

高等学校教学用书

解析几何学教程

下 册

Н. И. 穆斯海里什維利著

高等教育出版社

高等学校教学用书



解析几何学教程

下册

И. И. 穆斯海里什維利著
中山大学几何教学小组译

高等教育出版社

本書係根據蘇聯國立技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико—теоретической литературы）出版的穆斯海里什維利（Н. И. Мухелишвили）著“解析幾何學教程”（Курс аналитической геометрии）1947年第三版增訂本譯出。原書經蘇聯高等教育部審定為綜合大學數理系教科書。

中譯本分上下兩冊出版，此為下冊，包括第七至十二章及附錄。目錄如下：七、圓錐截線的簡化方程和初步性質；八、二次曲線的投影性質、切線和極線；九、二次曲線的仿射性質和度量性質；十、不變量、二次曲線的形狀和位置的決定；十一、二次曲面的基本性質，切面、中心、直徑；十二、個別二次曲面形狀的探求，母直線、圓截口；附錄、關於一次方式和二次方式的基本知識。

本書由中山大學幾何教學小組集體翻譯。

解 析 几 何 學 教 程

下 冊

Н. И. 穆斯海里什維利著

中山大學幾何教學小組譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

（北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號）

上海大華印刷廠印刷 新華書店總經售

書號 13011·20 開本 850×1168 1/32 印張 62/16 字數 261,000

一九五四年十二月上海第一版

一九五六年七月上海第三次印刷

印數 6,501—9,000 定價(8) 1.10

下 册 目 錄

第七章 圓錐截線的簡化方程和初步性質	349
I. 圓錐截線的標準方程	349
§ 195. 橢圓的定義和它的標準方程 § 196. 橢圓形狀的研究 § 197. 雙曲線的定義和它的標準方程 § 198. 雙曲線的形狀的研究. 漸近線 § 199. 焦距的性質. 橢圓和雙曲線的準線和這些曲線的新定義 § 200. 拋物線的定義和它的標準方程	
II. 橢圓, 雙曲線, 拋物線, 作為正圓錐面的截線	367
§ 201. 正圓錐面和平面的交線 § 202. 由給定的圓錐面求給定的圓錐截線	
III. 圓錐截線方程的某些簡單形式. 相似的圓錐截線	371
§ 203. 取漸近線為坐標軸的雙曲線方程 § 204. 圓錐截線的參數表示. 逐點作圖法 § 205. 圓錐截線的極坐標方程(以焦點為極點) § 206. 取頂點為原點的圓錐截線方程 § 207. 相似的圓錐截線	
第八章 二次曲線的投影性質. 切線和極線	385
I. 二級曲線的投影分類	385
§ 208. 記號 § 209. 二級曲線的可分解和不可分解. 二級曲線的疊合 § 210. 二級曲線可分解的條件 § 211. 用投影坐標時二級曲線的典型方程. 投影的分類 § 212. 用五點決定二級曲線 § 213 二級曲線束 § 214. 巴斯卡定理 § 215. 用兩個投影線束產生二級曲線	
II. 二級曲線和直線的交點. 切線	402
§ 216. 在齊次坐標系決定二級曲線和直線的交點的方程 § 217. 二級曲線的切線 § 218. 切線作為割線的極限	
III. 極點和極線. 切線坐標方程	410
§ 219. 從平面上已知點作切線. 極點和極線 § 220. 極點和極線的另一定義. 共軛點 § 221. 二級曲線所決定的配極對應 § 222. 自配極三角形 § 223. 共軛直線. 二級曲線的切線坐標方程. 階的概念 § 224. 對偶原則應用於二級曲線的情形	
第九章 二次曲線的仿射性質和度量性質	420
I. 仿射分類. 中心, 直徑, 漸近線	420

§ 225. 二級曲線的仿射分類	§ 225a. 拋物類型的可分解曲線	§ 226. 漸近方向	§ 227. 在不齊次笛氏坐標系決定二級曲線和直線的交點的方程	§ 228. 二級曲線的中心	§ 229. 漸近線	§ 230. 二級曲線的直徑	§ 231. 直徑和切線的關係	§ 232. 直徑作為假點的極線	§ 233. 已知二級曲線的圖形求作中心和直徑. 互補的兩弦	§ 234. 有中心二級曲線的方程, 取共軛直徑為坐標軸	§ 235. 拋物類型曲線的簡化方程	§ 236. 二級曲線的方程取切線和經過切點的直徑為坐標軸
II. 主直徑. 在直角坐標系的標準方程	444											
§ 237. 主直徑	§ 238. 圓錐截線在直角笛氏坐標系的標準方程	§ 239. 圓的方程										
III. 法線. 切線的焦性	450											
§ 240. 平曲線的法線	§ 241. 橢圓切線的焦性	§ 242. 雙曲線切線的焦性	§ 243. 拋物線切線的焦性									
VI. 橢圓, 雙曲線, 拋物線的直徑的研究	457											
§ 244. 橢圓的直徑	§ 245. 雙曲線的直徑	§ 246. 拋物線的直徑										
第十章 不變量. 二次曲線的形狀和位置的決定	464											
I. 不變量	464											
§ 247. 笛氏坐標變換對於方程的影響	§ 248. 不變量的概念. 舉例	§ 249. 二級曲線方程的基本不變量.	§ 250. 在廣義笛氏坐標情形下的度量不變量	§ 251. 應用: 阿波羅尼定理								
II. 二級曲線方程的化簡	476											
§ 252. 對於中心的變換	§ 253. 用正交代換, 把二元二次方式化為典型式	§ 254. 有中心二級曲線的方程的化簡	§ 255. 沒有確定中心的曲線方程的化簡	§ 256. 一對平行直線的方程的第二化簡法. 條件不變量	§ 257. 結果的總結. 1. 二級曲線的仿射分類	§ 258. 結果的總結. 2. 從二級曲線的方程去決定它的形狀和大小	§ 259. 結果的總結. 3. 化方程為標準式並決定曲線在平面上的位置	§ 260. 兩條二級曲線相似的條件	§ 261. 兩條二級曲線全等的條件. 正交不變量 A, A_{33}, S 組成完備系的證明			
第十一章 二次曲面的基本性質. 切面, 中心, 直徑	508											
I. 投影分類. 切面	508											
§ 262. 記號	§ 263. 二級曲面的分解. 疊合條件	§ 264. 二級曲面的投影分類	§ 265. 在齊次坐標系決定直線和二級曲面的交點的方程	§ 266. 切線. 切面	§ 267. 具有橢圓點, 雙曲點, 拋物點的曲面	§ 268. 切錐面, 極						

面和極點，切面坐標方程	516
II. 二級曲面的仿射性質，中心，直徑	526
§ 269. 曲面和假平面的交線，仿射分類	§ 270. 在不齊次笛氏坐標系，決定二級曲面和直線的交點的方程
§ 271. 中心	§ 272. 直徑面
§ 273. 有中心曲面的直徑面和直徑	§ 274. 直徑面作為假點的極面
§ 275. 漸近線	
III. 度量性質，主直徑面，化方程為標準式	536
§ 276. 主直徑面和主方向	§ 277. 關於三元二次方式變換的某些一般命題
§ 278. 方程 $D(\lambda) = 0$ 的根以及和它們對應的主方向的性質	§ 279. 笛氏坐標變換對於曲面方程的影響
§ 280. 正交不變量	§ 281. 化二級曲面方程為標準式。
1. 有中心曲面	§ 282. 化二級曲面方程為標準式。
2. 沒有確定中心的曲面	§ 283. 化二級曲面的方程為標準式。
3. 結果的總結	§ 283a. 笛卡兒符號法則
第十二章 個別二次曲面形狀的探求，母直線，圓截面	558
I. 個別二級曲面形狀的探求	558
§ 284. 個別曲面的標準方程一覽表	§ 285. 平行平面和二級曲面的截面
§ 286. 二級錐面	§ 287. 橢圓面
§ 288. 單葉雙曲面	§ 289. 雙葉雙曲面
§ 290. 橢圓拋物面	§ 291. 雙曲拋物面
II. 二級曲面的母直線	576
§ 292. 一般的說明	§ 293. 單葉雙曲面的母直線
§ 294. 雙曲拋物面的母直線	§ 295. 已知三條母線，求作二級直紋曲面的方法
III. 二級曲面的圓截面	590
§ 296. 引言	§ 297. 有中心二級曲面的圓截面
§ 298. 橢圓拋物面和橢圓柱面的圓截面	
附錄 關於一次方式和二次方式的基本知識	599
I. 行列式和表(矩陣)	599
§ 1. 行列式的某些性質	§ 2. 行列式或表的秩
§ 3. 行列式不為零的一次方程系的解答	
II. 一次方式	604
§ 4. 代數方式，一次方式	§ 5. 一次方式系，一次方式的相關或無關
§ 6. 應用於在一般情形下，求解一次齊次方程系的問題	§ 6a. 特款
§ 7. 不齊次方程系的解答	§ 8. 平直代換
§ 9. 平直代換的繼續進行	

III. 雙一次方式和二次方式.....	619
§ 10. 雙一次方式與二次方式	
§ 11. 二次方式的變換	
§ 12. 化二次方式為典型式	
§ 13. 二次方式可分解為兩個一次因子的條件	
§ 14. 正交代換	
§ 15. 關於利用正交代換, 化二次方式為典型式的方法	
.....	III
.....	40
.....	45
.....	46
.....	47
.....	48
.....	49
.....	50
.....	51
.....	52
.....	53
.....	54
.....	55
.....	56
.....	57
.....	58
.....	59
.....	60
.....	61
.....	62
.....	63
.....	64
.....	65
.....	66
.....	67
.....	68
.....	69
.....	70
.....	71
.....	72
.....	73
.....	74
.....	75
.....	76
.....	77
.....	78
.....	79
.....	80
.....	81
.....	82
.....	83
.....	84
.....	85
.....	86
.....	87
.....	88
.....	89
.....	90
.....	91
.....	92
.....	93
.....	94
.....	95
.....	96
.....	97
.....	98
.....	99
.....	100

第七章 圓錐截線的簡化方程和初步性質

從代數的觀點看來，除了一級曲線（即直線）以外，當以二級曲線為最簡單的曲線。將來我們可以見到，一條（實的）二級曲線，只要它不分解為兩條直線的集合，定是橢圓，或雙曲線，或拋物線。在下面各節，我們將列舉這三種曲線的定義。它們通常總稱為圓錐截線，因為它們都是用平面去截尋常圓錐面所得的截面，這將於 §§201 至 202 說明。

我們從橢圓，雙曲線，拋物線的簡單定義開始，次第推求它們的簡單方程。

本章所討論的曲線，如果沒有相反的聲明，總是指在同一平面上的曲線。

I. 圓錐截線的標準方程

§195. 橢圓的定義和它的標準方程 橢圓是一動點的幾何軌跡，由此動點到兩個定點的距離之和為常量。在這定義裏所提及的定點，叫做橢圓的焦點。用 F 和 F' 代表焦點，而用 $2c$ 表示焦點間的距離，再設 $2a$ 代表正的常量，等於橢圓上一點 M 到兩焦點的距離的和（圖 122）。

由定義得

$$r' + r = 2a, \quad (1)$$

這裏

$$r' = |F'M|, \quad r = |FM|.$$

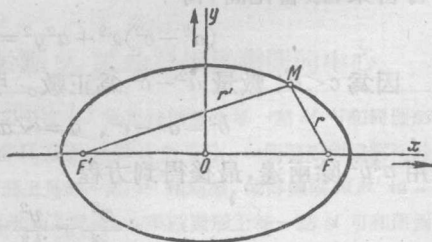


圖 122

要使這條軌跡能存在，顯然必需 $2c \leq 2a$ 。

當 $2c = 2a$ ，這條軌跡顯然為夾於 F' 和 F 中間的線段。因為對於這個情形不感興趣，我們不加以討論，將來總是假定 $2c < 2a$ ，即

$$c < a. \quad (2)$$

如果 $c = 0$ ，那末 F' 和 F 疊合，而

$$|F'M| = |FM| = a.$$

在這情形，橢圓化為圓，以 a 為半徑。故圓是橢圓的特款。

設取線段 $F'F$ 的中點為直角坐標的原點，又沿着這條線取定軸 Ox 的正向，使兩點 F' 和 F 的坐標分別為

$$(-c, 0), (c, 0).$$

由點 $M(x, y)$ 到這兩點的距離 r 和 r' ，由公式

$$r' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad (3)$$

來決定，(1)得

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \quad (4)$$

這便是在所選坐標系裏橢圓的方程。若把根號去掉，這式可以顯著地化簡。要達到這目的，先把第二個方根移到右邊，然後兩邊自乘，得

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2,$$

由此，再把方根移到左邊，其他各項移到右邊，相消得

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx. \quad (5)$$

再行自乘，跟着化簡，得

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

因為 $c < a$ ，數量 $a^2 - c^2$ 為正數。引入記號

$$b^2 = a^2 - c^2, \quad b = \sqrt{a^2 - c^2} \quad (b < a) \quad (6)$$

再用 a^2b^2 除兩邊，最後得到方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (7)$$

這叫做橢圓的標準方程。

在未利用這方程去研究橢圓的形狀之前，先舉一個簡單的作圖方法，用連續運動來作橢圓的圖，其法如下：取長度 $2a$ 而沒有伸縮性的絲線，固定它的兩端於焦點 F' , F ，用鉛筆尖把絲線拉緊，引到紙面上，沿着絲線滑動，那時筆尖畫出一個橢圓，與上述定義所規定的正相符合。

附記：在推求橢圓的標準方程時，我們必須把方程(4)裏的根號去掉，爲着這個目的，我們兩次把方程的兩邊自乘起來。就一般來說，依我們所知，由這些運算得到的方程，可能不和原來的方程同價，而變成這樣一個方程，它不但含有原來的解答，並且含有別的“額外的”解答。因此，發生一個問題：方程(7)所代表的曲線，是否含有那些不適合於原來方程(4)的點，即不適合於條件 $r'+r=2a$ 的點？我們很容易證明，這是不可能的。事實上，若把運算的次序倒轉來施行，可見凡是坐標適合方程(7)的那些點，都適合下面的條件

$$\pm r' \pm r = 2a.$$

茲證明最後的方程只有採取上邊一套符號時，才能爲實點所適合。事實上，方程 $-r' - r = 2a$ 顯然沒有解答，因爲 $r > 0$, $r' > 0$ 。同理， $r' - r = 2a$ 也沒有解答，如果 $r' < r$ ，又當 $r' \geq r$ ，這個方程也沒有解答，因爲我們知道三角形兩邊的差，總不能大於第三邊，由此推得

$$r' - r \leq 2c < 2a;$$

根據這式，可知方程 $r' - r = 2a$ 無解答。最後只剩下一個可能， $r' + r = 2a$ ，故本題得證。

§196. 橢圓的形狀的研究 前節所推得的橢圓標準方程：

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

表明一件事實：如果點 $M(x, y)$ 屬於橢圓，則各點 $M(x, -y)$, $M(-x, -y)$, $M(-x, y)$ 也都屬於這個橢圓，因爲在方程(1)裏只含有量 x, y 的平方，故把一個坐標變號，對於等式沒有影響。

這表明坐標軸 Ox 和 Oy 都是橢圓的對稱軸^①，這兩條直線可簡稱爲橢圓的軸。

由上面所說，顯見橢圓對稱於點 O ，因此 O 叫做橢圓的中心。

① 一個已知的幾何圖形稱爲對稱於某平面 Π ：如果該圖形上每一點 M 可和同圖形上另外一點 M' 相對應，使得線段 MM' 和平面 Π 垂直，且爲 Π 所平分。一個圖形稱爲對稱於某直線 Δ ：如果該圖形上每一點 M 可和同圖形上另外一點 M' 相對應，使得線段 MM' 和 Δ 垂直，且爲 Δ 所平分。最後，一個圖形稱爲對稱於某點 C ：如果該圖形上每一點 M 可和同圖形上另外一點 M' 相對應，使得線段 MM' 經過點 C ，且爲 C 所平分。在第一種情形， Π 叫做對稱平面；第二， Δ 叫做對稱軸；第三， C 叫做對稱中心或簡稱爲中心。

顯而易見，橢圓為有限的曲線。事實上，由(1)得

$$\frac{x^2}{a^2} \leq 1, \quad \frac{y^2}{b^2} \leq 1,$$

由此得 $-a \leq x \leq +a, \quad -b \leq y \leq +b$ 。

這些不等式表明橢圓全部被包含在圖 123 所表的矩形之內，圖裏

$$|OA'| = |OA| = a,$$

$$|OB'| = |OB| = b.$$

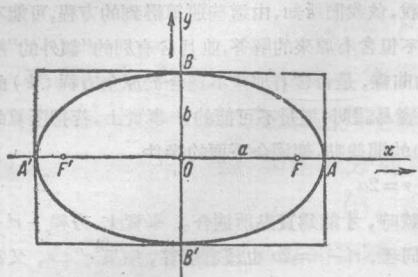


圖 123

現在更詳細地來研究橢圓的形狀，解方程(1)求 y ，得

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}. \quad (2)$$

由於這曲線的對稱性，我們只須研究在象限 $x \geq 0, y \geq 0$ 裏所

包括的那一部份。因此，只須取根號前面的正號，即取

$$y = + \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}. \quad (2a)$$

當 $x=0$ 時， $y=b$ 。當 x 遞增時，縱坐標 y 遞減，又當 $x=a$ 時， y 化爲 0。

因此，我們獲得這條曲線的一部份 BA ；其餘的部份，可以根據對稱性來補足。

看圖我們便知橢圓為封閉曲線。

距離軸 Ox 最遠的點為 B 和 B' ，位於 Oy 軸上（和 Ox 的距離等於 b ）。距離軸 Oy 最遠的點為 A 和 A' ，位於 Ox 軸上（和 Oy 的距離等於 a ）。這四點 A, A', B, B' 叫做橢圓的頂點。

數量 $2a$ 叫做橢圓的長軸， $2b$ 叫做短軸^①。數量 a 和 b 分別叫做橢

① 注意這一個“軸”字，有兩種意義：以前用作“對稱軸”的意義，所指的是全條直線；現在用作線段長度的意義，即是對稱軸上在兩頂點中間的線段。這樣兩歧的意義當然不會引起誤會，因為按照所說的內容，總可以分辨清楚。

圓的長半軸和短半軸。

如果 $a=b$ ，那末，橢圓方程化爲下式

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

即是橢圓化爲圓，以 a 爲半徑，在這情形，數量

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

(即由焦點至中心的距離)化爲零。

如果 $a \neq b$ ，數量 c 不等於零，它可作爲橢圓離開圓周的偏差的指標，叫做橢圓的離心距。實質上，橢圓的形狀，不獨依賴於 c 而且依賴於 c 和一條半軸，例如長半軸 a 的比值。

這個比值

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad (3)$$

叫做數字離心率(因爲它是抽象的量)或簡稱爲橢圓的離心率。依照公式(3)所示，橢圓的離心率總是小於1。

設 a 與 c 爲已知，那末，這個橢圓便完全決定，因爲短半軸可由公式

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{a^2 - a^2 e^2}$$

決定，由此得

$$b = a\sqrt{1 - e^2}. \quad (4)$$

習題和補充

1. 求橢圓 $4x^2 + 9y^2 = 1$ 的半軸 a, b ，離心距 c 和離心率 e 。

答：
$$a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{3}, \quad c = \frac{\sqrt{5}}{6}, \quad e = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

2. 橢圓作爲一個圓經過仿射變換後的結果。求證，可用仿射變換把一個圓變成橢圓，所用的仿射變換是沿着兩個互相垂直方向的兩個伸縮變換所組成①(參看 § 76)。

證：取圓心爲直角坐標系的原點。因此，圓的方程爲

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

① 以後 (§ 234) 將說明每個仿射變換，把圓變成橢圓(或仍舊變成圓)。

這裏 r 爲圓的半徑。上面所說的仿射變換具有形式 $x' = kx, y' = ly$, 這裏 k, l 爲常數, 把數值 $x = \frac{x'}{k}, y = \frac{y'}{l}$ 代入圓的方程, 使得這圓所變成的曲線的方程:

$$\frac{x'^2}{k^2} + \frac{y'^2}{l^2} = r^2,$$

即

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

這裏 $a = kr, b = lr$ 。故這條曲線爲橢圓。

3. 橢圓作爲一個圓的投影。求證以 a, b 爲半軸的橢圓, 可以看做一個半徑爲 a 的圓, 在另一個平面上的直角投影。這個平面和橢圓所在的平面的夾角爲 α , 這裏

$$\cos \alpha = \frac{b}{a} \quad (\text{即 } \alpha = \arccos \frac{b}{a}).$$

證: 設 Π' 爲圓的平面, Π 爲投影平面。在平面 Π' 上選取直角坐標系 $O'x'y'$, 使得軸 $O'x'$ 和平面 Π 平行, 而坐標原點 O' 和被投影的圓的中心疊合, 設 Oxy 爲 $O'x'y'$ 投到平面 Π 上的(也是直角的)坐標系。

若 $M'(x', y')$ 爲被投影的圓上任意點, 那末, 投到平面 Π 上後, 投影點 M 的坐標 x, y 顯然是 $x = x', y = y' \cos \alpha$ 。但因

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1,$$

故

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 \cos^2 \alpha} = 1,$$

即

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

由此本題得證。

§197. 雙曲線的定義和它的標準方程 雙曲線是一動點的幾何軌跡, 由此動點到兩個定點的距離之差(指絕對值)爲常量。這兩個定點叫做雙曲線的焦點, 以 F 和 F' 表示, 它們的距離以 $2c$ 表示; 自雙曲線上一點到兩焦點的距離的差的絕對值, 以 $2a$ 表示。顯然這些數值應當受條件: $2c \geq 2a$ 的限制。當 $2c = 2a$ 時, 動點顯然落在通過 F, F' 的直線上, 其軌跡爲線段 FF' 之外的各點所組成。我們撇開這情形不加討論, 以後總是假定 $c > a$ 。

由定義得(圖 124a, 124b):

$$r' - r = \pm 2a, \quad (1)$$

這裏 $r' = |F'M|$, $r = |FM|$; 當 $r' > r$ 時, 右邊取正號(圖 124a), 當

$r' < r$ 時，則取負號(圖 124b)。

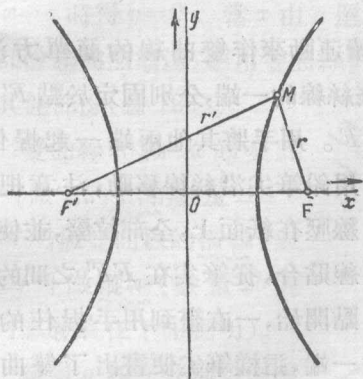


圖 124 a

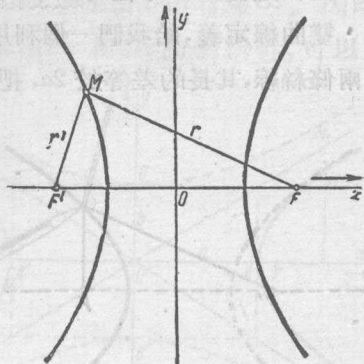


圖 124 b

由雙曲線定義，這條曲線顯然含有兩條分支，在一支上， $r' > r$ ；在另一支上， $r' < r$ 。

這也可從雙曲線的方程推得。現在我們求這方程。

我們取焦點的聯線為軸 Ox ，並取他們的中點為直角坐標系原點，選取軸的方向，使得點 F' 和點 F 的坐標分別為 $(-c, 0)$ 和 $(c, 0)$ 。

由此，方程(1)化為

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a. \quad (2)$$

把第二個根號移項到等式的右邊，然後兩邊自乘，經過淺顯化簡得(比較 §195)

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = cx - a^2. \quad (3)$$

兩邊再行自乘並化簡，得方程

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2),$$

方法和橢圓的情形完全相同，所差只是在此 $a < c$ ，引入記號

$$b^2 = c^2 - a^2, \quad b = \sqrt{c^2 - a^2} \quad (4)$$

兩邊除以數量 $a^2(a^2 - c^2) = -a^2b^2$ ，最後得

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (5)$$

這便是雙曲線方程的標準式^①。

雙曲線定義，給我們一個利用連續運動來作雙曲線的簡單方法。取兩條絲線，其長的差等於 $2a$ ，把每條絲線的一端，分別固定於點 F' 和

F 。用手將其他兩端一起握住，用鉛筆尖沿絲線移動，注意把絲線壓在紙面上，全部拉緊，並使兩線貼合，從筆尖在 $F'F'$ 之間的一點開始，一直畫到用手握住的那一端，這樣筆尖便畫出了雙曲線一支的一部份(用線愈長所畫得的部份愈大)(圖 125)。

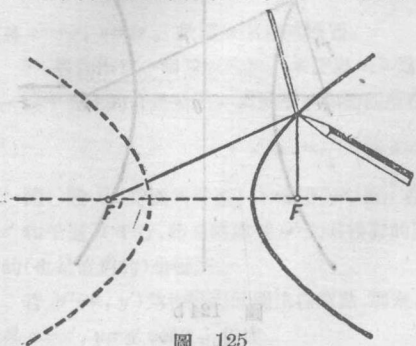


圖 125

再把兩點 F' 和 F 的地位對調，可得其他一支的一部份。

§198. 雙曲線的形狀的研究。漸近線 和橢圓的情形一樣，我們容易說明坐標軸 Ox , Oy 為雙曲線的對稱軸：它們也簡稱軸；原點 O 為雙曲線的對稱中心，因此也簡稱中心。

根據上面所說，我們只須討論雙曲線在 $x \geq 0$, $y \geq 0$ 區域內的部份便夠。

解 §197 方程(5)求 y 得

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}. \quad (1)$$

這公式說明 $x^2 \geq a^2$ 即 $x \geq a$ 或 $x \leq -a$ 是必要的條件；否則 y 便得虛解。

因此，雙曲線完全位於兩直線 $x = -a$ 和 $x = a$ 所夾平面區域之外。

現在討論雙曲線在 $y \geq 0$, $x \geq a$ 區域內的部份。此時

① 留給讀者自行證明：由方程(2)變到方程(5)，不會引起額外點(比較 §195 末的附記)。

$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

當 $x=a$ 時得 $y=0$ 。當 x 由 a 遞增到 ∞ , y 也由 0 遞增到 ∞ 。因此, 這部份趨向無窮遠; 應用雙曲線對於兩軸 Ox 和 Oy 的對稱性, 可以推得其他部份(圖 126)。

雙曲線和軸 Ox 的交點 A , 叫做它的頂點, 數量 $AA' = 2a$ 叫做雙曲線的橫軸, 數量 $2b$ 叫做縱軸 (數量 $2b$ 的幾何意義將在下面說明)。

數量 a 和 b 分別叫做橫半軸和縱半軸。

數量 $2a$ 有時也叫做雙曲線的實軸, 數量 $2b$ 為虛軸 (a 和 b 分別叫做實半軸和虛半軸)。

如果我們要求雙曲線和軸 Oy 的交點, 那末, 在(1)裏, 令 $x=0$, 得 $y = \pm ib$, 這是“虛軸”命名的由來。因此, 我們可以說: 雙曲線和軸 Oy 有兩個(虛)交點, 它們在軸 Oy 上所夾的線段的數值等於 $2ib$, 所以, 數值 $2ib$ 叫做虛軸。但如上面所述, 數量 $2b$ 通常也叫做虛軸。

數量 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ 叫做雙曲線的離心距, 而數量

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \quad (2)$$

叫做數字離心率或簡稱離心率。雙曲線的離心率, 顯然總是大於 1 。

如果 $a=b$, 那末, 便說雙曲線是等腰的。

如果要比較準確地知道雙曲線在無窮遠處的情形, 必須引入它的漸近線, 現在證明漸近線的存在。

回憶所謂曲線的漸近線, 是一條直線 (如果存在的話), 它具有下面的性質: 當一點沿着直線走向無窮遠時, 它和曲線上的點便無限地

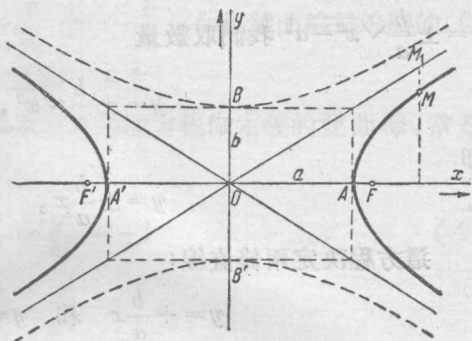


圖 126

接近。

我們容易證明，雙曲線具有兩條漸近線。事實上，我們考慮方程 (1) 便可以見到，當 x 取很大的數值時，如果我們把在根號裏面的有限數量 a^2 棄掉，不會產生很大的相對誤差，這就是說，替代了數量

$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ 我們取數量

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2},$$

即

$$y = \pm \frac{b}{a} x. \quad (3)$$

這方程決定兩條直線：

$$y = +\frac{b}{a}x \quad \text{和} \quad y = -\frac{b}{a}x,$$

即

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \quad \text{和} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0. \quad (3a)$$

現在證明這兩直線實際上都是雙曲線的漸近線。由於雙曲線的對稱性質，我們只須討論雙曲線在 $x > 0, y > 0$ 區域內的一部份便夠。設 $M(x, y)$ 為這部份上的任意點，而 $M_1(x, y_1)$ 為直線 $y_1 = +\frac{b}{a}x$ 上對應於同一橫坐標的點 (圖 126)，則得

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, \quad y_1 = \frac{b}{a}x,$$

由此得 $MM_1 = y_1 - y = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) > 0$ 。

更且有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (y_1 - y) &= \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \\ &= \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + \sqrt{x^2 - a^2})(x - \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \\ &= \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = 0, \end{aligned}$$