高等学校教学用书

微积分学讲义

第❷册

邝荣雨　薛宗慈　陈平尚　蒋　铎　李有兰　编

北京师范大学出版社

高等学校教学用书

微积分学讲义

第二册

邝荣雨　薛宗慈　陈平尚
蒋　铎　李有兰　编

北京师范大学出版社

高等学校教学用书

微积分学讲义

第二册

邝荣雨　薛宗慈　陈平尚
蒋　铎　李有兰　编

*

北京师范大学出版社出版

新华书店总店科技发行所发行

中国科学院印刷厂印刷

开本：850×1168　1/32　印张：13.25　字数：327 千

1989 年 12 月第 1 版　1989 年 12 月第 1 次印刷

印数：1—2 000

ISBN　7-303-00605-2/O·105

定价：3.35 元

内 容 提 要

本书分四册．第一册是一元与多元微积分初步；第二册是一元微积分的理论与方法；第三册是多元微积分理论与计算．这三册可作为数学系本科数学分析课程教材或教学参考书．最后一册为专册，它包含若干专题，供教学选用或课外参考．

本书是作者在总结最近几年在北京师范大学数学系本科数学分析课程教学改革的经验的基础上写成的．作者将现行的数学分析课程的内容分为两个阶段(首先侧重于概念、计算，进而侧重于理论、方法)进行讲授，教学效果达到预期的目的．

本册内容包括一元(数值)函数的极限理论、一元微积分学的基本理论、数项级数与广义积分、函数项级数与函数展开和含参变量积分．

目　　录

—— 4 ——

一元(数值)函数的极限理论

§1 实数概论

17、18世纪是微积分大发展的年代，到了19世纪，由于本身逻辑基础不严密，前两个世纪沿袭下来的凭几何直觉和物理印象进行推证的方法，使得微积分日益感到步履艰难，经过 Cauchy、Weierstrass 等人的艰苦努力，终于给微积分的基础——极限理论建立了一套严密的逻辑体系，但是问题并没有彻底解决，因为极限理论的基础——实数理论还没有严格建立起来，因而极限理论的一些重大问题也没有得到彻底解决，例如我们在第一册中多次使用的单调数列收敛原理，连续函数整体性质(介值性，有界性，最值性)，连续函数的可积性等重要定理都无法予以严格证明.

实数，看起来很浅显，几乎人人都认识它，也会用它作四则运算，但数学家偏偏要问：什么是实数？它有什么性质？ 这个问题从古希腊开始一直困惑了数学家近二千多年. 直到19世纪后半叶才由梅莱 (Mèray)、戴德金 (Dedekind)、康托尔 (Cantor) 等人给出了满意的回答.

人类认识的第一个数系是自然数系，由于实际生活与数学运算的需要，逐渐地扩充到整数系，再扩充到有理数系，这是一个比较完美的数系，例如它具有稠密性，即任何两个有理数之间必含有理数；它对四则运算是封闭的，即任何有理数经过加、减、乘、除四则运算后仍是有理数；它的元素有顺序关系，因而可以比较大小，进行不等式运算. 有理数系这些性质使得古希腊人认为它就是所有数的全体，并且设想把它们由小到大、连续无空隙地排列在一条无限长直线上，即把全体有理数与数轴上全体点之间建立一一对应，这种关于“形”与“数”自然和谐的连续性设想促使古希腊学者毕达哥拉斯 (Pythagoras) 喊出他的哲理名言：“万物皆为数”(他所说的数指的是有理数) 但事

实并非如此，大约在公元前五百年左右，毕氏学派门徒希伯斯 (Hippasus) 发现并证明了正五边形的边长与对角线长是不可公度的，接着他又证明了正方形的边长和对角线长也是不可公度的，这就是说，单位正方形的对角线长竟然不是数！(指有理数)希伯斯的发现动摇了古希腊几何理论的基础，同时也第一次向人们揭示了有理数系的缺陷，它告诉人们，有理数虽然密密麻麻排在数轴上，但并没有铺满整个数轴，它上面还存在很多不能用有理数填补的"孔隙"．我们应当怎样扩充有理数系，使得这条带有"孔隙"的直线真正成为"连续"的直线呢？

Cauchy 在他的名著《国立工科大学的分析教程》(1921 年)一书中曾试图用有理数列的极限来定义无理数，但这必须先承认无理数的存在，这就产生了一个逻辑的自身循环·如何克服这个恶性循环呢？Dedekind 分析了直线连续性的本质，是由于它上面任一点把直线划分为不重、不漏、不空的两部分，反过来，只要直线划分成了这样两部分，它就必然有一个分界点．这就是说，直线上任一点与上述任一"分划"本质上是一回事，Dedekind 抓住了这个本质，高兴地说道："这样的平凡之见，暴露了连续性的秘密"．他利用这种分划的方法，从有理数系出发构造出了实数系，建立了一整套严密的实数理论，奠定了微积分的坚实基础．

从自然数系出发，采用构造性的方法，逐步得到实数系的过程是冗繁的，我们将按照公理化的方法定义实数系，然后再定义它的一些重要子集．采用这种方法是考虑到实数的表达形式(如常用的十进位记数法)虽然很重要，但它的特性与功用主要是通过它们之间的关系和性质表现出来，尤其是其中一些最基本的关系和性质完全刻划了实数的本质，它们的全体就组成了实数的公理系统．

1.1 实数域

实数公理系统包含三组公理．

第一组是刻划实数四则运算关系的公理，称为**域公理**．

设 $\boldsymbol{R}$ 是一个集合，在它的元素之间规定了两种分别称为加法"＋"和乘法"·"的运算关系，使得$\boldsymbol{R}$中任何两个元素 a，b，都有 $a+b\in\boldsymbol{R}$，$a\cdot b\in\boldsymbol{R}$，并且满足下面九条基本性质：

I.1 (加法结合律) $a+(b+c)=(a+b)+c$,

I.2 (加法交换律) $a+b=b+a$;

I.3 (加法零元) $\exists 0\in \boldsymbol{R}$, $\forall a\in \boldsymbol{R}$, 有 $0+a=a$;

I.4 (加法负元) $\forall a\in \boldsymbol{R}$, $\exists -a\in \boldsymbol{R}$, 使 $a+(-a)=0$;

I.5 (乘法结合律) $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$;

I.6 (乘法交换律) $a\cdot b=b\cdot a$;

I.7 (乘法单位元) $\exists 1\in \boldsymbol{R}$,且 $1\neq 0$, $\forall a\in \boldsymbol{R}$,有 $a\cdot 1=a$;

I.8 (乘法逆元) $\forall a\in \boldsymbol{R}$,且 $a\neq 0$,$\exists \frac{1}{a}\in \boldsymbol{R}$, 使

$$a\cdot\frac{1}{a}=1;$$

I.9 (加法与乘法的分配律) $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$.
凡是具有两种运算且满足上述九条性质的集合称为**域**.

第二组是刻划实数顺序关系的公理,称为**序公理**.

设 $\boldsymbol{R}$ 是一个集合, 在它的元素之间规定了一种顺序关系"$<$",并且满足下面四条性质:

II.1 (三歧性) $\forall a, b\in \boldsymbol{R}$,以下三种关系: $a<b$, $a=b$, $b<a$ 有且仅有一种成立;

II.2 (传递性) 若 $a<b, b<c$,则 $a<c$;

II.3 若 $a<b$, 则 $\forall c\in \boldsymbol{R}$, 有 $a+c<b+c$;

II.4 若 $a<b$,则 $\forall 0<c\in \boldsymbol{R}$,有 $a\cdot c<b\cdot c$.

凡满足 II.1—2 条件的集合称为**有序集**. "$a<b$"又可写成"$b>a$". 关系"$\leqslant$"表示"$<$或$=$".

第三组是刻划实数连续性的公理,称为**连续(完备)公理**.

III. (**分划原理**(Dedekind)) 设 A, B 是 $\boldsymbol{R}$ 的非空子集,且对 A 中任一元 $a\in A$ 与 B 中任一元 $b\in B$, 皆有 $a\leqslant b$, 则存在 $c\in \boldsymbol{R}$, 对 $\forall a\in A$, $\forall b\in B$, 有 $a\leqslant c\leqslant b$.

我们把满足上述三组公理的集合 $\boldsymbol{R}$ 叫做**实数集**，其中元素叫做**实数**. 也就是说，**实数集是满足连续公理的有序域**. 常称为**实数域**. 我们熟知的有关实数四则运算与不等式运算的一切性质都可以由上述域公理与序公理推导出来. 为避免繁琐，仅举几例以说明之.

【例 1】 证明：方程 $a+x=b$ 在 $\boldsymbol{R}$ 中有唯一解 $x=b+(-a)$.

【证】 首先证明 $x=b+(-a)$ 是 $a+x=b$ 的解.
事实上，利用加法结合律、交换律及零元存在性，有

$$
\begin{aligned}
a+x &= a+[b+(-a)] = a+[(-a)+b] \\
&= [a+(-a)]+b = 0+b = b.
\end{aligned}
$$

其次证明 $x=b+(-a)$ 是 $a+x=b$ 的唯一解.
事实上，在 $a+x=b$ 两端加 $-a$，得

$$(a+x)+(-a)=b+(-a).$$

而左端是 $(a+x)+(-a)=-a+(a+x)$

$$=(-a+a)+x=0+x=x,$$

所以 $x=b+(-a)$. 易证负元是唯一的，故 $x=b+(-a)$ 是唯一的，

式子 $b+(-a)$ 常记作 $b-a$，由此可定义减法，称 $b-a$ 为 b 与 a 的差. 同理可以证明，方程 $a\cdot x=b$ 当 $a\neq 0$ 时，在 $\boldsymbol{R}$ 中有唯一解 $x=b\cdot\dfrac{1}{a}$ 常把它记作 $x=\dfrac{b}{a}$，由此可定义除法，称 $\dfrac{b}{a}$ 为 b 与 a 的**商**. 用类似的方法可以证明：$a\cdot 0=0$；$-(-a)=a$；$(-a)\cdot b=-(a\cdot b)$；$-a=(-1)\cdot a$.

【例2】 设 $a,b\in\boldsymbol{R}$，证明：

(1) $a>0 \Leftrightarrow -a<0$. (2) $a\leqslant b, b\leqslant a \Rightarrow a=b$.

(3) 当 $a>0$, $b>0$ 或 $a<0$, $b<0 \Rightarrow a\cdot b>0$.

【证】 (1) 若 $a>0 \Rightarrow 0=-a+a>-a+0=-a$; 若 $-a<0 \Rightarrow 0=-a+a<0+a=a$.

(2) 假若 $a \neq b$, 由公理 II 的三歧性 $\Rightarrow a<b$; 或 $a>b$. 若 $a<b$, 因 $b \leqslant a \Rightarrow a<a$, 矛盾! 同理, 当 $a>b$ 也推出矛盾,故 $a=b$

(3) 利用公理 II.4 知, $a>0$, $b>0 \Rightarrow a \cdot b>0$. 当 $a<0, b<0$ 时,有 $-a>0,-b>0$, $\Rightarrow a \cdot b=(-a) \cdot(-b)>0$.

用类似的方法可以证明: $1>0$; $a>0 \Rightarrow \frac{1}{a}>0$. 我们称大于零的实数为**正实数**,小于零的实数为**负实数**.

在实数域 $\boldsymbol{R}$ 中,还可引进绝对值概念,从而可引进两个实数 a 与 b 的**距离** $|a-b|$,并有著名的**三角形不等式**

$$|a-b| \leqslant|a-c|+|c-b|$$

定义了距离的实数域常称为**实数空间**,仍记作 $\boldsymbol{R}$.

定义好了实数以后,接着就应该定义有理数,整数和自然数. 按照传统方法,我们先定义自然数. 通常说自然数就是 $1,2,3, \cdots$ 这种说法是含糊的. 但它也隐含了归纳原理的本质属性,下面我们严格的论述自然数定义及其重要性质.

设 $E \subset \boldsymbol{R}$,若对任何 $a \in E$,有 $a+1 \in E$,则称 E 是**归纳集**.

易知实数域 $\boldsymbol{R}$ 与正实数集是归纳集,任意多个归纳集的非空交集也是归纳集. 由此引进下面的定义.

包含数 1 的最小的归纳集,即包含数 1 的一切归纳集的交集,叫做**自然数集**,记作 $\boldsymbol{N}$, 其中元素叫做**自然数**. 由此易得重要的

【定理 1.1】(数学归纳原理) 设 $E \subset \boldsymbol{N}$,有 $1 \in E$,若 $\forall n \in E$,有 $n+1 \in E$,则 $E=\boldsymbol{N}$.

通常所说的**数学归纳法**是这样陈述的: 给定命题 $p(n)$,若 1° 当 $n=1$ 时,命题 $p(1)$成立;2° 若 $\forall n \in \boldsymbol{N}$, $p(n)$ 成立 $\Rightarrow p(n$

$+1)$ 成立，则命题 $p(n)$ 对一切自然数 n 成立．它成立的理由是这样解释的：由 $1°$ 知命题 $p(n)$ 对 $n=1$ 成立，由 $2°$ 知命题 $p(n)$ 对 $n=2$ 成立，又由 $2°$ 知命题 $p(n)$ 对 $n=3$ 也成立，依此类推，故命题 $p(n)$ 对一切自然数 n 都成立．这种论证方法是经不起推敲的，因为反复引用 $2°$ 只能推断有限步，而自然数是无穷的，怎能用"依此类推"的含混说法从有限步达到无穷呢？而数学归纳原理才是它真正的依据，下面我们解释这一点．

设 $E=\{n\in \boldsymbol{N}|$ 命题 $p(n)$ 成立$\}$，则

$$n\in E \Longleftrightarrow \text{命题 } p(n) \text{ 成立}, n\in \boldsymbol{N}.$$

由于 $p(1)$ 成立 $\Leftrightarrow 1\in E$，而命题："$p(n)$ 成立 $\Rightarrow p(n+1)$ 成立"等价于命题："$n\in E\Rightarrow n+1\in E$" 于是由数学归纳原理知 $E=\boldsymbol{N}$，这就是说，命题 $p(n)$ 对一切自然数 n 成立．

利用数学归纳原理可以证明我们通常很熟悉的自然数的性质，例如自然数集 $\boldsymbol{N}$ 关于加法与乘法运算是封闭的，自然数集的任一非空子集必有最小数等等．最后定义整数与有理数．我们把自然数集、自然数的负元之集与数零的并集叫做**整数集**，记作 $\boldsymbol{Z}$．把形如 $r=\dfrac{p}{q}$（其中 $p,q\in \boldsymbol{Z}$，且 $q\neq 0$）的实数所成之集叫做**有理数集**，记作 $\boldsymbol{Q}$，其中实数叫做有理数，不是有理数的实数叫做无理数，它的全体叫做**无理数集**．由此知自然数集，整数集，有理数集，无理数集都是实数集的子集．还可以证明，有理数集是一个有序域，也就是说，我们通常熟悉的关于实数之间的四则运算与不等式运算在有理数集中也是畅通无阻的．那么实数域与有理数域的本质差别在哪儿呢？关键就是连续公理，即连续公理在有理数域 $\boldsymbol{Q}$ 中不成立，例如令

$$A=\{a\in \boldsymbol{Q}|a>0, a^2<2\}, B=\{b\in \boldsymbol{Q}|b^2>2\}$$

它们都是 $\boldsymbol{Q}$ 的子集，当 $a,b\in \boldsymbol{R}$ 且 $a>0$，$b>0$，有

$$a < b \Longleftrightarrow a^2 < b^2$$

所以 A 中任一正有理数 a 小于 B 中任一正有理数 b，容易证明，不可能存在一个有理数 $c \in \boldsymbol{Q}$，对 $\forall a \in A$，$\forall b \in B$，有 $a \leqslant c \leqslant b$. 否则，由 $a \leqslant c \leqslant b \Rightarrow a^2 \leqslant c^2 \leqslant b^2$. 又由集 A 与集 B 定义有 $a^2 < 2 < b^2$，于是 $c^2 = 2$. 但我们都知道这是不可能的，故连续公理在有理数域 $\boldsymbol{Q}$ 中不成立. 我们将会看到，正是连续公理构成数学分析的基础——极限理论赖以生存的根基.

到此，已经完成了整个实数集及其重要子集的定义工作，我们省略了很多证明细节，为的是突出它们最主要的特征. 要想较全面论述实数域，还需要构造出满足实数公理的实数模型，并给出具有实际计算意义的实数表示法等等，这些都是很重要的，也是很繁重的工作，请读者参考其它书籍.

1.2 确界原理与闭区间套原理

先介绍几个重要概念.

【定义】 设 $E \subset \boldsymbol{R}$，$E \neq \varnothing$.

若存在 $b \in E$，对一切 $x \in E$，有 $x \leqslant b$，则称 b 为 E 的**最大数**，记作 $b = \max E$；

若存在 $a \in E$，对一切 $x \in E$，有 $x \geqslant a$，则称 a 为 E 的**最小数**，记作 $a = \min E$.

数集 E 可能没有最大(最小)数，例如区间 $[0, 1)$ 有最小数 0，无最大数. 注意，数 1 不是 $[0, 1)$ 的最大数. 一个数集的最大(小)数必须是此集合中的数.

易证，数集 E 的最大(小)数(如果存在的话)是唯一的.

【定义】 设 $E \subset \boldsymbol{R}$，$E \neq \phi$.

若存在 $\beta \in \boldsymbol{R}$，满足下列条件：

1° (上界). 对一切 $x \in E$，有 $x \leqslant \beta$；

2° (最小上界). 对 E 的任一上界 β'，都有 $\beta' \geqslant \beta$，

则称 β 是 E 的**上确界**，记作 $\beta = \sup E$。

若存在 $\alpha \in \boldsymbol{R}$，满足下列条件：

1°（下界）．对一切 $x \in E$，有 $x \geqslant \alpha$；

2°（最大下界）．对 E 的任一下界 α'，都有 $\alpha' \leqslant \alpha$，

则称 α 是 E 的**下确界**，记作 $\alpha = \inf E$.

若数集 E 有上（下）确界，此确界不一定属于 E．例如，容易相信（马上就要证明）区间 $[0,1)$ 有上确界 1，但 $1 \notin [0,1)$，而 $[0,1)$ 的下确界 $0 \in [0,1)$.

易知，若 $b = \max E \Rightarrow b = \sup E$，但反之不然.

我们已经知道，任一数集的最大（小）数不一定存在，那么任一有界数集的上（下）确界一定存在吗？这个问题的肯定答复，即下面的确界原理．从中可以看到实数连续公理的巨大威力.

【定理 1.2】（确界原理）

任意有上界的非空实数集存在唯一的上确界.

【证明】 设 A 是题设中给定的非空数集．把 A 的一切上界集合起来，即令

$$B = \{b \in \boldsymbol{R} \mid \forall a \in A,\ 有\ a \leqslant b\}$$

由题设 $\Rightarrow B \neq \varnothing$．且 $\forall a \in A, \forall b \in B$．有 $a \leqslant b$，于是由连续公理 $\Rightarrow \exists c \in \boldsymbol{R}, \forall a \in A, \forall b \in B$，有 $a \leqslant c \leqslant b$．由 $a \leqslant c \Rightarrow c \in B$，即 c 是 A 的上界；由 $c \leqslant b \Rightarrow c$ 是 B 的下界，再由最小数定义知 $c = \min B$，这就是说，集 A 的任一上界 $c' \geqslant c$，故 $c = \sup A$，再由最小数的唯一性知集 A 的上确界 c 是唯一的．□

【推论】 任意有下界的非空实数集存在唯一的下确界.

请读者自行证之.

直接利用确界定义进行论证有时并不方便．需要给出较实用的判别方法.

【定理 1.3】（确界存在准则） 设 E 是非空实数集.

(1) $\beta = \sup E$ 存在的充要条件是：$\exists \beta \in \boldsymbol{R}$，满足

1° 对一切 $x \in E$,有 $x \leqslant \beta$;

2° 任给 $\varepsilon > 0$,存在 $x' \in E$,使得 $\beta - \varepsilon < x'$.

(2) $\alpha = \inf E$ 存在的充要条件是: $\exists \alpha \in \boldsymbol{R}$,满足

1° 对一切 $x \in E$,有 $x \geqslant \alpha$;

2° 任给 $\varepsilon > 0$,存在 $x'' \in E$,使得 $\alpha + \varepsilon > x''$.

【证明】 只要对上确界证明就行了.

必要性($\Rightarrow$) 设 $\beta = \sup E$ 存在,显然 1° 成立. $\forall \varepsilon > 0$,因 $\beta - \varepsilon < \beta$,由最小上界性知 $\beta - \varepsilon$ 不是 E 的上界,再由上界的非命题知 $\exists x' \in E$,使 $x' > \beta - \varepsilon$.

充分性($\Leftarrow$) 设实数 β 满足题设条件 1°, 2°, 显然 β 是 E 的一个上界. 任取 E 的一个上界 β',假若 $\beta' < \beta$,由 2° 中 $\varepsilon > 0$ 的任意性可取 $\varepsilon = \beta - \beta' > 0 \Rightarrow \exists x' \in E$,使得 $x' > \beta - \varepsilon = \beta - (\beta - \beta') = \beta'$,这与 β' 是 E 的上界相矛盾,故 $\beta' \geqslant \beta$. □

此定理可简记作

$$\boxed{\beta = \sup E \Longleftrightarrow \begin{cases} 1^\circ & \forall x \in E,\ x \leqslant \beta; \\ 2^\circ & \forall \varepsilon > 0,\ \exists x' \in E,\ x' > \beta - \varepsilon. \end{cases}}$$

$$\boxed{\alpha = \inf E \Longleftrightarrow \begin{matrix} 1^\circ & \forall x \in E,\ x \geqslant \alpha; \\ 2^\circ & \forall \varepsilon > 0,\ \exists x'' \in E,\ x'' < \alpha + \varepsilon. \end{matrix}}$$

利用确界判别准则论证问题时，特别要注意：由 $\varepsilon > 0$ 确定的 $x' \in E$ 与 ε 有关. 切不可把它当常数处理.

设实值函数 f 在数集 D 上有界，则它的值域 $f(D)$ 是有界数集,于是,$\sup f(D)$ 与 $\inf f(D)$ 皆存在，分别称为函数 f 在 D 的**上、下确界**. 记作

$$\sup_{x \in D} f(x) = \sup\{f(x) \mid x \in D\} = \sup f(D)$$

$$\inf_{x\in D} f(x) = \inf\{f(x) \mid x\in D\} = \inf f(D)$$

当非空数集 E 无上界或无下界时，记作

$$\sup E = +\infty \text{ 或 } \sup E = -\infty.$$

符号$+\infty$,$-\infty$与实数域 $\boldsymbol{R}$ 的并集 $\boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$称为**广义实数系**. 也记作 $\boldsymbol{R}^* = [-\infty,+\infty]$. 在 $\boldsymbol{R}^*$ 中我们规定如下顺序关系:

保持 $\boldsymbol{R}$ 中原来顺序关系，且对 $\forall x\in \boldsymbol{R}$, 有$-\infty < x < +\infty$. 此外在 $\boldsymbol{R}^*$ 中还适当引进运算关系，即 $\forall\ x\in \boldsymbol{R}$, 规定:

$$x + (\pm\infty) = \pm\infty; \qquad \frac{x}{\pm\infty} = 0;$$

$$x\cdot(\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty, & x > 0 \\ \mp\infty, & x < 0; \end{cases}$$

$$(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty; \quad (\pm\infty)\cdot(\pm\infty) = +\infty;$$
$$(\pm\infty)\cdot(\mp\infty) = -\infty.$$

但是没有对记号 $(\pm\infty)-(\pm\infty)$, $0\cdot(\pm\infty)$, $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ 予以定义. 这样一来，我们可以说，任何非空数集在广义实数系中都有上、下确界. 但是本书今后所说的“存在确界”仍然是指确界是实数的情形. 还请读者注意,我们在第一册中广泛使用过的记号∞，它既不是 $\boldsymbol{R} = (-\infty,+\infty)$ 的元素,也不是 $\boldsymbol{R}^* = [-\infty,+\infty]$ 的元素,

【例 1】 设 A, B 是非空有界实数集,且 $A\subset B$ 求证:

$$\sup A \leqslant \sup B; \quad \inf A \geqslant \inf B.$$

【证】 由确界原理 $\Rightarrow \sup A$, $\sup B$ 皆存在. 因$A\subset B \Rightarrow \sup B$是$A$的一个上界，由上确界定义 $\Rightarrow \sup A \leqslant \sup B$. 同理可证: $\inf A \geqslant \inf B$

【例 2】 设函数 f 在 D 有界，求证: