

力学名著译丛

# 理论流体力学

下 册

[英] H. 兰 姆 著

科 学 出 版 社

力学名著译丛

# 理论流体力学

下册

[英] H. 兰姆著

游镇雄译

---

科学出版社

1992

(京)新登字 092 号

## 内 容 简 介

原著为经典名著，自 1879 年问世以来曾多次再版。书中系统地介绍了有关经典流体动力学方面的基本理论，特别侧重于流体力学的数学理论。本书推理严谨，编写精练，应用广泛。中译本分上、下两册出版。下册包括表面波、疏密波、粘性、旋转流体等内容。

本书对于理工科大专院校流体力学和空气动力学专业的学生、研究生是一本不可多得的基础理论参考书，对于从事流体力学和空气动力学等方面的科技工作者也是一本必备的参考书。

Sir Horace Lamb, M. A., LL. D., Sc. D., F. R. S.

HYDRODYNAMICS

Sixth Edition

Cambridge at the University Press 1932

力学名著译丛

理论流体力学

下 册

[英] H. 兰姆 著

游镇雄 译

责任编辑 朴玉芬

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100707

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

\*

1992 年 1 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1992 年 1 月第一次印刷 印张：15

印数：平 1—1 000 插页：平 1 精 3

精 1—500 字数：397 000

ISBN 7-03-002497-4/O·467 (平)

ISBN 7-03-002498-2/O·468 (精)

定 价：平 装 13.40 元  
布脊精装 15.20 元

# 目 录

## 第 IX 章 表 面 波

227.	二维问题;表面条件	459
228.	驻波;流线	460
229, 230.	行波;质点的轨道. 波速;数值表. 简谐波列的能量	463
231.	叠置流体的振荡	468
232.	两股流体间界面的不稳定性	471
233, 234.	化为定常运动的技巧	474
235.	非均质液体的波动	478
236, 237.	群速度. 能量的传递	481
238—240.	Cauchy-Poisson 波动问题;由初始局部升高或局部冲量所引起的波	486
241.	关于线性介质中一个局部扰动的效应的 Kelvin 近似公式. 图线构造	500
242—246.	水流的表面扰动. 水深为有限时的情况. 河床起伏的影响	505
247.	被淹没的柱体所引起的波动	519
248, 249.	由移动着的扰动所引起的波动的一般性理论. 波阻	522
250.	有限波高的波动;恒定型的波动. 极限形状	527
251.	Gerstner 有旋波	533
252, 253.	孤立波. Korteweg 和 De Vries 的振荡波	537
254.	关于恒定型波动的 Helmholtz 动力学条件	542
255, 256.	波沿两个水平方向传播时的情况. 局部扰动的效应 移动的扰动压力的效应;波浪图案	544 550
256a, 256b.	其它形式的移动扰动. 船波. 波阻. 有限水深对波浪图案的影响	555
257—259.	有限质量液体中的驻波. 三角形截面和半圆形截面 渠道中的横向振荡	559

260, 261.	纵向振荡; 三角形截面的渠道; 边缘波.....	565
262—264.	球形液体团的振荡, 流线. 覆盖在球形核上的具有均匀深度的海洋 .....	572
265.	毛细作用. 表面条件 .....	578
266.	表面张力波. 群速度 .....	579
267, 268.	在重力和表面张力双重作用下的波动, 最小波速. 两股平行流动的公界面上的波动 .....	582
269.	局部扰动所引起的波动. 移动着的扰动的效应; 波浪和涟波 .....	587
270—272	水流的表面扰动; 正规的探讨. 钓鱼丝问题. 波纹图案 .....	589
273—274.	圆柱形液体的振荡. 射流的不稳定性 .....	597
275.	圆球形液滴和气泡的振荡 .....	601

## 第 X 章 疏 密 波

276—280.	平面波; 声速; 波系的能量 .....	604
281—284.	有限振幅的平面波; Riemann 和 Earnshaw 方法. 恒定形态的条件; Rankine 的探讨. 近似的非连续波 .....	610
285, 286.	球面波. 用初始条件来表示的解 .....	621
287, 288.	声波的普遍方程. 能量方程. 解的确定性 .....	626
289.	简谐振动. 简单源和双源. 能量的发射 .....	630
290.	Helmholtz 对 Green 定理的改编. 用源的面分布来表示速度势. Kirchoff 公式 .....	633
291.	周期性扰力 .....	637
292.	球谐函数的应用. 一般性公式 .....	639
293.	圆球形外壳中的空气的振动. 球形空气层的振动 ..	643
294.	从一个球形曲面向外传播的波动; 由侧向运动引起的衰减 .....	646
295.	空气对球摆振荡的影响; 惯性的修正; 阻尼 .....	648
296—298.	由球形障碍物所引起的声波散射. 声波对可移动的球体的冲击; 同步时的情况 .....	649
299—300.	当波长相对较大时, 由圆板、挡板上的孔隙以及由任	

	何形状的障碍物所引起的衍射 .....	656
301.	用球谱函数求解声波方程, 波阵上的条件 .....	662
302.	二维中的声波, 瞬时源的效应; 和一维情况以及三维 情况的比较 .....	665
303, 304.	简谐振动; 用 Bessel 函数所表示的解, 振荡着的柱 体, 由圆柱形障碍物所引起的声波散射 .....	669
305.	二维中长波衍射的近似理论, 由平板条和由薄隔板 上的孔隙所引起的衍射 .....	674
306, 307.	声波遇到隔栅时的反射和透射 .....	677
308.	由半无限隔板所引起的衍射 .....	682
309, 310.	大气中沿铅直方向传播的波动; “等温”假设和“对流” 假设 .....	686
311, 311a, 312.	大气中的长波理论 .....	693
313.	气体在常力作用下振动时的普遍方程 .....	704
314, 315.	非转动球体上的大气的振荡 .....	706
316.	转动着的球体上的大气潮, 共振的可能性 .....	708

## 第 Xi 章 粘 性

317, 318.	耗散力的理论, 单自由度; 自由振荡和强迫振荡, 摩 擦对相位的影响 .....	713
319.	在赤道渠道中的潮汐问题上的应用; 潮汐滞后和潮汐 摩擦 .....	716
320.	耗散系统的一般性方程; 摩擦项和陀螺项, 耗散函数 ..	720
321.	耗散系统围绕绝对平衡位形的振荡 .....	721
322.	陀螺项的影响, 二自由度之例; 长周期的扰力 .....	723
323—325.	流体的粘性; 对应力的说明; 变换公式 .....	725
326, 327.	作为应变率的线性函数的应力, 粘性系数, 边界条 件; 滑移问题 .....	728
328., 328a	动力学方程组, 修改后的 Helmholtz 方程; 涡量的 扩散 .....	731
329.	粘性引起的能量耗散 .....	734
330, 330a.	液体在二平行平面之间的流动, Hele Shaw 实验, 润 滑理论; 例 .....	737

331, 332.	圆形截面管道中的流动; Poiseuille 定律; 滑移问题.	
	其它形状的截面 .....	741
333, 334.	定常转动. 实际上的限制 .....	744
334a.	非定常运动之例. 涡旋的扩散. 深水中表面力的效应...	747
335, 336.	缓慢的定常运动; 用球谐函数表示的通解; 用于应力的公式 .....	753
337.	作直线运动的圆球; 阻力; 末速度; 流线. 圆球为液体时的情况; 固体圆球具有滑移时的情况 .....	757
338.	Stokes 方法; 用流函数来表示的解 .....	763
339.	作定常运动的椭球 .....	766
340, 341.	常力场中的定常运动 .....	768
342.	作定常运动的圆球; Oseen 的评论和 Oseen 解 .....	772
343, 343a.	作定常运动的圆柱体(用 Oseen 方法来处理的). 对其它研究的简述 .....	781
344.	定常运动中的能量耗散; Helmholtz 和 Korteweg 的定理. Rayleigh 的推广 .....	784
345—347.	周期性运动问题. 层流运动; 涡量的扩散. 振荡着的平面. 周期性的引潮力; 粘性在快速运动中的微弱影响 .....	787
348—351	粘性对水波的影响. 由风所引起的波浪. 波浪上的油所产生的镇定作用 .....	792
352, 353.	具有球形边界的周期性运动问题; 用球谐函数来表示的通解 .....	803
354.	应用: 球形容器中的运动衰减; 装满液体的球壳的扭转振荡 .....	810
355.	粘性对液体球振荡的影响 .....	813
356.	粘性对圆球旋转振荡和对摆的振动的的影响 .....	815
357.	对二维问题的提示 .....	819
358.	气体中的粘性; 耗散函数 .....	821
359, 360.	粘性对平面声波的衰止作用; 粘性和导热的联合影响 .....	823
360a.	在粘性单独影响下的恒定形声波 .....	828
360b.	多孔物体对声音的吸收作用 .....	830
361.	粘性对发散波的影响 .....	833

362, 363.	粘性对球形障碍物(固定的或自由的)所引起的声波 散射的影响 .....	837
364.	球形容器中声波的衰减 .....	843
365, 366.	湍流, Reynolds 实验; 水管中的临界速度; 阻力定 律, 由量纲理论而作出的推断 .....	845
366a.	二旋转圆柱之间的运动 .....	850
366b.	湍流系数; “旋涡”粘性系数(“摩尔”粘性系数) .....	851
366c.	大气中的湍流; 风随高度的变化 .....	852
367, 368.	Rayleigh 和 Kelvin 的理论探讨 .....	854
369.	Reynolds 的统计方法 .....	859
370.	流体的阻力, 对 Kirchhoff 和 Rayleigh 的不连续 解的评论 .....	865
370a.	Kármán 的阻力公式 .....	867
370b.	由环量产生的升力 .....	868
371.	由量纲而得出的公式, 模型和足尺之间的关系 .....	869
371a, b, c.	边界层, 对机翼理论的提示 .....	872
371d, e, f, g.	压缩性的影响, 流线型流动在高速下的失效 .....	881

## 第 XII 章 旋 转 流 体

372.	相对平衡下的形状, 一般性理论 .....	889
373.	和椭球体引力有关的公式, 椭球体的势能 .....	893
374.	Maclaurin 椭球, 离心率、角速度和角动量之间的关 系, 数值表 .....	895
375.	Jacobi 椭球, 椭球形平衡形状的线性系列, 数值结 果 .....	898
376.	相对平衡下的其它特殊形状, 旋转的环 .....	902
377.	相对平衡的一般性问题; Poincaré 的探讨, 平衡形 状的线性系列; 极限形式和分歧形式, 稳定性的互 换 .....	906
378—380.	在旋转系统中的应用, Maclaurin 椭球和 Jacobi 椭 球的长期稳定性, 梨形的平衡形状 .....	909
381.	作旋转的椭球体的微小振荡; Poincaré 方法, 参考 文献 .....	913



382.	Dirichlet 的探讨; 参考文献. 不旋转的液体椭球的 有限引力振荡 .....	916
383.	Dedekind 椭球体. 无旋椭球体. 旋转的圆柱体 .....	920
384.	装满液体的旋转椭球壳的自由振荡和强迫振荡. 进动 .....	923
385.	液体椭球的进动 .....	928
386.	.....	930
387.	.....	931
388.	.....	932
389.	.....	933
390.	.....	934
391.	.....	935
392.	.....	936
393.	.....	937
394.	.....	938
395.	.....	939
396.	.....	940
397.	.....	941
398.	.....	942
399.	.....	943
400.	.....	944
401.	.....	945
402.	.....	946
403.	.....	947
404.	.....	948
405.	.....	949
406.	.....	950
407.	.....	951
408.	.....	952
409.	.....	953
410.	.....	954
411.	.....	955
412.	.....	956
413.	.....	957
414.	.....	958
415.	.....	959
416.	.....	960
417.	.....	961
418.	.....	962
419.	.....	963
420.	.....	964
421.	.....	965
422.	.....	966
423.	.....	967
424.	.....	968
425.	.....	969
426.	.....	970
427.	.....	971
428.	.....	972
429.	.....	973
430.	.....	974
431.	.....	975
432.	.....	976
433.	.....	977
434.	.....	978
435.	.....	979
436.	.....	980
437.	.....	981
438.	.....	982
439.	.....	983
440.	.....	984
441.	.....	985
442.	.....	986
443.	.....	987
444.	.....	988
445.	.....	989
446.	.....	990
447.	.....	991
448.	.....	992
449.	.....	993
450.	.....	994
451.	.....	995
452.	.....	996
453.	.....	997
454.	.....	998
455.	.....	999
456.	.....	1000

## 第 IX 章

### 表 面 波

227. 在本章中，我们要尽可能地探讨液体中的波动在铅直运动不再被忽略时的规律。上一章中的理论所未包括的最重要情况是在较深液体中的波动。在这种波动中，我们会看到，当从液面向下时，质点运动的振幅就迅速减小；不过，我们将会了解到，这种波动可以连续过渡到上一章中所讨论的情况（从顶部到底部，流体的水平运动几乎是一样的）。

我们从水平水层的振荡开始，而且首先只限于二维流动——其中一维( $x$ )是水平的，另一维( $y$ )是铅直的。于是，自由表面的升高处和凹陷处就表现为一系列互相平行的直峰和直谷，并与平面  $xy$  垂直。

假定液体在普通力系的作用下由原来的静止状态进入运动，则运动一定是无旋的，且速度势应满足方程

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

并在固定边界上具有条件

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0. \quad (2)$$

为求得在自由表面 ( $p = \text{const.}$ ) 上所必须满足的条件，把原点  $O$  取在未受扰时的液面上，并取  $Oy$  铅直向上。假定运动为无穷小，把  $\Omega = gy$  代入第 20 节公式(4)并略去  $q$  的平方项后可得

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \phi}{\partial t} - gy + F(t). \quad (3)$$

因此，如  $\eta$  表示时刻  $t$  时液体表面在点  $(x, 0)$  上部的升高度，则

由于液面上的压力是均匀的，我们可有

$$\eta = \frac{1}{g} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_{y=\eta}, \quad (4)$$

并假定函数  $F(t)$  和附加常数已被合并并在  $\partial \phi / \partial t$  项之中了。

在误差与已被略去的诸项量级相同的前提下，上式可写为

$$\eta = \frac{1}{g} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_{y=0}. \quad (5)$$

由于自由表面的法线和铅直方向之间的夹角  $(\partial \eta / \partial n)$  为无穷小，因此，自由表面上液体质点的法向分速必等于液面本身的法向速度，而这一条件则在足够的近似级下给出

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = - \left[ \frac{\partial \phi}{\partial y} \right]_{y=0}. \quad (6)$$

事实上，上式正是普遍表面条件(第9节(3)式)所能变成的形式，只要令  $F(x, y, z, t) \equiv y - \eta$ ，并略去二阶小量即可。

由(5)，(6)二式把  $\eta$  消去后，可得在  $y = 0$  处所应满足的条件为

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0. \quad (7)$$

它与  $Dp/Dt = 0$  等价。

(1) 在简谐运动中，时间因子为  $e^{i(\sigma t + \epsilon)}$ ，上述条件变为

$$\sigma^2 \phi = g \frac{\partial \phi}{\partial y}. \quad (8)$$

(2) **228.** 现在我们把上节所述的内容应用于具有均匀深度  $h$  的水层或直渠道中的自由振荡，并假定流体在  $x$  方向没有限界（如果有任何固定边界的话，也是一些与平面  $xy$  平行的铅直平面）。

因为边界条件对于所有的  $x$  都是一样的，所以我们可以作的最简单假定是设  $\phi$  为  $x$  的简谐函数；相容于前述假定的最普遍情况则可利用 Fourier 定理由叠加而得出。

于是假定

$$\phi = P \cos kx \cdot e^{i(\sigma t + \epsilon)}, \quad (1)$$

其中  $P$  仅为  $y$  之函数, 227 节方程(1)给出

$$\frac{d^2 P}{dy^2} - k^2 P = 0, \quad (2)$$

故

$$P = Ae^{ky} + Be^{-ky}. \quad (3)$$

底部无铅直运动的条件为在  $y = -h$  处  $\partial\phi/\partial y = 0$ , 故

$$Ae^{-kh} = Be^{kh} = \frac{1}{2} C (\text{设为}).$$

它导致

$$\phi = C \cosh k(y+h) \cos kx \cdot e^{i(\sigma t + \varepsilon)}. \quad (4)$$

于是  $\sigma$  之值就由 227 节(8)式确定为

$$\sigma^2 = gk \tanh kh. \quad (5)$$

把(4)式代入 227 节(5)式, 可得

$$\eta = \frac{i\sigma C}{g} \cosh kh \cos kx \cdot e^{i(\sigma t + \varepsilon)}. \quad (6)$$

如令

$$a = -\frac{\sigma C}{g} \cdot \cosh kh,$$

并只保留表达式中的实部, 则有

$$\eta = a \cos kx \cdot \sin(\sigma t + \varepsilon). \quad (7)$$

它表示一个“驻波”系, 波长为  $\lambda = 2\pi/k$ , 铅直振幅为  $a$ . 周期  $(2\pi/\sigma)$  和波长之间的关系由(5)式给出, 这一依赖关系的某些数值实例在 229 节中给出.

用  $a$  来表示时有

$$\phi = -\frac{ga}{\sigma} \frac{\cosh k(y+h)}{\cosh kh} \cos kx \cdot \cos(\sigma t + \varepsilon), \quad (8)$$

而由第 62 节不难看出相应的流函数为

$$\psi = \frac{ga}{\sigma} \frac{\sinh k(y+h)}{\cosh kh} \sin kx \cdot \cos(\sigma t + \varepsilon). \quad (9)$$

如  $x, y$  为一质点相对于其平均位置  $(x, y)$  的坐标, 则若忽

略  $(x, y)$  处和  $(x + x, y + y)$  处的分速度之差 (这种差异是二阶小量), 可有

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial \phi}{\partial y}. \quad (10)$$

把(8)式代入上式并对  $t$  求积, 可得

$$\left. \begin{aligned} x &= -a \frac{\cosh k(y+h)}{\sinh kh} \sin kx \cdot \sin(\sigma t + \varepsilon), \\ y &= a \frac{\sinh k(y+h)}{\sinh kh} \cos kx \cdot \sin(\sigma t + \varepsilon). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

在得出上式时, 曾借助(5)式作了一点简化. 每一个质点都作着直线简谐运动, 其运动方向则由波峰和波谷之下 ( $kx = m\pi$ ) 的铅直方向变到节点之下 ( $kx = (m + \frac{1}{2})\pi$ ) 的水平方向. 当我们由水面向下到底部时, 铅直运动的振幅由  $a \cos kx$  减小到 0, 而水平运动的振幅则按  $\cosh kh:1$  的比例而减小.

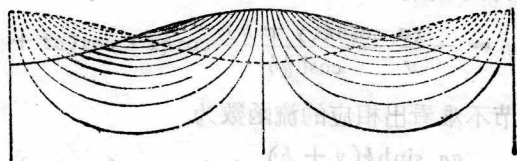
当波长远小于水深时,  $kh$  很大, 因而  $\tanh kh = 1^D$ . 这时, (11)式简化为

$$\left. \begin{aligned} x &= -ae^{ky} \sin kx \cdot \sin(\sigma t + \varepsilon), \\ y &= ae^{ky} \cos kx \cdot \sin(\sigma t + \varepsilon), \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

且有

$$\sigma^2 = gk. \quad (13)$$

现在, 当由水面向下时, 运动会很快地减弱; 例如, 当向下的深度为一个波长时, 振幅就以  $e^{-2\pi} = 1/535$  之比例而减小. 这种振荡运动的流线 ( $\psi = \text{const.}$ ) 形状已示于本节附图中.



1) 独立地探讨这一情况当然更为容易.

在上述探讨中,流体被假定为在  $x$  方向延伸至无穷远处,因而对  $k$  之值并无限制。但如取适当的  $k$  值,那么,诸公式也可给出有限长度渠道中的纵向振荡。例如,若流体以铅直平面  $x = 0$  和  $x = l$  为边界,则若  $\sin kl = 0$ , 即若  $kl = m\pi$  (其中  $m = 1, 2, 3, \dots$ ), 则条件  $\partial\phi/\partial x = 0$  可在两端处被满足。诸正则振型的波长因而由  $\lambda = 2l/m$  给出。参看 178 节。

**229.** 在上一节中已提到了“驻波”。在一开始时就提到它,是因为,为了确定一个系统在其平衡状态附近振荡时之正则振型,这样作法可使我们直接应用通常所用的方法。

在一个具有均匀深度的水层或渠道中,如水在前后两个水平方向上都延伸至无穷远处,我们可以把两个波长相同的驻波系叠加而得到一个以常速度传播的行波系,但一个分支波系的峰谷必须与另一分支波系的节点在水平方向上重合,且二波系的振幅必须相等,其相角应相差四分之一周期。

因此,如令

$$\eta = \eta_1 \pm \eta_2, \quad (1)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= a \sin kx \cos \sigma t, \\ \eta_2 &= a \cos kx \sin \sigma t, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

则可得

$$\eta = a \sin(kx \pm \sigma t). \quad (3)$$

它表示沿  $x$  的正方向或负方向传播的一列无限长波系,其传播速度为(下式中  $\sigma$  之值取自 228 节(5)式)

$$c = \frac{\sigma}{k} = \left( \frac{g}{k} \tanh kh \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4)$$

如用波长 ( $\lambda$ ) 来表示,则有

$$c = \left( \frac{g\lambda}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5)$$

当波长小于两倍水深时,实际上就有  $\tanh kh = 1$ ,因而<sup>1)</sup>

$$c = \left(\frac{g}{k}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{g\lambda}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6)$$

另一方面,当  $\lambda$  与  $h$  之比为中等大小时,近似地有  $\tanh kh = kh$ , 于是,波速与波长无关,并为

$$c = (gh)^{\frac{1}{2}}, \quad (7)$$

它与 170 节中的结果相同。在这里我们是假定了波剖面为一正弦曲线而得到这一结果的,但 Fourier 定理表明,这一限制基本上是不必要的。

如果画出曲线  $y = (\tanh x)/x$ , 或者根据即将给出的数值表,可以看出在给定的水深  $h$  下,波速随波长由零不断增大到(7)式中的渐近值。

为论述时确定起见,我们现在把注意力放在一列沿正方向传播的简谐波上,也就是我们在(1)式和(3)式中取下面的符号。和 228 节(7)式相比较后可表明,如令  $\varepsilon = \frac{1}{2}\pi$ , 并在  $kx$  的值中减去  $\frac{1}{2}\pi$ , 就可得出  $\eta_1$ , 而简单地令  $\varepsilon = 0$ , 就可得出  $\eta_2$ 。这一点证实了我们在上面所作出的关于这两个驻波分支之间关系的论述,而且还可以使我们立即对上节中其余诸公式作出适当的修正。

于是,对于一个质点的位移分量,可得

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 - x_2 = a \frac{\cosh k(y+h)}{\sinh kh} \cos(kx - \sigma t), \\ y &= y_1 - y_2 = a \frac{\sinh k(y+h)}{\sinh kh} \sin(kx - \sigma t). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

上式表明每一个质点都作着椭圆谐运动,其周期 ( $2\pi/\sigma, = \lambda/c$ ) 就是扰动传播一个波长所需的时间。椭圆轨道的水平与铅直半轴分别为

1) Green, "Note on the Motion of Waves in Canals", *Camb. Trans.* vii. (1839) [*Papers*, p. 279].

2) 它仅仅等价于把度量  $x$  所用的原点改变一下。

$$a \frac{\cosh k(y+h)}{\sinh kh} \quad \text{和} \quad a \frac{\sinh k(y+h)}{\sinh kh}$$

当从水面向下到底部 ( $y = -h$ ) 时, 这两个半轴都减小, 而且后者减为零. 两个焦点之间的距离对于所有椭圆都是一样的, 并等于  $a \operatorname{cosech} kh$ . 把(8)式与(3)式比较后不难看出, 当水面质点位于波峰时, 它沿波的传播方向运动; 而当它位于波谷时, 它就沿相反的方向运动<sup>1)</sup>.

当水深超过半个波长时,  $e^{-kh}$  就很小, (8)式可简化为

$$\left. \begin{aligned} x &= ae^{ky} \cos(kx - \sigma t), \\ y &= ae^{ky} \sin(kx - \sigma t). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

于是, 每一个质点都描出一个圆, 并具有常角速度  $\sigma = (2\pi g/\lambda)^{\frac{1}{2}}$ . 诸圆的半径由  $ae^{ky}$  给出, 因而, 从水面向下时就迅速减小.

在下面的数值表中, 第二列给出了对应于不同比值  $h/\lambda$  的  $\operatorname{sech} kh$  值, 这一数值表示水平运动在底部处的幅度和在水面处的幅度之比. 第三列给出水面质点椭圆轨道的铅直直径和水平直径之比, 第四列和第五列分别给出波速与同样波长的波在无限水深中的波速之比以及波速与实际水深中“长”波波速之比.

$h/\lambda$	$\operatorname{sech} kh$	$\tanh kh$	$c/(gk^{-1})^{\frac{1}{2}}$	$c/(gh)^{\frac{1}{2}}$
0.00	1.000	0.000	0.000	1.000
0.01	0.998	0.063	0.250	0.999
0.02	0.992	0.125	0.354	0.997
0.03	0.983	0.186	0.432	0.994
0.04	0.969	0.246	0.496	0.990
0.05	0.953	0.304	0.552	0.984
0.06	0.933	0.360	0.600	0.977
0.07	0.911	0.413	0.643	0.970
0.08	0.886	0.464	0.681	0.961
0.09	0.859	0.512	0.715	0.951
0.10	0.831	0.557	0.746	0.941
0.20	0.527	0.850	0.922	0.823

1) 228 和 229 节中关于有限水深中的一些结果在实质上是 Airy 给出的, 见其“Tides and Waves”, Arts. 160... (1845).

2) Green, 本节前面脚注中引文.



续表

$h/\lambda$	$\operatorname{sech}kh$	$\tanh kh$	$c/(gk^{-1})^{\frac{1}{2}}$	$c/(gh)^{\frac{1}{2}}$
0.30	0.297	0.955	0.977	0.712
0.40	0.161	0.987	0.993	0.627
0.50	0.086	0.996	0.998	0.563
0.60	0.046	0.999	0.999	0.515
0.70	0.025	1.000	1.000	0.477
0.80	0.013	1.000	1.000	0.446
0.90	0.007	1.000	1.000	0.421
1.00	0.004	1.000	1.000	0.399
$\infty$	0.000	1.000	1.000	0.000

另两个数值表中的周期和波速的绝对值摘自 Airy 的文献<sup>1)</sup>。Airy 所选用的  $g$  值为 32.16 英尺<sup>2</sup>/秒。

从理论上讲，行波以不变的形状传播的可能性仅限于均匀深度的情况，但数值

水深 (英尺)	波长(英尺)				
	1	10	100	1000	10000
	周期(秒)				
1	0.442	1.873	17.645	176.33	1763.3
10	0.442	1.398	5.923	55.80	557.62
100	0.442	1.398	4.420	18.73	176.45
1000	0.442	1.398	4.420	13.98	59.23
10000	0.442	1.398	4.420	13.98	44.20

水深 (英尺)	波长(英尺)					
	1	10	100	1000	10000	
	波速(英尺/秒)					
1	2.262	5.339	5.667	5.671	5.671	5.671
10	2.262	7.154	16.88	17.92	17.93	17.93
100	2.262	7.154	22.62	53.39	56.67	56.71
1000	2.262	7.154	22.62	71.54	168.8	179.3
10000	2.262	7.154	22.62	71.54	226.2	567.1

1) "Tides and Waves," Arts. 169, 170.

2) 1 英尺=0.3048 米。——译者注