

太空飛行 初等數學

青年科學知識叢書15

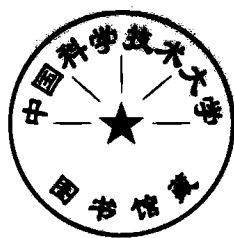
白光弘 著

幼獅文化事業公司印行

4
91

太空飛行初等數學

白 光 弘 著



幼獅文化事業公司印行

行政院新聞局核准登記證局版臺業字第〇〇〇號

著者：白 光 弘

印行者：幼獅文化事業公司

臺北市漢中街五十一號
臺北市延平南路七十一號
郵政劃撥二七三七號



定價：三十六元

中華民國

五十八年 二月初版
六十八年 二月再版

序

晚近歐美各國科學突飛猛進，自其研究領域言，由機械而電子核子，由征服地球而征服太空，成果輝煌，呈現空前異彩。我民族智慧卓越，往古之成就亦高，徒以乏人提倡，迄今遂顯然落後遠甚。本公司基於國家及青年的需要，特於五十五年聘請國內名教授執筆，出版青年科學知識叢書一套十本，內容着重核子及太空科學方面知識介紹，發行以來深獲好評，茲為推廣研究範圍起見，特再就各種科學基本原理配合實用技術之介紹為重點，續出該項叢書第二輯共計十二本，仍由國內權威教授負責撰著，以深入淺出筆調，達成言簡意賅之目的，篇幅力求濃縮內容務求精湛，相信各書行世以後，對於有志科學研究青年當大有貢獻也。

幼獅文化事業股份有限公司 五十七年十月

序 言

晚近太空探險的野心及相關科學的進展一日千里。遠在公元1687年，牛頓 (Isaac Newton) 就已發現了一些有關運動的三定律。刻卜勒 (Johann Kepler) 亦根據許多觀測資料導出了太陽系行星運動的三定律。公元 1920 年，美國之郭達博士 (Dr. Robert H. Goddard) 及德國的赫曼奧白斯 (Herman Oberth) 對於高空火箭的研究做了先驅工作。直到1942年，德國人發射了第一具 V-2 火箭。接著科學小說的作者又寫了無數的故事並假想太空旅行的種種奇觀。

美國於1955年發表了前鋒衛星計劃 (Vanguard Satellite Program) 以資國際地球物理學年 (International Geophysical year) 之部分貢獻。1957年10月4日，蘇俄發射了第一枚人造衛星史潑尼一號 (Sputnik I)，於是開啓了太空時代而激烈的美蘇太空競爭從此開始。美國航空暨太空總署 (National Aeronautics and Space Administration) 於1958年10月1日宣佈成立。從此以後，已有數百枚高空火箭及人造衛星被發射，為登陸月球的準備計劃又成立。同時對於太陽系或更遠太空的探險又著手進行。人類終於越過了空間的邊疆，不再滿足於現在生存的空間，大大的改變我們對生活的觀念及方法。

例如人類的旅行，自從步行，驛馬車，火車，汽車及海上輪

船均不能離開地球表面。即使最新的噴射客機雖然在一萬呎上空飛行，就無窮遠之太空而言，祇不過是在大氣圈之最下層沿地球表面飛航而已。但太空飛行的誕生對人類確實帶來了無比的興奮和挑戰。人類已能駕駛太空船在高高太空環繞地球，太空探索可能達到月球，甚至於太陽系的其他行星。

先進國家已跨過了太空時代的門檻，而正邁向於無止境的外太空探測工作。今後如何更迅速，如何更廣泛來推進太空探險工作，全靠我們如何迅速地去獲得有關太空知識及技術。

有志的青年朋友們！不要以為晚來到世界一步，於是認為本來應由自己發現的公理，定理等皆由像牛頓，愛因斯坦等前輩發現了。太空時代的晚近發展，已引起教師們及對數學有興趣的人廣泛注意。天賦具數學才能的人在堆理與結構以及其他方面均有甚多的幫助。更進一步的，如果我們知道些數學在實際上的應用，那麼對數學將會發現更多的奧妙。

幼獅文化事業公司，囑本人編著「太空飛行初等數學」一書。本書內容淺顯，惟因課餘從事編著，或有誤謬之處，尚希賜正。此小冊子倘能引起高中青年朋友們興趣，並對太空飛行之初步知識有所理解，本人深感謝意。

白 光 弘 謹識

民國五十七年初夏

於國立臺灣大學電波研究室



作者白光弘先生

臺灣省臺南市人，現年四十八歲，臺灣省立臺南工學院畢業。曾任中央研究院國際大地測量及地球物理聯合會委員，國際科學無線電聯合會中國委員會委員，美國科羅拉多大學電機系客座教授。並曾參加國際性無線電聯合大會、人造衛星及學術會議等多次。現任國立臺灣大學電機系教授兼電波研究室主任。前後發表太空通訊等著作多種。

目 錄

一、運動，力學	1
(一) 直線運動	1
(二) 牛頓之運動定律	5
(三) 自由落體，重力加速度	10
(四) 萬有引力定律	12
(五) 圓週運動	16
問 題 1—10	
二、太空之基本測量	23
(一) 自然界的測量	23
(二) 地球的測量	30
(三) 水平距離的測量	35
問 題 1—10	
三、太空的物理性質	44
(一) 大氣層	44
(二) 太空障礙區	51
(三) 人類之探險領域——太陽系	53
(四) 泰達士波德學說	55
(五) 刻卜勒行星三定律	57
(六) 軌道速度	61

(七) 太陽能的根源.....	63
(八) 宇宙.....	64

問 題 1—15

四、太空艙之發射.....	70
---------------	----

(一) 射進軌道.....	70
(二) 衝力.....	71
(三) 速度與高度.....	76
(四) 比衝擊.....	79
(五) 總撞擊.....	81
(六) 火箭之最大速度.....	81
(七) 地球引力之阻滯作用.....	84
(八) 多節火箭.....	85

問 題 1—15

五、軌道中之物體.....	90
---------------	----

(一) 物體如何停留於軌道上.....	90
(二) 繞地球之落下.....	92
(三) 圓形軌道之速度.....	93
(四) 圓軌道之週期.....	95
(五) 同轉軌道.....	97
(六) 軌道過程.....	100
(七) 橢圓軌道之週期.....	106
(八) 逃逸速度.....	109

問 題 1—15

六、太空飛行	117
(一) 太空飛行與大氣層中飛行之差異	117
(二) 大氣層阻力	118
(三) 無重量狀態	119
(四) 人工引力	121
(五) 變更軌道	123
(六) 會合與連合	124
(七) 太空船之追蹤	126
(八) 相對論效應	128

問 題 1—10

七、附錄

(一) 天文圖表	133
(二) 太陽系各行星有關常數	135

太空飛行初等數學

一、運動、力學

〔一〕直線運動

因爲各類的運動在初等物理學的課本上已有詳細的導論，我們將不再作系統的解釋與導出這些運動的基本原則。在這一節內，對這些觀念概略加以敘述並以實際數學說明。

速度與速率，大都數人僅有這樣一種概念。那就是說每單位時間內的移位，雖然物理學家通常將速度與速率加以區別，但在本書中，我們將這兩個名詞的意義視爲相同。假設我們開車在3小時內到150公里，我們知道平均速度爲每小時 $150/3 = 50$ 公里。這數式的關係可用下列方程式表示。

$$v_a = \frac{s}{t} \quad (1)$$

v_a 表示平均速， s 度表示距離，而 t 爲時間。例如一架噴射客機自臺北至日本東京在3小時內飛行2400公里，那麼飛行平均速度爲每小時 $2400/3 = 800$ 公里。當物體靜止時，其速度等於零。假使該物體要運動，必須加速。速度的變更稱爲加速度，而加速度可爲正或爲負。負加速度可將速度減慢。設加速度爲 a ，同時以 v_0 與 v 代表初速度與末速，且加速的時間

爲 t ，則得下列關係式。

$$a = \frac{v - v_0}{t} \quad (2)$$

或 $v = v_0 + at$

例如一架飛機每小時以 400 公里速度飛行，然後在 6 分鐘內速度增加至每小時 700 公里，則此飛機每小時增加了 300 公里的速度。換句話說它得每小時每分鐘 50 公里的加速度。假設初速等於零，則上式成爲 $a = v/t$ ， v 表示末速度，在此我們以 a 爲加速度與平均速度 v_a 區別。許多的問題要求末速，此時我們可以將上式 $a = v/t$ 改爲

$$v = at \quad (3)$$

譬如一輛汽車在 10 分鐘內得每小時每分鐘 12 公里的加速，那麼 10 分鐘後，汽車的速度將達每小時 120 公里的速度。

欲求一物體在一定時間內以一定速度移動的距離，可用方程式(1)而得其解。

$$s = v_a t \quad (4)$$

例如一架噴射機以每小時 600 公里飛行 2 小時，則移動的距離是 $600 \times 2 = 1200$ 公里。現在讓我們重新考慮一物體初時靜止然後以一定加速度直到終速 v ，那麼此段時間內平均速度爲 $0 + v/2$ ，或等於 $v_a = \frac{1}{2}v$ 但由 (3) 式知 $v = at$ 故得

$$\frac{1}{2}v = \frac{1}{2}at, \text{ 將此式代入(4)式則得 } s = v_a t = \frac{1}{2}at(t)$$

$$\text{或} \quad s = \frac{1}{2} at^2 \quad (5)$$

由方程式(3)知, $t = \frac{v}{a}$, 將此值代入(5)式可得

$$s = \frac{1}{2} a \left(\frac{v}{a} \right)^2$$

$$\text{或} \quad \left. \begin{aligned} s &= \frac{v^2}{2a} \\ v^2 &= 2as \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

假使初速度等於 v_0 , 平均速度則等於 $v_a = \frac{v_0 + v}{2}$,

$$\text{那麼由(4)式得} \quad s = v_a t = \frac{v_0 + v}{2} t \quad (7)$$

將(2)式代入(7)式可得

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad (8)$$

從(2)式求時間 t 可得 $t = \frac{v - v_0}{a}$ 將此代入(7)式則得

$$v^2 = v_0^2 + 2as \quad (9)$$

[例題]

有一輛正向東方行駛的汽車以均一的減速從每小時45英里到每小時30英里。設在此時間內所行駛的距離等於 264 英尺。

(a) 試求該汽車的加速度和其方向。

改寫(9)式得 $a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s}$ ，因264英尺等於0.05英里

里故得 $a = \frac{(30)^2 - (45)^2}{2 \times 0.05} = -1.125 \times 10^4$ 英里/小

時。顯然地，加速度爲負號，故其方向爲正西方。

(b) 試求該汽車減速多少時間。

由(7)式得 $t = \frac{2s}{v_0 + v} = \frac{2 \times 0.05}{45 + 30} = \frac{1}{750}$ 小時
= 4.8 秒。

(c) 假使該汽車從初速度 45 英里/每小時開始減速一直到停車爲止。試求需要費多少時間。

$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{0 - 45}{-1.125 \times 10^4} = 4 \times 10^{-3}$ 小時 = 14.4 秒。

(d) 試求該汽車從初速度45英里 / 小時開始到停車爲止所行駛的全距離。

由(8)式得 $s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$
 $= (45 \times 4 \times 10^{-3}) - \frac{1}{2} (1.125 \times 10^4) \times (4 \times 10^{-3})^2 = 0.09$ 英里 = 475 英尺

加速度與速度的區別，凡是開汽車的人都會了解。當汽車靜止時，我們踏加速板就產生足夠大的力而可開動汽車。如到所需速度後，放開加速板而讓汽車僅在該速度下克服各項摩

擦力。這些摩擦包括：車胎與地面的摩擦，機械摩擦與空氣的阻力等等。假使沒有這些阻力，汽車的運動將繼續下去而不再消耗功能。

物體在太空中飛行時，亦受重力的影響。因此，祇要有足夠的動力能克服大氣的阻力而到達大氣層之上，那麼飛行物體將在軌道上繼續運行而不再消耗燃料。由此可見，當人造衛星上軌道後所有推進火箭均已脫落而讓衛星在軌道上飛行。

[二]牛頓之運動定律：

公元1686年牛頓 (Isaac Newton) 在 “The Mathematical principles of Natural Science” 書上發表了有關力學的三大定律，而構成了一般力學的基本理論。今日太空飛行的基礎極廣泛，但尚離不開牛頓定律。

(a) 第一定律：物體若不受外力之作用，則靜止的常靜止，運動的常以同樣運動，即不會改變原有之狀態。換句話說，物體有維持其已有之運動或靜止狀態之特性。故第一定律又稱為慣性定律。

(b) 第二定律：物體受 F 牛頓之力作用時，不論物體原來之狀態如何，必就力之方向生 a 公尺/秒² 之加速度。設物體之質量為 m 公斤，則得

$$F = ma \quad (10)$$

(c) 第三定律：作用力和反作用力，其大小相同。方向相反。

假設質量 m 之物質受一力 f 之作用產生加速度 a 今又有相同質量 m 之物質受另一力 F 之作用而產生加速度 A 。依據(10)式可得

$$f = ma \quad (10-a)$$

$$F = mA \quad (10-b)$$

若以(10-b)除(10-a)得

$$\frac{f}{F} = \frac{a}{A} \quad (11)$$

已知作用力 F 及加速度 A ，則得由另一作用力 f 產生的加速度 a 物體的重量 (W) 是一種的力，亦就是由地球所影響的重力，而它的方向是向地心。重量的單位與作用力相同，以公斤或磅表示。今設質量 m 之一物體從高處使它自由落下，這樣由地心引力作用於重量 W ，而產生加速度 g 應用牛頓第二定律得

$$W = mg \quad (12)$$

由(10-a)及(12)兩式可得

$$\frac{f}{W} = \frac{a}{g}, \text{ 或 } f = \frac{W}{g} a \quad (13)$$

式中 f = 作用力，單位為牛頓

W = 重量，單位為公斤

a = 加速度，單位為公尺/秒²

g = 重力加速度，單位為公尺/秒²

經科學者們詳細測量的結果得知，地面上重力加速度(自

由落體的加速度)的平均值是32.2英尺/秒²或9.8公尺/秒²,而隨各地而異。地球緯度45度上之重力隨高度之變化示於第一表。

第一表

高 度(英尺)	g (英尺/秒 ²)	高 度(公尺)	g(公尺/秒 ²)
0	32.174	0	9.806
1,000	32.170	1,000	9.803
4,000		4,000	9.794
16,000	32.124	8,000	9.782
60,000	31.988	16,000	9.757
100,000	31.865	32,000	9.708
500,000	30.631	100,000	9.598

地球海面上的重力值隨緯度之變化示於第二表。

緯 度	英尺/秒 ²	公尺/秒 ²
0°	32.0878	9.78039
10°	32.0929	9.78195
20°	32.1076	9.78641
30°	32.1302	9.79329
40°	32.1578	9.80171
50°	32.1878	9.80171