张宇考研数学系列丛书
全国著名考研辅导机构推荐用书

理工社®

2014考研数学
10年真题分析与演练
（答案详解）

■ 主　编　张　宇　姜晓千　刘晓艳
■ 副主编　刘国辉　张　新　杨　超　方　浩　吴　睿

试卷与答案的完美结合

题题精解，有分析，有评注，多种解法，多种思路
章章总结，内容系统、准确，与考研命题思路吻合

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

目　录

第一部分　高等数学

第二部分　线性代数

第三部分　概率论与数理统计

第一部分

高等数学

第一章　函数、极限、连续

真题精讲

1.【答案】应选(A).

【解析】由 $f(x)$ 的表达式可知,其在$(-\infty,+\infty)$内除点 $x=0,x=1,x=2$ 外处处有定义.

因为 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\infty,\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\infty,\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\infty,\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\infty$

所以,$f(x)$ 在区间$(0,1),(1,2),(2,3)$内都是无界的.

又因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|\cdot\sin(x-2)}{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin(x-2)}{(x-1)(x-2)^2}=-\dfrac{1}{4}\sin 2$,

$\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{|x|\cdot\sin(x-2)}{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)}=-\dfrac{1}{18}\sin 3$,

所以,$f(x)$ 在区间$(-1,0)$内是有界的,因此选(A).

评注　本题是对函数有界性的判定方法的考查,且主要是考查下面的一个基本结论:若 $f(x)$ 在(a,b)内连续,且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 都存在,则 $f(x)$ 在(a,b)内必有界.

2.【答案】应填 1.

【解析】由 $y-x=e^{x(1-y)}$ 知,当 $x=0$ 时,$y=1$,

$$\lim_{n\to\infty}n\left(f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=f'(0),$$

方程两边取对数 $\ln(y-x)=x(1-y)$,

两边同时对 x 求导,得 $\dfrac{1}{y-x}(y'-1)=(1-y)-xy'$,

将 $x=0,y=1$ 代入上式,得 $f'(0)=1$.

评注　将数列极限转化为函数极限来计算.

3.【答案】应选(A).

【解析】因为 $x=0$ 时，$y=1$ 即 $f(0)=1$，

又 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(\dfrac{2}{n}\right)-1\right]=\lim\limits_{n\to\infty} 2\cdot\dfrac{f\left(\dfrac{2}{n}\right)-f(0)}{\dfrac{2}{n}-0}=2f'(0)=2y'|_{x=0}$，

对等式 $\cos(xy)+\ln y-x=1$ 两边求导，得 $-\sin(xy)\cdot y+\dfrac{1}{y}\cdot y'-1=0$，

将 $x=0,y=1$，代入上式得 $y'=1$，

故选(A).

评注

将数列极限转化为函数极限.

4.【答案】应填 -2.

【解析】曲线 $y=x^2-x$ 在点 $(1,0)$ 处的切线斜率是 $y'|_{x=1}=(2x-1)|_{x=1}=1$.

因为曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x^2-x$ 在点 $(1,0)$ 处有公共切线，所以 $f(1)=0, f'(1)=1$，则

$$\lim_{n\to\infty} nf\left(\frac{n}{n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{-2n}{n+2}\cdot\frac{f\left(1-\dfrac{2}{n+2}\right)}{-\dfrac{2}{n+2}}\right]=-2\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(1-\dfrac{2}{n+2}\right)-f(1)}{-\dfrac{2}{n+2}}$$

$$=-2f'(1)=-2.$$

5.【解析】(1) 因为 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}, x>0$，所以 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$.

令 $f'(x)=0$ 得 $x=1$，$x=1$ 是唯一驻点，

故当 $0<x<1$ 时，有 $f'(x)<0$；当 $x>1$ 时，有 $f'(x)>0$.

所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 极小值点，即最小值点，故最小值为 $f(1)=1$.

(2) 由(1) 得 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_n}\geqslant 1$，且已知条件有 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$，可知

$\dfrac{1}{x_n}>\dfrac{1}{x_{n+1}}$，即 $x_n<x_{n+1}$，所以数列 $\{x_n\}$ 单调递增.

又由 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$，可得 $\ln x_n<1, 0<x_n<\mathrm{e}$，所以数列 $\{x_n\}$ 有上界.

由单调有界数列必有极限，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，设为 A.

对于 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$，两边取极限得 $\ln A+\dfrac{1}{A}\leqslant 1$.

又 $\ln A+\dfrac{1}{A}\geqslant 1$，所以，$\ln A+\dfrac{1}{A}=1$.

又由(1) 可知 $A=1$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$.

评注　本题考查的知识点是"单调有界数列必有极限". 这个知识点首次出现大题.

6.【答案】应填$\frac{\pi}{4}$.

【解析】这是 n 项和数列的极限,将其作适当变形,可以考虑用定积分的定义求解:

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{1+n^2}+\frac{2^2}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{n^2}{n^2+n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}\left[\frac{1}{\frac{1}{n^2}+1}+\frac{1}{\left(\frac{2}{n}\right)^2+1}+\cdots+\frac{1}{\left(\frac{n}{n}\right)^2+1}\right]$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+n^2}\mathrm{d}n$$

$$=\arctan n\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

7.【答案】应选(C).

【解析】由条件可知,要在 x 充分大时比较 3 个函数的大小关系,需与函数极限的不等式性质相结合以求出结论:当 $x>1$ 时,$f(x)=\ln^{10}x,g(x)=x$ 与 $h(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{10}}$ 都是正函数,且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^{10}x}{x}=10\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^9 x}{x}=\cdots=10!\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{h(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^{\frac{x}{10}}}=10\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{x}{10}}}=0.$$

于是,当 x 充分大时,$f(x)<g(x)$ 与 $g(x)<h(x)$ 都成立,进而当 x 充分大时有 $f(x)<g(x)<h(x)$ 成立,故(C)为正确答案.

评注　求解本题的依据是函数极限的不等式性质:

若函数 $F(x)>0,G(x)>0$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{G(x)}=\alpha<1$,则存在 $x_0>0$,使得当 $x>x_0$ 时,$\frac{F(x)}{G(x)}<1$ 成立,即当 x 充分大时必有 $F(x)<G(x)$ 成立.

8.【答案】应选(B).

【解析】根据题设可知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界,则若 $\{x_n\}$ 单调,则 $f(x)$ 必单调,由数列极限存在准则二:单调有界数列必有极限,即 $\{f(x_n)\}$ 收敛. 故选(B).

评注

本题还可以举反例：

(1) 取 $f(x)=\begin{cases}-1, x<0,\\ 1, \quad x\geqslant 0,\end{cases}$

$x_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$，则

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，且 $f(x_n)=\begin{cases}-1, n \text{ 为奇数},\\ 1, \quad n \text{ 为偶数},\end{cases}$ 于是(A) 错误.

(2) 取 $f(x)=\arctan x, x_n=n$，于是(C)、(D) 错误.

9.【答案】 应选(D).

【解析】 根据数列极限的不等式的保号性：设数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$均为收敛数列，若存在正数 N，当 $n>N$ 时有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}b_n$，则有 $a_n\leqslant b_n$，可知要使数列极限的不等式成立，必须满足一个前提：$n>N$，即 n 要充分大. 因而(A)，(B) 两项不可能得到对"任意 n"成立的结论，故(A)，(B) 错误.

(C) 项：当 $n\to\infty$ 时，a_n 是无穷小，c_n 是无穷大，两者的乘积 $a_n\cdot c_n$ 是 $0\cdot\infty$ 型的未定式，极限可能存在也可能不存在. 故(C) 项错误.

(D) 项：当 $n\to\infty$ 时，b_n 不是无穷小，c_n 是无穷大，因而两者的乘积 $b_n\cdot c_n$ 不是未定式. 根据数列极限的四则运算法则，一个极限存在，另一个极限不存在是得不出乘积 b_nc_n 的极限存在的结论. 故可知：极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在，故(D) 正确.

注意

(1) 本题还可以举反例：关于(A)，(B)，(C) 三项均可举出反例：

(A) 中取 $a_n=\dfrac{2}{n}, b_n=\dfrac{n-1}{n}$，当 $n=1$ 时，$a_1=2>0=b_1$；

(B) 中取 $b_n=\dfrac{n+1}{n}, c_n=n$，当 $n=1$ 时，$b_1=2>1=c_1$；

(C) 中取 $a_n=\dfrac{1}{n}, c_n=n, a_n\cdot c_n=1$，即 $n\to\infty$ 时，$a_n\cdot c_n\to 1$.

(2) 关于 ∞ 的确定型还有：

$$\infty+\infty=\infty,$$
$$\infty\cdot\infty=\infty,$$
$$\infty\pm(\text{有界})=\infty,$$

但是，$\infty\cdot$(有界) 必定是 ∞.

10.【答案】 应填 0.

【解析】 因为 $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，

所以当 $x\to+\infty$ 时，$|\sin x+\cos x|\leqslant\sqrt{2}$，即 $\sin x+\cos x$ 有界.

又因为 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+2x}{2^x\ln 2+3x^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x+2}{2^x\ln^2 2+6x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{2^x\ln^3 2+6}=0.$$

所以 $\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}$ 是当 $x\to+\infty$ 时的无穷小.

于是 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=0.$

评注

本题主要考查无穷小量的一个重要性质：有界变量与无穷小量的乘积是无穷小量.

11.【答案】应选(D).

【解析】因为 $$\lim_{x\to0}\frac{x-\arctan x}{x^k}=\lim_{x\to0}\frac{x-\left(x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)}{x^k}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}x^3-o(x^3)}{x^k}=c,$$

所以 $k=3,c=\dfrac{1}{3}$，

故选(D).

评注

用带皮亚诺的泰勒公式解题，即 $\arctan x=x-\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$

12.【答案】应填 $e^{\frac{1}{2}}$.

【解析】

$$\lim_{x\to0}\left(2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left[1+\left(1-\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{1-\frac{\ln(1+x)}{x}}}\right]^{\frac{1}{x}\left(1-\frac{\ln(1+x)}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\left(1-\frac{\ln(1+x)}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\left(1-\frac{\ln(1+x)}{x}\right)},$$

其中，$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(1-\frac{\ln(1+x)}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{2x(1+x)}=\frac{1}{2}.$$

故原式 $=e^{\frac{1}{2}}$.

评注

本题是 1^∞ 型未定式极限，用幂指函数对数化的方法解题.

13.【解析】方法一： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+2\sin x}}-1}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{1+2\sin x}}{2x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+2\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+2\sin x}}}{2}$$

$$=-\frac{1}{2}.$$

方法二：先将分子有理化：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-2x-x^2}{x^2(\sqrt{1+2\sin x}+x+1)}.$$

由于$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{2}=0$，

所以原式 $=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2(\sin x-x)}{x^2}-1\right]=-\dfrac{1}{2}$.

方法三：写出$\sqrt{1+2\sin x}$ 的 2 阶泰勒公式：

$$(1+2\sin x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}(2\sin x)+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}(2\sin x)^2+o(x^2)$$

$$=1+\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 x+o(x^2),$$

所以
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x-\frac{1}{2}\sin^2 x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$=-\frac{1}{2}.$$

评注 在计算极限的过程中，部分同学没有及时地应用等价无穷小量替换，使得解题过程过于繁杂而最终得不到正确答案.

14.【答案】应填$\dfrac{3}{2}$e.

【解析】方法一：因为 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\cos x}\left[e^{1-\cos x}-1\right]}{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}$，

又当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\to 0$，即 $e^{1-\cos x}-1\sim 1-\cos x$.

进而 $1-\cos x\sim \dfrac{x^2}{2}$，且 $(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1\sim \dfrac{1}{3}x^2$，

所以 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\cos x}\cdot(1-\cos x)}{\dfrac{1}{3}\cdot x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e\cdot\dfrac{1}{2}x^2}{\dfrac{1}{3}x^2}=\dfrac{3}{2}e.$

方法二：由洛必达法则，得

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos x}\sin x}{\dfrac{1}{3}(1+x^2)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x}$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}e^{\cos x}(1+x^2)^{\frac{2}{3}}=\frac{3e}{2}.$$

评注

(1) 分式中，在分子或分母的位置上如果出现两个幂指函数相减的情况，应按以下方法处理：

$$e^{f(x)}-e^{g(x)}=e^{g(x)}\left[e^{f(x)-g(x)}-1\right],$$

又若当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，$f(x)-g(x)\to 0$，则

$$e^{f(x)-g(x)}-1\sim f(x)-g(x).$$

(2) 对于 $(1+x)^{\mu}-1\sim\mu x\quad(x\to 0)$ 这种形式的等价无穷小替换，在考试中往往将其写成根号形式. 此时需要作适当转化变为标准形式. 如本题中 $\sqrt[3]{1+x^2}-1=(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1\sim\dfrac{x^2}{3}\quad(x\to 0)$.

15.【解析】 因为 $\ln\dfrac{\sin x}{x}=\ln\left[1+\left(\dfrac{\sin x}{x}-1\right)\right]$

又当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{\sin x}{x}-1\to 0$，于是根据等价无穷小替换有

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+\left(\dfrac{\sin x}{x}-1\right)\right]}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x}{x}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}$$

注意，此时有两种方法求解：

方法一：洛必达法则

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}$$

又当 $x\to 0$ 时，$\cos x-1\sim-\dfrac{x^2}{2}$，于是

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{6}.$$

方法二:泰勒公式

因为当 $x\to 0$ 时,$\sin x-x\sim-\frac{1}{6}x^3$,所以

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}x^3}{x^3}=-\frac{1}{6}.$$

评注

(1) 本题涉及的等价无穷小有:当 $x\to 0$ 时

①$\ln(1+x)\sim x$;

②$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$;

③$x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$.

(2) 对本题的处理既可以用洛必达法则,也可以用泰勒公式,但是用泰勒公式会更简洁.这一点对相同类型的题都适用.

16.**【解析】**该极限的未定式属 $\frac{0}{0}$ 型,将其作适当变形.

方法一:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left[\frac{3+(-1+\cos x)}{3}\right]^x-1}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{-1+\cos x}{3}\right)^x-1}{x^3}$$

因为当 $x\to 0$ 时,$\frac{-1+\cos x}{3}\to 0$,于是利用等价无穷小替换有

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{-1+\cos x}{3}}{x^3}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{-1+\cos x}{x^2}$$

又 $x\to 0$ 时,$-1+\cos x\sim-\frac{1}{2}x^2$,于是

$$I=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{6}.$$

方法二:原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2+\cos x)-\ln 3}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2+\cos x}\cdot(-\sin x)}{2x}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{1}{2+\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}=-\frac{1}{6}.$$

方法三: 原式 $=\lim_{x\to0}\frac{e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1}{x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\frac{1}{6}.$$

方法四: 原式 $=\lim_{x\to0}\frac{\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x\right]'}{3x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x}{2+\cos x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{(2+\cos x)\ln\frac{2+\cos x}{3}-x\sin x}{3x^2}$$

$$=\frac{1}{9}\lim_{x\to0}\frac{-\sin x\cdot\ln\frac{2+\cos x}{3}-\sin x-\sin x-x\cos x}{2x}$$

$$=-\frac{1}{18}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\ln\frac{2+\cos x}{3}+\frac{2\sin x}{x}+\cos x\right)$$

$$=-\frac{1}{6}.$$

评注

(1) 本题主要考查两个等价无穷小替换:

① 当 $x\to0$ 时,$(1+x)^\mu-1\sim\mu x$.

② 当 $x\to0$ 时,$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$.

(2) 在很多情况下,等价无穷小并不是前面所列举的标准形式.此时需要往标准形式转化,作适当变形即可.

17.【答案】 应选(C).

【解析】 因为 $\cos x-1=x\cdot\sin\alpha(x)$,$\cos x-1\sim-\frac{1}{2}x^2$,

所以 $x\cdot\sin\alpha(x)\sim-\frac{1}{2}x^2$,进而 $\sin\alpha(x)\sim-\frac{1}{2}x$,

又 $\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$，所以 $\alpha(x)\sim-\dfrac{1}{2}x$.

所以 $\alpha(x)$ 与 x 同阶但不等价的无穷小.

故选(C).

评注 本题考查无穷小比较的定义.

18.【解析】

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\cos2x\cos3x}{ax^n}=\lim_{x\to0}\frac{1-\dfrac{\cos6x+\cos4x+\cos2x+1}{4}}{ax^n}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{3-\cos6x-\cos4x-\cos2x}{4ax^n}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{6\sin6x+4\sin4x+2\sin2x}{4anx^{n-1}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{36\cos6x+16\cos4x+4\cos2x}{4an(n-1)x^{n-2}}$$

所以 $n-2=0$，即 $n=2$ 时，上式极限存在.

当 $n=2$ 时，由题意可知 $\dfrac{36+16+4}{4a\cdot2\cdot1}=1\Rightarrow a=7$，

所以，$n=2,a=7$.

评注 本题考查等价无穷小的定义.

19.【答案】应选(D).

【解析】可以举反例，如：令 $x^2=o(x),x^3=o(x^2)$，但 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x^3}{x^2}=1$，即 $o(x)+o(x^2)\neq o(x^2)$.

故选(D).

评注 本题考查的是无穷小的运算法则.

20.【答案】应选(C).

【解析】本题考查的是由等价无穷小的关系确定未知参数.

设 $g(x)=cx^k$，由题设及等价无穷小的定义，可知

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{3\sin x-\sin3x}{cx^k}=1,$$

又由泰勒公式展开式得

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3),$$

$$\sin 3x = 3x - \frac{(3x)^3}{3!} + o(x^3),$$

于是$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(3x - \frac{x^3}{2}\right) - \left(3x - \frac{9}{2}x^3\right) + o(x^3)}{cx^k}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4x^3}{cx^k} = 1.$$

即 $k = 3, c = 4$，选(C).

评注

用带佩亚诺余项的泰勒公式来求函数的极限具有普遍适用性，而且能快速简化计算，现将常见的几个总结如下：

(1)$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + o(x^3)$；

(2)$\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + o(x^3)$；

(3)$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + o(x^2)$；

(4)$\ln(1+x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^3)$；

(5)$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + o(x^3)$.

21.【答案】应选(A).

【解析】本题考查的是由等价无穷小的关系来确定未知参数.

方法一：由题设及等价无穷小的定义，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \sin ax}{x^2\ln(1-bx)} = 1, \qquad ①$$

当 $x \to 0$ 时，$\ln(1-bx) \sim (-b)x, (b \neq 0)$

$$\sin ax = ax - \frac{(ax)^3}{3!} + o(x^3),$$

于是$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-a)x + \frac{a^3}{6}x^3 + o(x^3)}{x^2\cdot(-bx)}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1-a) + \frac{a^3}{6}x^2}{-bx^2}, \qquad ②$$

根据无穷小比较的判定方法：

因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$，且$\lim\limits_{x\to 0}(-bx^2) = 0$，则$\lim\limits_{x\to 0}(1-a) + \dfrac{a^3}{6}x^2 = 0$，即 $a = 1$.

将 $a = 1$ 代入 ② 式，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^2}{-bx^2}=-\frac{1}{6b}=1,$$

即 $b=-\frac{1}{6}$.

因此正确答案为(A).

方法二：因为 $x^2\ln(1-bx)\sim -bx^3(x\to 0)$，利用洛必达法则得

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2}.$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$，所以

$$\lim_{x\to 0}(1-a\cos ax)=1-a=0,\text{即 } a=1,$$

从而 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{-3bx^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{-3bx^2}=-\frac{1}{6b}=1$,

即 $b=-\frac{1}{6}$.

评注

(1) 在方法一的 ① 式中，进行等价无穷小替换后，虽然极限的未定式是 $\frac{0}{0}$ 型，而且极限也存在，但是不能使用洛必达法则，

即 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 这个公式不能用！

因为如果 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在也不为 ∞，是不能推出 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$ 不存在也不为 ∞ 的，简单地说就是：

对于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$，右存在则左存在，但左存在并不意味着右一定存在. 这是一个很细致、很隐蔽的问题，稍不注意就可能出错.

(2) 对本题而言，可以通过泰勒公式和洛必达法则两种方法进行解答.

(3) 本题方法一还用到无穷小比较的一个重要结论：

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=a,a\neq\infty$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$.

22.【答案】应选(B).

【解析】本题考查等价无穷小的定义：

(A) 项中，$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1-e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=-\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=-1$;

(B) 项中，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1$；

(C) 项中，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}$；

(D) 项中，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}=0$.

根据等价无穷小的定义，选(B).

评注

在本题中，当 $x\to 0^+$ 时，有如下等价无穷小：

(1)$1-e^{\sqrt{x}}=-(e^{\sqrt{x}}-1)\sim-\sqrt{x}$；

(2)$\ln(1+\sqrt{x})\sim\sqrt{x}$；

(3) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1=(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}-1\sim\dfrac{\sqrt{x}}{2}$；

(4)$1-\cos\sqrt{x}\sim\dfrac{1}{2}(\sqrt{x})^2=\dfrac{x}{2}$.

23.【答案】应填 $e^{-\sqrt{2}}$.

【解析】这是 1^∞ 未定式，可以向重要公式转化.

方法一：因为 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}[1+(-1+\tan x)]^{\frac{1}{-1+\tan x}\cdot(-1+\tan x)\cdot\frac{1}{\cos x-\sin x}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-1+\tan x}{\cos x-\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos x\cdot(\cos x-\sin x)}}=e^{-\sqrt{2}}.$$

方法二：设 $y=(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}$，则

$$\ln y=\frac{\ln(\tan x)}{\cos x-\sin x}=\frac{\ln(\sin x)-\ln(\cos x)}{\cos x-\sin x},$$

所以 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\ln y=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cot x+\tan x}{-\sin x-\cos x}=-\sqrt{2}$，从而 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}y=e^{-\sqrt{2}}$.

评注

(1) 对于极限式而言，其是 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式，如果此时运用洛必达法则，只会使计算愈加繁琐，而采用“切化弦”的方法，会使计算极大简化. 这是一个很细致的问题，稍不注意就会增加计算量.

(2) 再次强调，对于绝大多数 1^∞ 型未定式极限，都可以凑成重要公式

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

使得计算得到简化，希望大家能熟练掌握这种方法.