

高等学校试用教材

实变函数 与泛函分析概要

第二册

郑维行 王声望 编

人民教育出版社

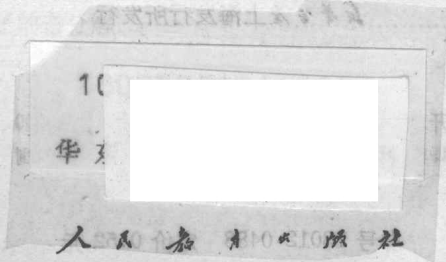
017/38.02

高等学校试用教材

实变函数 与泛函分析概要

第二册

郑维行 王声望 编



人民教育出版社

内 容 提 要

全书共有八章,分两册出版.

本书为第二篇,系后三章的内容,讲述泛函分析的一些基本内容,如距离空间、赋范线性空间、希尔伯特空间等概念,线性分析的几条基本定理,全连续算子的黎斯-邵德尔理论,完备内积空间中有界自伴算子的谱论初步等.

本书可作为综合大学数学、计算数学专业的教材,高等师范院校也可选用.

高等学校试用教材

实变函数与泛函分析概要

第 二 册

郑维行 王声望 编

*

人民教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

浙江洛舍印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 7 字数 168,000

1980年8月第1版 1980年12月第1次印刷

印数 1—16,000

书号 13012·0488 定价 0.52 元

目 录

第 二 篇

第六章 距离空间

§ 1 距离空间·可分性·完备性	1
§ 2 紧性	26
§ 3 压缩映射(不动点)原理	40
§ 4 拓扑空间大意	46
第六章习题	52

第七章 赋范线性空间及线性算子

§ 1 赋范线性空间的定义及例	55
§ 2 有界线性算子	70
§ 3 有界线性泛函的存在性·共轭空间·共轭算子	98
§ 4 巴拿赫定理·闭图象定理·共鸣定理	118
§ 5 全连续算子	139
第七章习题	153

第八章 希尔伯特空间及自伴算子

§ 1 内积空间的定义及其性质	159
§ 2 有界自伴算子的谱分解	181
第八章习题	213
参考书目与文献	218

第二篇

第六章 距离空间

§ 1. 距离空间·可分性·完备性

在前面几章中, 我们陆续学习了 n 维欧几里得空间 R^n , L^2 空间, L^p 空间等. 以 R^n 为例, 我们在其中定义了距离 ρ (见第一章 15 页), 它满足下面三个条件:

- (i) 非负性: $\rho(x, y) \geq 0$; $\rho(x, y) = 0$ 的充要条件 $x = y$,
- (ii) 对称性: $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
- (iii) 三角不等式: 对任何 $z \in R^n$, 有 $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

如果我们仔细分析一下 R^n 中的许多重要概念 (如收敛概念) 与结论 (如极限的唯一性), 就可以发现, 实质上它们仅与距离 ρ 的性质 (i) — (iii) 有关. 又以第五章中介绍过的 L^2 空间、 L^p 空间为例, 虽然我们在其中只定义了范数, 还没有明确地定义距离, 但只要在 L^2 中令

$$\rho(x, y) = \left(\int_E |x(t) - y(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (x(t), y(t) \in L^2), \quad (*)$$

则由第五章 § 1 可知 $\rho(x, y)$ 仍然满足上面的性质 (i) — (iii). 同样地, 在 L^p 中令

$$\rho(x, y) = \left(\int_E |x(t) - y(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad (x(t), y(t) \in L^p), \quad (**)$$

则由第五章 § 1 可知它也满足上面的性质 (i) — (iii). 我们称 (*),

(**)分别为 L^2 、 L^p 上的距离. 通过第五章的学习, 读者不难发现, L^2 、 L^p 中的收敛概念以及其他与之有关的概念和结论, 实质上与它们中的距离(*)、(**)能够满足性质(i)—(iii)有关. 因此, 为了在一般的非空集合上引进距离, 应当以性质(i)—(iii)为基础. 大家将会看到, 在一般的距离空间中, 有很多与 R^n 相似的性质. 但由于距离空间是一些具体空间如 R^n 等的进一步提高与抽象, 故也有很多本质的不同.

1.1 距离空间的定义及例

定义 1.1 设 X 是由某些元素组成的非空集合, 对于其中任意两个元素 x, y , 按照一定的法则对应于一个实数 $\rho(x, y)$, 满足

(i) 非负性: $\rho(x, y) \geq 0$; $\rho(x, y) = 0$ 的充要条件是 $x = y$,

(ii) 对称性: $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,

(iii) 三点不等式: $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

则称 $\rho(x, y)$ 为 x, y 的距离, 而称 X 是以 ρ 为距离的距离空间. 距离空间中的元素又叫做点. X 中的非空子集 A 按照距离 ρ 显然也是一个距离空间, 叫做 X 的子空间.

值得注意的是, 在任何一个非空集合 X 上, 我们都可以定义距离. 例如对任一 $x \in X$, 规定 $\rho(x, x) = 0$, 对任何 $y \in X$, 只要 $y \neq x$, 规定 $\rho(x, y) = 1$, 显然这样定义的 ρ 满足距离的全部条件, 因此 X 按照距离 ρ 成为一个距离空间, 我们称这种距离空间是离散的.

例 1 (见第一章) n 维欧氏空间 R^n . R^n 是由所有 n 维矢量

$$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

组成的集合, 此处 $\xi_k (k=1, 2, \dots, n)$ 都是实数. 我们已经指出在 R^n 中可以定义点 $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ 与点 $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ 的距离如下:

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k - \eta_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1)$$

则 ρ 满足定义 1.1 中的全部条件. 在第一章中, 我们没有逐一验证这些条件, 为清楚起见今以三点不等式为例进行验证. 为此先证明 哥西 (Cauchy) 不等式:

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2. \quad (2)$$

其中 a_k, b_k ($k=1, 2, \dots, n$) 为实数. 任取实数 λ , 则

$$0 \leq \sum_{k=1}^n (a_k + \lambda b_k)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2\lambda \sum_{k=1}^n a_k b_k + \lambda^2 \sum_{k=1}^n b_k^2,$$

右端是 λ 的二次三项式, 它对 λ 的一切实数值都是非负的, 故其判别式不会大于零, 即:

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2,$$

所以哥西不等式成立. 由哥西不等式可得

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 &= \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k + \sum_{k=1}^n b_k^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^n b_k^2 \\ &= \left[\left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2. \end{aligned} \quad (2')$$

在 R^n 中任取 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, 并在 (2') 中令 $a_k = x_k - z_k$, $b_k = z_k - y_k$ ($k=1, 2, \dots, n$), 立即得到三点不等式:

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

因此 R^n 按距离 (1) 是一个距离空间.

如果 R^n 中每个点的坐标是复数, 距离仍由 (1) 定义, 则 R^n 仍

是一个距离空间. 今后我们称 R^n 赋以距离 (1) 且 R^n 中点的坐标均为实数的情形为 n 维实欧几里得空间, 称 R^n 赋以距离 (1) 且 R^n 中点的坐标可以是复数的情形为 n 维复欧几里得空间, 而称 (1) 为 欧几里得距离.

在集合 R^n 中, 我们还可以引入如下的距离:

$$\rho_1(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k - \eta_k|, \quad (1')$$

则 ρ_1 也满足距离的全部条件, 故 R^n 按照 ρ_1 也是一个距离空间 (见习题 1).

上述例 1 告诉我们, 在一个集合中, 定义距离的方式不是唯一的. 一般地说, 如果在一个非空集合 X 中定义了距离 ρ 与 ρ_1 , 当 $\rho(x, y) \neq \rho_1(x, y)$ 时, 那么 X 按照距离 ρ 与按照距离 ρ_1 所成的距离空间必须看成是不同的. 因此在例 1 中, R^n 按照 (1) 定义的距离与按照 (1') 定义的距离是两个不同的距离空间.

例 2 空间 $C[a, b]$ 考虑定义在 $[a, b]$ 上所有连续函数 $x(t)$ 组成的集合, 这个集合记为 $C[a, b]$. 对于 $C[a, b]$ 中任意两个元素 $x(t)$, $y(t)$, 定义它们的距离为

$$\rho(x, y) = \max_{a < t < b} |x(t) - y(t)|, \quad (3)$$

则 $C[a, b]$ 按照距离 (3) 成为一个距离空间. 事实上, 距离的条件 (i) 与 (ii) 都是明显的. 我们仅验证三点不等式. 设 $x(t)$, $y(t)$, $z(t) \in C[a, b]$, 则

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &\leq |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)| \\ &\leq \max_{a < t < b} |x(t) - z(t)| + \max_{a < t < b} |z(t) - y(t)| \\ &= \rho(x, z) + \rho(z, y), \end{aligned}$$

因 $\rho(x, z)$, $\rho(z, y)$ 都是与 t 无关的实数, 故

$$\rho(x, y) = \max_{a < t < b} |x(t) - y(t)| \leq \rho(x, z) + \rho(z, y),$$

三点不等式(iii)成立, 因此 $C[a, b]$ 按照距离(3)确为距离空间.

例3 空间 $L^2[a, b]$ 、 $L^p[a, b]$ 在 $L^2[a, b]$ 、 $L^p[a, b]$ 中分别定义距离

$$\rho(x, y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (x(t), y(t) \in L^2[a, b]), \quad (4)$$

$$\rho(x, y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad (x(t), y(t) \in L^p[a, b]), \quad (4')$$

在本节的引言中已指出, 它们满足距离的全部条件, 故 $L^2[a, b]$ 、 $L^p[a, b]$ 都是距离空间, 详细证明实质上在第五章 §1 中已经给出.

例4 空间 $L^\infty[a, b]$ 我们称定义在可测集 E 上的可测函数是本性有界的, 是指除去 E 中的某个零测度集外, 在它的补集上是有界的. 令 $L^\infty[a, b]$ 表示在 $[a, b]$ 上本性有界可测函数的全体, 凡是几乎处处相等的函数看作同一元素. 在 $L^\infty[a, b]$ 中定义距离如下:

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \inf_{\substack{mE_0=0 \\ E_0 \subset [a, b]}} \left\{ \sup_{t \in [a, b] - E_0} |x(t) - y(t)| \right\} \\ &= \text{varisup}_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|. \end{aligned}$$

需要验证 ρ 确实满足距离的三个条件. 我们只验证三点不等式. 设 $x, y, z \in L^\infty[a, b]$, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $E_0, E_1 \subset [a, b]$, $mE_0 = mE_1 = 0$, 使

$$\sup_{t \in [a, b] - E_0} |x(t) - z(t)| \leq \rho(x, z) + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sup_{t \in [a, b] - E_1} |z(t) - y(t)| \leq \rho(z, y) + \frac{\varepsilon}{2},$$

于是

$$\begin{aligned}
\rho(x, y) &\leq \sup_{t \in [a, b] - (E_0 \cup E_1)} |x(t) - y(t)| \\
&\leq \sup_{t \in [a, b] - (E_0 \cup E_1)} |x(t) - z(t)| \\
&\quad + \sup_{t \in [a, b] - (E_0 \cup E_1)} |z(t) - y(t)| \\
&\leq \sup_{t \in [a, b] - E_0} |x(t) - z(t)| + \sup_{t \in [a, b] - E_1} |z(t) - y(t)| \\
&\leq \rho(x, z) + \rho(z, y) + \varepsilon,
\end{aligned}$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 得到

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y),$$

即三点不等式成立. 因此 $L^\infty[a, b]$ 按照所定义的距离确为距离空间.

有了距离空间的概念, 就可以象数学分析一样定义点列的收敛概念.

定义 1.2 设 $\{x_n\}$ 为距离空间 X 中的一个点列, 这里 $n=1, 2, 3, \dots$, 以后如无特别声明, 均假定 n 取一切自然数. 如果当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\rho(x_n, x_0) \rightarrow 0$, 就称点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0 , 记为

$$x_n \rightarrow x_0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{或} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0.$$

定理 1.1 距离空间 X 中的点列 $\{x_n\}$ 最多只能收敛于一个点, 因此收敛点列的极限是唯一的. 又若 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0 , 那么对任一自然数列 $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$, 点列 $\{x_{n_k}\}$ (叫做 $\{x_n\}$ 的子列) 也收敛于 x_0 .

证 先证定理的第一部分. 设 $\{x_n\}$ 收敛于两个点 x_0, y_0 , 则对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在自然数 N , 使得当 $n > N$ 时,

$$\rho(x_n, x_0) < \varepsilon, \quad \rho(x_n, y_0) < \varepsilon,$$

由三点不等式得

$$\rho(x_0, y_0) \leq \rho(x_0, x_n) + \rho(x_n, y_0) < 2\varepsilon \quad (n > N).$$

因 ε 是任给的, 故 $\rho(x_0, y_0) = 0$, 于是 $x_0 = y_0$, 这表明 $\{x_n\}$ 最多只能

收敛于一个点. 由此可知收敛点列的极限是唯一的.

其次证明定理的第二部分. 设 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0 , 于是对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 当 $n > N$ 时, $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon$. 对于 $n_k > N$, 显然也有 $\rho(x_{n_k}, x_0) < \varepsilon$, 故 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 x_0 .

现在考察例 1、例 2 的空间 R^n 及 $C[a, b]$ 中的收敛概念究竟意味着什么?

对于 R^n 来说, 其中的点列 $\{x^{(m)}\} = \{(\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \dots, \xi_n^{(m)})\}$ 按照 (1) 式定义的距离与按照 (1') 式定义的距离收敛于 $x^{(0)} = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_n^{(0)})$ 的充要条件都是 $x^{(m)}$ 的每个坐标收敛于 $x^{(0)}$ 的相应坐标.

我们只证第一种情形. 假定 R^n 上按照 (1) 式定义了距离, 由

$$|\xi_i^{(m)} - \xi_i| \leq \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k^{(m)} - \xi_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \rho(x^{(m)}, x),$$

其中 $i=1, 2, \dots, n$, 容易看出当 $\rho(x^{(m)}, x) \rightarrow 0$ 时, $|\xi_i^{(m)} - \xi_i| \rightarrow 0$ 对 $i=1, 2, \dots, n$ 都成立.

反之, 由

$$\begin{aligned} \rho(x^{(m)}, x) &= \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k^{(m)} - \xi_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |\xi_1^{(m)} - \xi_1| + \dots + |\xi_n^{(m)} - \xi_n|, \end{aligned}$$

并注意到 n 是一个固定的自然数, 容易看出, 当 $|\xi_i^{(m)} - \xi_i| \rightarrow 0$ 对 $i=1, 2, \dots, n$ 都成立时, 必定有 $\rho(x^{(m)}, x) \rightarrow 0$.

至于 R^n 按照 (1') 定义距离的情形, 留给读者作为练习.

由此可见, R^n 按照 (1) 及 (1') 定义的距离所导出的收敛性是一致的.

对于 $C[a, b]$ (距离由 (3) 定义) 来说, $\{x_n(t)\}$ 收敛于 $x_0(t)$ 的充要条件是: 作为函数列的 $\{x_n(t)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $x_0(t)$. 事实上, 设 $\{x_n(t)\}$ 按照距离 (3) 收敛于 $x_0(t)$, 即 $\rho(x_n, x_0) \rightarrow 0$, 也

就是当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\max_{a < t < b} |x_n(t) - x_0(t)| \rightarrow 0.$$

这意味着对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 当 $n > N$ 时,

$$\max_{a < t < b} |x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon,$$

因此对所有的 $t \in [a, b]$, 只要 $n > N$ (N 与 t 无关而仅与 ε 有关), 就有

$$|x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon,$$

即 $\{x_n(t)\}$ 一致收敛于 $x_0(t)$.

反之, 设 $\{x_n(t)\}$ 作为函数列一致收敛于 $x_0(t)$, 则对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 N (N 与 t 无关仅与 ε 有关) 使得当 $n > N$ 时, 不等式

$$|x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon$$

对于所有的 $t \in [a, b]$ 一致地成立, 于是

$$\max_{a < t < b} |x_n(t) - x_0(t)| \leq \varepsilon \quad (n > N),$$

即 $\rho(x_n, x_0) \leq \varepsilon$, 因此 $\rho(x_n, x_0) \rightarrow 0$, 这表明 $\{x_n(t)\}$ 作为空间 $C[a, b]$ 中的点列收敛于 $x_0(t)$.

在 $C[a, b]$ 中还可以定义其他的距离. 例如在 $C[a, b]$ 中定义 ρ_1 如下:

$$\rho_1(x, y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (x(t), y(t) \in C[a, b]). \quad (5)$$

容易看出, $C[a, b]$ 按照 ρ_1 是 $L^2[a, b]$ 的一个子空间. 在 $C[a, b]$ 中取函数列

$$x_n(t) = \frac{1}{(b-a)^n} (t-a)^n \quad (t \in [a, b], n=1, 2, \dots, n),$$

由勒贝格控制收敛定理(第4章定理3.4)不难证明, $\{x_n(t)\}$ 按照距离 ρ_1 收敛于 $C[a, b]$ 中的元 $x_0(t) \equiv 0$, 但 $\{x_n(t)\}$ 显然不一致收

敛于 $x_0(t)$, 因此在 $C[a, b]$ 中按照 ρ_1 导出的收敛概念不等价于一致收敛.

以上关于 R^n 、 $C[a, b]$ 的讨论表明了: 如果在一个非空集合 X 上定义了两个距离 ρ 和 ρ_1 , 那么按照 ρ 和 ρ_1 在 X 中导出的收敛概念, 可以是一致的也可以是不一致的.

综上所述, 对于距离空间, 我们应当注意:

1° 对于任何一个非空集合, 我们总可以定义距离. 但是, 一般说来, 我们应当根据该集合的特点适当地引进距离以充分反映这些特点(例如对 $C[a, b]$, 我们常常用(3)式定义距离, 对于 $L^2[a, b]$ 、 $L^p[a, b]$, 我们常常用(4)及(4')式定义距离), 只有在理论上或实践上才有较大的意义.

2° 定义距离的方式一般说不是唯一的.

3° 如果一个非空集合上定义了两个距离, 那么由它们导出的收敛概念可以是一致的也可以是不一致的.

1.2 距离空间中的点集 类似于欧几里得空间的情形, 在一般的距离空间中也可以引进邻域、开集、闭集等一系列基本概念. 关于欧几里得空间中的邻域、开集、闭集等概念, 在第一章中已作了详细讨论. 这里将根据一般距离空间的特点引进这些概念, 因此在叙述的方式上将略有不同, 但实质上并无区别, 有的性质的证明也从略了.

距离空间 X 中的点集

$$\{x: \rho(x, x_0) < r\} \quad (r > 0) \quad (6)$$

叫做以 x_0 为中心、以 r 为半径的开球, 这里 x_0 是 X 中一给定的点. 如果在(6)式中将“ $<$ ”换成“ \leq ”, 则相应的点集叫做以 x_0 为中心、以 r 为半径的闭球. 上述开球与闭球分别用 $S(x_0, r)$ 、 $\bar{S}(x_0, r)$ 表示. 以 x_0 为中心、以正数 r 为半径的开球又称为 x_0 的

一个球形邻域, 简称为邻域.

有了邻域的概念, 便可以引进开集、闭包、闭集等概念.

设 X 是一个距离空间, $G \subset X$, $x \in X$. 如果存在 x 的一个球形邻域 $S(x, r) \subset G$, 则称 x 是 G 的内点. 显然 G 的内点都属于 G . 如果 G 中的一切点都是它的内点, 则称 G 为开集.

设 G 是包含点 x 的开集, 我们也称 G 为 x 的一个邻域.

由定义立刻知道, X 中的任何开集一定是某些开球 (可能是无穷多个) 的并. 而任何一个开球本身也是开集.

定理 1.2 设 X 是距离空间, 则 X 中的开集具有下列性质:

- (i) 空间 X 与空集 \emptyset , 都是开集;
- (ii) 任意多个开集的并是开集;
- (iii) 有限个开集之交是开集.

由于几乎可以逐字逐句重复第一章定理 3.1 的证明, 故本定理的证明从略.

设 X 是距离空间. $A \subset X$, 点 x_0 叫做 A 的接触点, 是指对任给的 $\varepsilon > 0$, x_0 的球形邻域 $S(x_0, \varepsilon)$ 中含有 A 中的点, 即

$$S(x_0, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

集 A 的全部接触点组成的集叫做 A 的闭包, 记为 \bar{A} . 如果点 x_0 的任一球形邻域中必含有 $A - \{x_0\}$ 中的点, 则称 x_0 为 A 的聚点或极限点. 若 $x_0 \in A$ 但不是 A 的聚点, 则称 x_0 为 A 的孤立点.

容易看出, 集合 A 的闭包 \bar{A} 刚好由 A 的全部聚点 (可能属于 A 也可能不属于 A) 与 A 的全部孤立点 (必属于 A) 所组成.

例 5 设 X 是一维欧几里得空间 R^1 . $A = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\}$, 则对于每个 $n (n=1, 2, 3, \dots)$, $\frac{1}{n}$ 都是 A 的孤立点, 0 是 A 的聚点, 但不属于 A . 若 A 是区间 $(0, 1]$, 则闭区间 $[0, 1]$ 中的一切点都是 A 的聚点, 其中 0 不属于 A , A 没有孤立点. $(0, 1)$

中的一切点都是 A 的内点.

下面的定理阐述了闭包的性质.

定理 1.3 设 X 是距离空间, A, B 都是 X 的子集, 则有:

(i) $A \subset \bar{A}$;

(ii) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$;

(iii) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$;

(iv) $\bar{\emptyset} = \emptyset$.

证 (i) 与 (iv) 是明显的, 只需证明 (ii) 与 (iii).

(ii) 的证明. 由 (i) 显然有 $A \subset \bar{A}$. 今设 $x_0 \in \bar{A}$, 那末对任给的 $\varepsilon > 0$, $S(x_0, \varepsilon)$ 中必含有 A 中的点, 任取一个这样的点, 记为 y_0 , 令 $\delta = \varepsilon - \rho(x_0, y_0)$, 则 $\delta > 0$, 因 $y_0 \in A$, 故 $S(y_0, \delta)$ 中含有 A 的点. 由于

$$S(x_0, \varepsilon) \supset S(y_0, \delta),$$

故 $S(x_0, \varepsilon)$ 中含有 A 的点, 这正好说明 $x_0 \in \bar{A}$, 故 $\bar{A} = \bar{\bar{A}}$.

(iii) 由于 $A \subset A \cup B$, 故 $\bar{A} \subset \overline{A \cup B}$, 同理 $\bar{B} \subset \overline{A \cup B}$, 于是

$$\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}.$$

现在证明 $\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$. 设 $x_0 \in \overline{A \cup B}$, 于是对于任给的 $\varepsilon > 0$,

$$S(x_0, \varepsilon) \cap (A \cup B) \neq \emptyset. \quad (7)$$

假定 x_0 既不是 A 的接触点也不是 B 的接触点, 那末由定义, 必存在正数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 使

$$S(x_0, \varepsilon_1) \cap A = \emptyset, \quad S(x_0, \varepsilon_2) \cap B = \emptyset.$$

取 $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, 则

$$S(x_0, \varepsilon) \cap (A \cup B) = \emptyset,$$

与 (7) 矛盾, 故必然有 x_0 或者是 A 的接触点或者是 B 的接触点, 这表明 $\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$, 因此 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$. 证毕.

设 X 是距离空间. $A \subset X$, 如果 $A = \bar{A}$, 则称 A 是闭集. 由定理 1.3(ii), 对任何子集 $A \subset X$, 它的闭包 \bar{A} 是闭集. 又 X 中的

任何闭球也是闭集。

容易证明, $A \subset X$ 为闭集的充要条件是 $X - A$ 是开集, 于是由定理 1.2, 立刻有

定理 1.4 设 X 为距离空间, 则

- (i) 空间 X 及空集 \emptyset 都是闭集;
- (ii) 任意多个闭集的交是闭集;
- (iii) 有限多个闭集的并是闭集。

证明从略。

由于集合 X 的任意性(只要非空)以及在 X 上定义距离的多样性, 在一般的距离空间 X 中的开集、闭集将出现不同于欧几里得空间的新情况。

例如当 X 是离散的距离空间时, 对任何 $x \in X$, 以 x 为中心、以 $\frac{1}{2}$ 为半径的开球只含 x , 因此 X 中的每一个单元素集都是开集, 再由开集的性质及开集与闭集的关系, 可知每个单元素集又都是闭集。于是每个单元素集是既开且闭的集。这种情况在欧几里得空间中不可能出现。对于欧几里得空间来说, 其中的既开且闭的集只有空间本身与空集。

又如, 对集合 $X = (0, 1] \cup [2, 3)$, 在其中定义距离

$$\rho(x, y) = |x - y| \quad (x, y \in X),$$

则 $(0, 1]$, $[2, 3)$ 都是 X 中既开且闭的集, X 中以 1 为中心、以 $\frac{1}{2}$ 为半径的开球是区间 $(\frac{1}{2}, 1]$, 如此等等。

1.3 可分的距离空间 在第五章 § 2 中已定义了 L^p 空间的可分性, 现将这一概念加以推广, 在一般的距离空间中引入可分的概念。现在先引入稠密的概念。

△ 定义 1.3 设 A, B 均为距离空间 X 的子集。如果 $\bar{B} \supset A$, 就

称 B 在 A 中稠密.

容易证明, 稠密的概念可以换成下面几种等价的说法:

1° 对于任意 $x \in A$ 以及任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 B 中的点 y 使 $\rho(x, y) < \varepsilon$.

2° 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 以 B 中的每个点为中心、以 ε 为半径的全部开球的并包含 A , 这时我们也说这些开球组成的集类覆盖 A ①.

3° 对于任意的 $x \in A$, 存在 B 中的点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x . 在第五章中, 对 L^p 空间引入稠密概念时, 就是用的这一说法.

应当注意, 在稠密的定义中, 并不要求 $B \subset A$, 甚至 B 与 A 可以没有公共点.

利用稠密的概念可以定义距离空间的可分性.

定义 1.4 距离空间 X 叫做可分的, 是指在 X 中存在一个稠密的可列子集. $A \subset X$ 叫做可分的, 是指存在 X 中的可列子集 B , 使 B 在 A 中稠密, 即 $\bar{B} = A$.

欧氏空间 R^n 是可分的, 因为坐标为有理数的点组成的集构成 R^n 的一个可列稠密子集.

空间 $C[a, b]$ 是可分的, 因为利用第五章中的伯恩斯坦定理可以证明: 具有有理系数的多项式的全体 P_0 在 $C[a, b]$ 中稠密, 而 P_0 是可列集.

空间 $L^p[a, b]$ ($p \geq 1$) 是可分的, 这在第五章 § 2 中已经证明.

存在着不可分的距离空间. 例如 $L^\infty[a, b]$ 就是不可分的距离空间. 考察 $L^\infty[a, b]$ 中如下的函数

$$x_s(t) = \begin{cases} 1 & a \leq t \leq s \\ 0 & s < t \leq b \end{cases} \quad (s \in [a, b])$$

① 关于覆盖的一般定义将在后面定义 2.4 中给出.