高等学校教学用書

解析几何学教程

下 册

Н. И. 穆斯海里什維利著

高等教育出版社

高等学校教学用書

解析几何学教程

下册

Н. И. 穆斯海里什維利著
中山大学几何教学小組譯

高等教育出版社

本書係根據蘇聯國立技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико—теоретической литературы）出版的穆斯海里什維利（Н. И. Мусхелишвили）著“解析幾何學教程”（Курс аналитической геометрии）1947 年第三版增訂本譯出。原書經蘇聯高等教育部審定爲綜合大學數理系教科書。

中譯本分上下兩册出版，此爲下册，包括第七至十二章及附錄。目錄如下：七、圓錐截線的簡化方程和初步性質；八、二次曲線的投影性質、切線和極線；九、二次曲線的仿射性質和度量性質；十、不變量、二次曲線的形狀和位置的決定；十一、二次曲面的基本性質，切面、中心、直徑；十二、個別二次曲面形狀的探求，母直線、圓截口；附錄、關於一次方式和二次方式的基本知識。

本書由中山大學幾何教學小組集體翻譯。

解析几何学教程

下　册

Н. И. 穆斯海里什維利著

中山大学几何教学小組譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

（北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號）

上海大華印刷厂印刷　　新華書店總經售

書號 13010·20　開本 850×1168 1/32　印張 9 2/16　字數 261,000

一九五四年十二月上海第一版

一九五六年七月上海第三次印刷

印數 6,501—9,000　　定價(8) ¥ 1.10

下册目錄

第七章　圓錐截線的簡化方程和初步性質

從代數的觀點看來，除了一級曲線（卽直線）以外，當以二級曲線爲最簡單的曲線。將來我們可以見到，一條（實的）二級曲線，只要它不分解爲兩條直線的集合，定是橢圓，或雙曲線，或抛物線。在下面各節，我們將列舉這三種曲線的定義。它們通常總稱爲圓錐截線，因爲它們都是用平面去截尋常圓錐面所得的截口，這將於§§201 至 202 說明。

我們從橢圓，雙曲線，抛物線的簡單定義開始，次第推求它們的簡單方程。

本章所討論的曲線，如果沒有相反的聲明，總是指在同一平面上的曲線。

I. 圓錐截線的標準方程

§195. 橢圓的定義和它的標準方程　橢圓是一動點的幾何軌跡，由此動點到兩個定點的距離之和爲常量。在這定義裏所提及的定點，叫做橢圓的焦點。用 F 和 F' 代表焦點，而用 $2c$ 表示焦點間的距離，再設 $2a$ 代表正的常量，等於橢圓上一點 M 到兩焦點的距離的和（圖 122）。

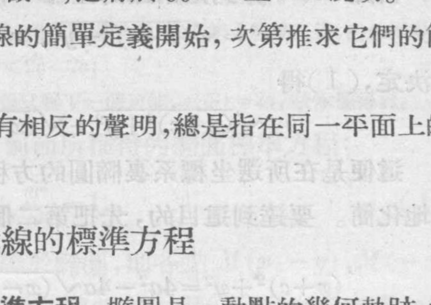

圖 122

由定義得

$$r'+r=2a,\qquad (1)$$

這裏

$$r'=|F'M|,\quad r=|FM|。$$

要使這條軌跡能存在，顯然必需 $2c \leqslant 2a$。

當 $2c=2a$，這條軌跡顯然爲夾於 F' 和 F 中間的線段。因爲對於這個情形不感興趣，我們不加以討論，將來總是假定 $2c<2a$，即

$$c<a。 \qquad (2)$$

如果 $c=0$，那末 F' 和 F 疊合，而

$$|F'M|=|FM|=a。$$

在這情形，橢圓化爲圓，以 a 爲半徑。故圓是橢圓的特款。

設取線段 FF' 的中點爲直角坐標的原點，又沿着這條線取定軸 Ox 的正向，使兩點 F' 和 F 的坐標分別爲

$$(-c, 0), \quad (+c, 0)。$$

由點 $M(x, y)$ 到這兩點的距離 r 和 r'，由公式

$$r'=\sqrt{(x+c)^2+y^2}, \quad r=\sqrt{(x-c)^2+y^2} \qquad (3)$$

來決定，(1)得

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a。 \qquad (4)$$

這便是在所選坐標系裏橢圓的方程。若把根號去掉，這式可以顯著地化簡。要達到這目的，先把第二個方根移到右邊，然後兩邊自乘，得

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2,$$

由此，再把方根移到左邊，其他各項移到右邊，相消得

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx。 \qquad (5)$$

再行自乘，跟着化簡，得

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)。$$

因爲 $c<a$，數量 a^2-c^2 爲正數。引入記號

$$b^2=a^2-c^2, \quad b=\sqrt{a^2-c^2} \quad (b<a) \qquad (6)$$

再用 a^2b^2 除兩邊，最後得到方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (7)$$

這叫做橢圓的標準方程。

在未利用這方程去研究橢圓的形狀之前，先舉一個簡單的作圖方法，用連續運動來作橢圓的圖，其法如下：取長度 $2a$ 而沒有伸縮性的絲線，固定它的兩端於焦點 F', F，用鉛筆尖把絲線拉緊，引到紙面上，沿着絲線滑動，那時筆尖畫出一個橢圓，與上述定義所規定的正相符合。

附記：在推求橢圓的標準方程時，我們必須把方程（4）裏的根號去掉，爲着這個目的，我們兩次把方程的兩邊自乘起來。就一般來說，依我們所知，由這些運算得到的方程，可能不和原來的方程同價，而變成這樣一個方程，它不但含有原來的解答，並且含有別的"額外的"解答。因此，發生一個問題：方程（7）所代表的曲線，是否含有那些不適合於原來方程（4）的點，即不適合於條件 $r'+r=2a$ 的點？我們很容易證明，這是不可能的。事實上，若把運算的次序倒轉來施行，可見凡是坐標適合方程（7）的那些點，都適合下面的條件

$$\pm r' \pm r=2a。$$

玆證明最後的方程只有採取上邊一套符號時，才能爲實點所適合。事實上，方程 $-r'-r=2a$ 顯然沒有解答，因爲 $r>0$, $r'>0$。同理，$r'-r=2a$ 也沒有解答，如果 $r'<r$，又當 $r'\geqslant r$，這個方程也沒有解答，因爲我們知道三角形兩邊的差，總不能大於第三邊，由此推得

$$r'-r\leqslant 2c<2a;$$

根據這式，可知方程 $r'-r=2a$ 無解答。最後只剩下一個可能，$r'+r=2a$，故本題得證。

§196. 橢圓的形狀的研究　前節所推得的橢圓標準方程：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

表明一件事實：如果點 $M(x, y)$ 屬於橢圓，則各點 $M(x, -y)$, $M(-x, -y)$, $M(-x, y)$ 也都屬於這個橢圓，因爲在方程（1）裏只含有量 x, y 的平方，故把一個坐標變號，對於等式沒有影響。

這表明坐標軸 Ox 和 Oy 都是橢圓的對稱軸❶，這兩條直線可簡稱爲橢圓的軸。

由上面所說，顯見橢圓對稱於點 O，因此 O 叫做橢圓的中心。

❶　一個已知的幾何圖形稱爲對稱於某平面 Π：如果該圖形上每一點 M 可和同圖形上另外一點 M' 相對應，使得線段 MM' 和平面 Π 垂直，且爲 Π 所平分。一個圖形稱爲對稱於某直線 Δ：如果該圖形上每一點 M 可和同圖形上另外一點 M' 相對應，使得線段 MM' 和 Δ 垂直，且爲 Δ 所平分。最後，一個圖形稱爲對稱於某點 C：如果該圖形上每一點 M 可和同圖形上另外一點 M' 相對應，使得線段 MM' 經過點 C，且爲 C 所平分。在第一種情形，Π 叫做對稱平面；第二，Δ 叫做對稱軸；第三，C 叫做對稱中心或簡稱爲中心。

顯而易見，橢圓為有限的曲線。事實上，由(1)得

$$\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1,\quad \frac{y^2}{b^2}\leqslant 1,$$

由此得　　$$-a\leqslant x\leqslant +a,\quad -b\leqslant y\leqslant +b。$$

這些不等式表明橢圓全部被包含在圖 123 所表的矩形之內，圖裏

$$|OA'|=|OA|=a,$$
$$|OB'|=|OB|=b。$$

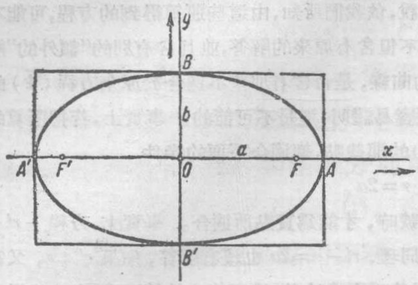

圖 123

現在更詳細地來研究橢圓的形狀，解方程(1)求 y，得

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}。\quad (2)$$

由於這曲線的對稱性，我們只須研究在象限 $x\geqslant 0, y\geqslant 0$ 裏所包括的那一部份。因此，只須取根號前面的正號，即取

$$y=+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}。\quad (2a)$$

當 $x=0$ 時，$y=b$。當 x 遞增時，縱坐標 y 遞減，又當 $x=a$ 時，y 化為 0。

因此，我們獲得這條曲線的一部份 BA；其餘的部份，可以根據對稱性來補足。

看圖我們便知橢圓為封閉曲線。

距離軸 Ox 最遠的點為 B 和 B'，位於 Oy 軸上(和 Ox 的距離等於 b)。距離軸 Oy 最遠的點為 A 和 A'，位於 Ox 軸上(和 Oy 的距離等於 a)。這四點 A, A', B, B' 叫做橢圓的頂點。

數量 $2a$ 叫做橢圓的長軸，$2b$ 叫做短軸❶。數量 a 和 b 分別叫做橢

❶ 注意這一個"軸"字，有兩種意義：以前用作"對稱軸"的意義，所指的是全條直線；現在用作線段長度的意義，即是對稱軸上在兩頂點中間的線段。這樣兩歧的意義當然不會引起誤會，因為按照所說的內容，總可以分辨清楚。

圓的長半軸和短半軸。

如果 $a=b$，那末，橢圓方程化爲下式

$$x^2+y^2=a^2,$$

即是橢圓化爲圓，以 a 爲半徑，在這情形，數量

$$c=\sqrt{a^2-b^2}$$

（即由焦點至中心的距離）化爲零。

如果 $a\neq b$，數量 c 不等於零，它可作爲橢圓離開圓周的偏差的指標，叫做橢圓的離心距。實質上，橢圓的形狀，不獨依賴於 c 而且依賴於 c 和一條半軸，例如長半軸 a 的比值。

這個比值

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \tag{3}$$

叫做數字離心率（因爲它是抽象的量）或簡稱爲橢圓的離心率。依照公式（3）所示，橢圓的離心率總是小於1。

設 a 與 c 爲已知，那末，這個橢圓便完全決定，因爲短半軸可由公式

$$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{a^2-a^2e^2}$$

決定，由此得

$$b=a\sqrt{1-e^2}。 \tag{4}$$

習題和補充

1．求橢圓 $4x^2+9y^2=1$ 的半軸 a, b，離心距 c 和離心率 e。

答：$a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{3}$，$c=\frac{\sqrt{5}}{6}$，$e=\frac{\sqrt{5}}{3}$。

2．橢圓作爲一個圓經過仿射變換後的結果。求證，可用仿射變換把一個圓變成橢圓，所用的仿射變換是沿着兩個互相垂直方向的兩個伸縮變換所組成❶（參看§76）。

證：取圓心爲直角坐標系的原點。因此，圓的方程爲

$$x^2+y^2=r^2,$$

❶ 以後（§234）將說明每個仿射變換，把圓變成橢圓（或仍舊變成圓）。

這裏 r 爲圓的半徑。上面所說的仿射變換具有形式 $x'=kx$, $y'=ly$, 這裏 k, l 爲常數，把數值 $x=\frac{x'}{k}$, $y=\frac{y'}{l}$ 代入圓的方程，便得這圓所變成的曲線的方程：

$$\frac{x'^2}{k^2}+\frac{y'^2}{l^2}=r^2,$$

卽

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1,$$

這裏 $a=kr$, $b=lr$。故這條曲線爲橢圓。

3. 橢圓作爲一個圓的投影。求證以 a, b 爲半軸的橢圓，可以看做一個半徑爲 a 的圓，在另一個平面上的直角投影。這個平面和橢圓所在的平面的夾角爲 α, 這裏

$$\cos\alpha=\frac{b}{a}\ \left(\text{卽 } \alpha=\operatorname{arc}\cos\frac{b}{a}\right)。$$

證：設 Π' 爲圓的平面，Π 爲投影平面。在平面 Π' 上選取直角坐標系 $O'x'y'$，使得軸 $O'x'$ 和平面 Π 平行，而坐標原點 O' 和被投影的圓的中心疊合，設 Oxy 爲 $O'x'y'$ 投到平面 Π 上的(也是直角的)坐標系。

若 $M'(x', y')$ 爲被投影的圓上任意點，那末，投到平面 Π 上後，投影點 M 的坐標 x, y 顯然是 $x=x'$, $y=y'\cos\alpha$。但因

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{a^2}=1,$$

故

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2\cos^2\alpha}=1,$$

卽

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

由此本題得證。

§197. 雙曲線的定義和它的標準方程 雙曲線是一動點的幾何軌跡，由此動點到兩個定點的距離之差(指絕對值)爲常量。這兩個定點叫做雙曲線的焦點，以 F 和 F' 表示，它們的距離以 $2c$ 表示；自雙曲線上一點到兩焦點的距離的差的絕對值，以 $2a$ 表示。顯然這些數值應當受條件：$2c\geqslant 2a$ 的限制。當 $2c=2a$ 時，動點顯然落在通過 F, F' 的直線上，其軌跡爲線段 FF' 之外的各點所組成。我們撇開這情形不加討論，以後總是假定 $c>a$。

由定義得(圖 124a, 124b)：

$$r'-r=\pm 2a, \tag{1}$$

這裏 $r'=|F'M|$, $r=|FM|$；當 $r'>r$ 時，右邊取正號(圖 124a)，當

$r'<r$ 時,則取負號(圖 124b)。

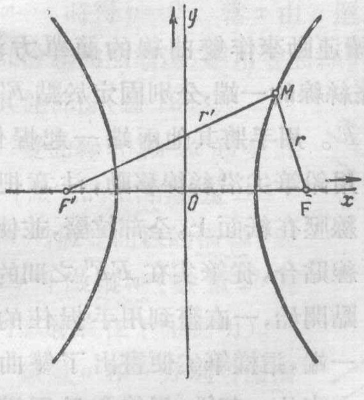

圖　124 a

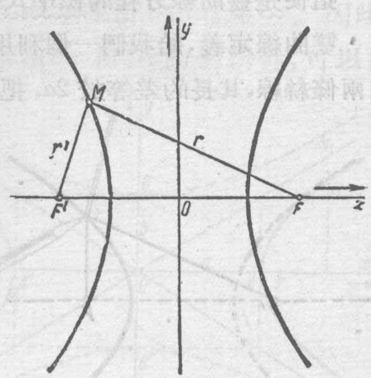

圖　124 b

由雙曲線定義,這條曲線顯然含有兩條分支,在一支上,$r'>r$;在另一支上,$r'<r$。

這也可從雙曲線的方程推得。現在我們求這方程。

我們取焦點的聯線爲軸 Ox,並取他們的中點爲直角坐標系原點,選取軸的方向,使得點 F' 和點 F 的坐標分別爲 $(-c, 0)$ 和 $(c, 0)$。

由此,方程(1)化爲

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a。\tag{2}$$

把第二個根號移項到等式的右邊,然後兩邊自乘,經過淺顯化簡得(比較 §195)

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=cx-a^2。\tag{3}$$

兩邊再行自乘並化簡,得方程

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2),$$

方法和橢圓的情形完全相同,所差只是在此 $a<c$, 引入記號

$$b^2=c^2-a^2,\quad b=\sqrt{c^2-a^2}\tag{4}$$

兩邊除以數量 $a^2(a^2-c^2)=-a^2b^2$, 最後得

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1。\qquad (5)$$

這便是雙曲線方程的標準式❶。

雙曲線定義，給我們一個利用連續運動來作雙曲線的簡單方法。取兩條絲線，其長的差等於 $2a$，把每條絲線的一端，分別固定於點 F' 和 F。用手將其他兩端一起握住，用鉛筆尖沿絲線移動；注意把絲線壓在紙面上，全部拉緊，並使兩線貼合，從筆尖在 FF' 之間的一點開始，一直畫到用手握住的那一端，這樣筆尖便畫出了雙曲線一支的一部份(用線愈長所畫得的部份愈大)(圖 125)。

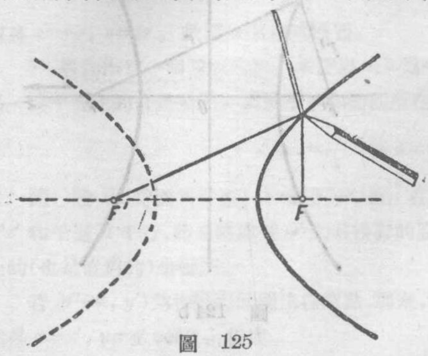

圖 125

再把兩點 F' 和 F 的地位對調，可得其他一支的一部份。

§198. 雙曲線的形狀的研究. 漸近線 和橢圓的情形一樣，我們容易說明坐標軸 Ox, Oy 爲雙曲線的對稱軸：它們也簡稱軸；原點 O 爲雙曲線的對稱中心，因此也簡稱中心。

根據上面所說，我們只須討論雙曲線在 $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ 區域內的部份便夠。

解 §197 方程(5)求 y 得

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}。\qquad (1)$$

這公式說明 $x^2\geqslant a^2$ 即 $x\geqslant a$ 或 $x\leqslant -a$ 是必要的條件；否則 y 便得虛解。

因此，雙曲線完全位於兩直線 $x=-a$ 和 $x=a$ 所夾平面區域之外。

現在討論雙曲線在 $y\geqslant 0$, $x\geqslant a$ 區域內的部份。此時

❶ 留給讀者自行證明：由方程(2)變到方程(5)，不會引起額外點(比較 §195 末的附記)。

$$y=+\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}。$$

當 $x=a$ 時得 $y=0$。當 x 由 a 遞增到 ∞，y 也由 0 遞增到 ∞。因此，這部份趨向無窮遠；應用雙曲線對於兩軸 Ox 和 Oy 的對稱性，可以推得其他部份(圖 126)。

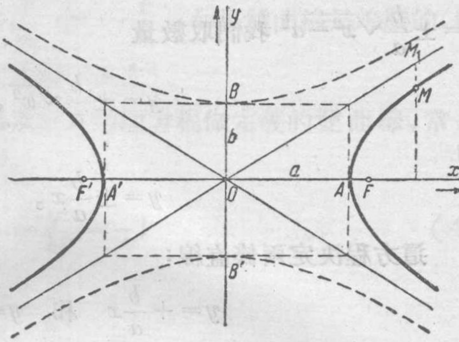

圖 126

雙曲線和軸 Ox 的交點 A，叫做它的頂點，數量 $AA'==2a$ 叫做雙曲線的橫軸，數量 $2b$ 叫做縱軸(數量 $2b$ 的幾何意義將在下面說明)。

數量 a 和 b 分別叫做橫半軸和縱半軸。

數量 $2a$ 有時也叫做雙曲線的實軸，數量 $2b$ 爲虛軸(a 和 b 分別叫做實半軸和虛半軸)。

如果我們要求雙曲線和軸 Oy 的交點，那末，在(1)裏，令 $x=0$，得 $y=\pm ib$，這是"虛軸"命名的由來。因此，我們可以說：雙曲線和軸 Oy 有兩個(虛)交點，它們在軸 Oy 上所夾的線段的數值等於 $2ib$，所以，數值 $2ib$ 叫做虛軸。但如上面所述，數量 $2b$ 通常也叫做虛軸。

數量 $c=\sqrt{a^2+b^2}$ 叫做雙曲線的離心距，而數量

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} \tag{2}$$

叫做數字離心率或簡稱離心率。雙曲線的離心率，顯然總是大於 1。

如果 $a=b$，那末，便說雙曲線是等腰的。

如果要比較準確地知道雙曲線在無窮遠處的情形，必須引入它的漸近線，現在證明漸近線的存在。

回憶所謂曲線的漸近線，是一條直線(如果存在的話)，它具有下面的性質：當一點沿着直線走向無窮遠時，它和曲線上的點便無限地

接近。

我們容易證明,雙曲線具有兩條漸近線。事實上,我們考慮方程(1)便可以見到,當 x 取很大的數值時,如果我們把在根號裏面的有限數量 a^2 棄掉,不會產生很大的相對誤差,這就是說,替代了數量 $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ 我們取數量

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2},$$

即

$$y=\pm\frac{b}{a}x。\tag{3}$$

這方程決定兩條直線:

$$y=+\frac{b}{a}x \quad 和 \quad y=-\frac{b}{a}x,$$

即

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0 \quad 和 \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0。\tag{3a}$$

現在證明這兩直線實際上都是雙曲線的漸近線。由於雙曲線的對稱性質,我們只須討論雙曲線在 $x>0$, $y>0$ 區域內的一部份便夠。設 $M(x, y)$ 爲這部份上的任意點,而 $M_1(x, y_1)$ 爲直線 $y_1=+\frac{b}{a}x$ 上對應於同一橫坐標的點(圖 126),則得

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2},\ y_1=\frac{b}{a}x,$$

由此得
$$MM_1=y_1-y=\frac{b}{a}(x-\sqrt{x^2-a^2})>0。$$

更且有

$$\lim_{x\to\infty}(y_1-y)=\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-a^2})=$$

$$=\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\sqrt{x^2-a^2})(x-\sqrt{x^2-a^2})}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=$$

$$=\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=0,$$