.$$