上海大学出版社

2005年上海大学博士学位论文 111

凸体几何极值问题

● 作 者： 赵 长 健

● 专 业： 运 筹 学 与 控 制 论

● 导 师： 冷 岗 松

上海大学出版社

2005年上海大学博士学位论文 111

凸体几何极值问题

● 作 者：赵 长 健

● 专 业：运 筹 学 与 控 制 论

● 导 师：冷 岗 松

图书在版编目(CIP)数据

2005年上海大学博士学位论文.第2辑/博士论文编辑部编.—上海：上海大学出版社，2009.6

ISBN 978-7-81118-367-2

Ⅰ.2… Ⅱ.博… Ⅲ.博士—学位论文—汇编—上海市—2005 Ⅳ.G643.8

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第180878号

2005年上海大学博士学位论文

——第2辑

上海大学出版社出版发行

(上海市上大路99号 邮政编码200444)

(http://www.shangdapress.com 发行热线66135110)

出版人：姚铁军

*

南京展望文化发展有限公司排版

上海华业装潢印刷厂印刷 各地新华书店经销

开本890×1240 1/32 印张274.25 字数7641千

2009年6月第1版 2009年6月第1次印刷

印数：1～400

ISBN 978-7-81118-367-2/G·490 定价：980.00元(49册)

Shanghai University Doctoral Dissertation (2005)

Extremal Problems in Convex Bodies Geometry

Candidate: Zhao Changjian

Major: Operations Research & Cybernetics

Supervisor: Leng Gangsong

Shanghai University Press

· Shanghai ·

上 海 大 学

本文经答辩委员会全体委员审查，确认符合上海大学博士学位论文质量要求.

答辩委员会签名：

主任：杨　路　教授，华东师范大学软件学院　200062

委员：曾振柄　教授，华东师范大学　200062

　　　张卫国　教授，上海理工大学数学系　200093

　　　周盛凡　教授，上海大学数学系　200444

　　　王汉兴　教授，上海大学数学系　200444

导师：冷岗松　教授，上海大学数学系　200444

评阅人名单：

杨　路　教授，华东师范大学软件学院　200062
任德麟　教授，武汉科技大学数学系　430081
虞言林　教授，苏州大学数学科学学院　215006

评议人名单：

麻希南　教授，华东师范大学数学系　200062
刘培德　教授，武汉大学数学与统计学院　430081
石忠锐　教授，上海大学数学系　200444
李庆国　教授，湖南大学数学与计量学院　410082

答辩委员会对论文的评语

赵长健同学的博士论文“凸体几何极值问题”,选题属于现代几何学的前沿,是当前国际国内凸几何研究领域的重要课题。

本文以凸体几何的经典理论和极值问题作为研究内容和研究重点,其主要创新点有:

(1) 建立了混合投影体的极的 Aleksandrov-Fenchel 不等式;

(2) 引进了“均值积分差函数”的对偶概念并建立了相关不等式的对偶形式。引进了“对偶均值积分和函数”的概念并建立了混合交体的对偶均值积分和的 Minkowski 不等式;

(3) 1993 年,Lutwak 建立了混合投影体的 Minkowski 不等式,Brunn-Minkowski 不等式和 Aleksandrov-Fenchel 不等式,本文建立了这三个不等式的极形式;

(4) 推广并加强了三个对偶均值积分的 Brunn-Minkowski 型不等式;

(5) 指出并论证了凸体几何中五对经典不等式之间的等价性;

(6) 利用 Lutwak 关于投影体的思想,创建了关于混合交体的 Minkowski 不等式,Brunn-Minkowski 不等式和 Aleksandrov-Fenchel 不等式并证明了一系列相关结果。通过对比的方法,进一步揭示了混合投影体与混合交体之间的

对偶性质。

攻博期间，赵长健撰写的论文已发表在国际国内的重要学术期刊《中国科学》，《J. Math. Anal. Appl.》等杂志上。他的博士论文写作目标明确，思路清晰，对所研究领域的历史和现状有非常清楚的了解。答辩中能正确回答问题。从本论文可以看出，作者具有坚实的理论基础和广博的专业知识，具有很强的科研工作能力。

答辩委员会表决结果

经答辩委员会表决，全票同意通过赵长健同学的博士学位论文答辩，并一致认为是一篇优秀博士论文。建议授予赵长健理学博士学位。

答辩委员会主席：**杨 路**

2005年1月5日

摘 要

本文利用几何分析中的凸体几何理论，积分变换方法和解析不等式理论，研究了凸体的等周问题和相关的不等式问题. 首先,从以下几个方面作了重点研究：凸体的宽度积分和仿射表面积，凸体几何经典不等式的等价性，投影体和交体的各种极值性质，星体的对偶均值积分的极值问题,混合投影体的极体性质，投影体和交体的对偶均值积分差的极值问题以及混合投影体与混合交体神秘的对偶性质等. 其次，重点研究解析不等式，像离散型和连续型 Pachpatte 不等式,Hilbert 积分不等式,Hölder 积分不等式，Bellman 不等式，Minkowski 积分不等式等并应用这些分析不等式建立了凸体几何中经典的 Minkowski 不等式，Brunn-Minkowski 不等式和 Aleksandrov-Fenchel 不等式的极形式和对偶形式. 这些内容作为几何分析一个十分活跃的前沿方向，广泛应用于数量经济学，随机几何学，体视学和信息理论等领域.

本文获得的主要结果：

(1) 建立了混合投影体的极的 Aleksandrov-Fenchel 不等式，较完满地解决了美国著名数学家 Lutwak 自 20 世纪 80 年代以来,一直关注的一个凸体几何分析问题,实质性地推广了 Lutwak 关于混合投影体极的一些重要结果.

(2) 2004 年,冷岗松教授在美国数学期刊 Adv. Math.

Appl. 上，首次引进了凸体的均值积分差函数：若 $K, D \in \mathcal{K}^n$ 且 $D \subset K$，则凸体 K 和 D 的均值积分差函数定义为：

$$Dw_i(K, D) = W_i(K) - W_i(D), \ (0 \leqslant i \leqslant n-1),$$

并且建立了凸体的均值积分差的 Minkowski 不等式和 Brunn-Minkowski 不等式.

类似地，我们定义了一个新的相关概念—星体的对偶均值积分和函数：若 $K, D \in \varphi^n$，则星体 K 和 D 的对偶均值积分和函数定义为：

$$S_{\widetilde{w}_i}(K, D) = \widetilde{W}_i(K) + \widetilde{W}_i(D), \ (0 \leqslant i \leqslant n-1),$$

若 $i=0$，则有 $S_v(K, D) = V(K) + V(D)$，被称作星体 K 和 D 的对偶体积和函数.

进一步，建立了混合交体的“对偶均值积分和”的 Minkowski 不等式. 它正是混合交体的 Minkowski 不等式经典形式的推广. 另外，还获得了混合交体的 Brunn-Minkowski 不等式的加强形式.

(3) 引进了凸体“均值积分差函数”的对偶概念—凸体和星体的“对偶均值积分差函数”：令 K 和 D 分别为 $\mathbb{R}^n$ 中的凸体与星体. 若 $D \subset K$，我们定义凸体 K 与星体 D 的对偶均值积分函数：

$$D\widetilde{w}_i(K, D) = W_i(K) - \widetilde{W}_i(D), \ 0 \leqslant i \leqslant n-1.$$

从而，建立了凸体和星体的“对偶均值积分差”的 Minkowski 不等式和 Brunn-Minkowski 不等式. 作为方法的应用，获得了投影体和交体的“对偶均值积分差”的 Minkowski 不

等式和 Brunn-Minkowski 不等式.

(4) 1993 年，Lutwak 在美国数学期刊 Trans. Amer. Math. Soc. 建立了混合投影体均值积分的 Minkowski 不等式，Brunn-Minkowski 不等式和 Aleksandrov-Fenchel 不等式. 我们获得了这三个不等式的极形式.

(5) 凸体极径 Minkowski 和，星体极径 Blaschke 和以及星体调和 Blaschke 线性组合的对偶 Brunn-Minkowski 不等式分别被 Lutwak 建立. 本文给出了这三个不等式的加强形式.

(6) 惊奇地发现并论证了凸体几何中下列几对经典不等式之间存在着等价性：Brunn-Minkowski 不等式和 Knesser-Süss 不等式，对偶 Knesser-Süss 不等式和对偶 Brunn-Minkowski 不等式，Firey 组合的 Brunn-Minkowski 不等式和 p-均值积分的 Minkowski 不等式，调和 p-组合的对偶 Brunn-Minkowski 不等式和 p-对偶 Minkowski 不等式，仿射表面积的 Brunn-Minkowski 不等式和仿射表面积的 Minkowski 不等式.

(7) 利用 Lutwak 思想方法，创建了混合交体的 Minkowski 不等式，Brunn-Minkowski 不等式和 Aleksandrov-Fenchel 不等式并证明了一些相关结果. 从而，通过对比的方法揭示了混合投影体与混合交体之间神秘的对偶性. 进一步印证了 Lutwak 教授 1988 年的一个重要猜测.

(8) 建立了离散型与连续型 Pachpatte 不等式的逆向形式并推广了一些新型 Hilbert 微积分不等式.

关键词 凸体，星体，交体，投影体，混合投影体的极

Abstract

This thesis works for theoretical study on isoperimetric problem and related inequalities by using theory of geometry analysis, way of integral transformation and theory of analysis inequalities. First, we study from the following several sides: width integral and affine surface of convex bodies, equivalence of some classical inequalities in convex bodies geometry, extremal properties of projection bodies and intersection bodies, extremal problem of dual Quermassintegral for star bodies, extremal properties of polars for mixed projection bodies, extremal properties of dual Quermassintegral differences for projection bodies and intersection bodies, dual properties of mixed projection bodies and mixed intersection bodies. Secand, we establish polars forms and dual forms of the classical Minkowski inequality, Brunn-Minkowsk inequality and Aleksandrov-Fenchel inequality and prove some interrelated results, using analysis inequalities such as Hölder integral inequality, Bellman inequality, Minkowski integral inequality, Pachpatte inequality, Hilbert integral inequality and et al. As a very important area of geometry analysis, the geometry theory of convex bodies is widely applied in mathematical economics, stochastic geometry, stereology and the theory of information

and et al.

Our main resuls can be stated as follows:

(1) we establish Aleksandrov-Fenchel inequality for polars of mixed projection bodies. Solving a important geometry problem of convex bodies which was followed with interest by Lutwak in 1988. Then, we improve some important results of polars for mixed projection bodies which was given by Lutwak.

(2) In 2004, G. S. Leng first introduces the Quermassintegral difference function of convex bodies: If K, $D\in\mathcal{K}^n$ and $D\subset K$, then Quermassintegral difference function of convex bodies K and D was difined: $Dw_i(K, D) = W_i(K) - W_i(D)$, $(0\leqslant i\leqslant n-1)$, and established Minkowski inequality and Brunn-Minkowski inequality for the Quermassintegral difference of convex bodies.

Similarly, we introduce a new interrelated concept — the concept of *dual Quermassintegral sum* for star bodies: If K, $D\in\varphi^n$, then dual Quermassintegral sum function of star bodies K and D is difined as follows: $S_{\widetilde{w}_i}(K, D) = \widetilde{W}_i(K) + \widetilde{W}_i(D)$, $(0\leqslant i\leqslant n-1)$. If $i=0$, then $S_v(K, D) = V(K) + V(D)$, we call dual volume sum function of star bodies K and D.

Further, we estabalish Minkowski inequality of dual Quermassintegral sum for mixed intersection bodies. It is just a general form of classical Minkowski inequality. On the other hand, we prove a strengthening form of classical Brunn-

Minkowski inequality.

(3) We introduce the concept of *dual Quermassintegral difference* of convex bodies and star bodies: If $K \in \mathcal{K}^n$, $D \in \varphi^n$ and $D \subset K$, then we difine the concept of dual Quermassintegral difference of convex body K and star body D: $D\widetilde{w}_i(K, D) = W_i(K) - \widetilde{W}_i(D)$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$.

Further, we establish Minkowski inequality and Brunn-Minkowski inequality of dual Quermassintegral difference. As applications, establish Minkowski inequality and Brunn-Minkowski inequality of dual Quermassintegral difference for projection bodies and intersection bodies.

(4) In 1993, Lutwak established Minkowski inequality, Brunn-Minkowski inequality and Aleksandrov-Fenchel inequality of mixed projection bodies for Quermassintegral in Trans. Amer. Math. Soc.. In this paper, we establish their polars forms.

(5) Lutwak established three dual Brunn-Minkowski inequalities about the radial Minkowski addition of convex bodies, the radial Blaschke addition of star bodies and the harmonic linear combination of star bodies, respectively. We improve these three classical dual Brunn-Minkowski inequalities.

(6) We point out equivalence of the following five pair of classical inequalities: Brunn-Minkowski inequality and Knesser-Süss inequality, dual Knesser-Süss inequality and dual Brunn-Minkowski inequality, Brunn-Minkowski inequality for

Firey combination and Minkowski inequality for the mixed p-Quermassintegral, dual Brunn-Minkowski inequality for the harmonic p-combination and p-dual Minkowski inequality, Brunn-Minkowski inequality of affine surface area and Minkowski inequality for affine surface.

(7) By using Lutwak's idea, we establish Minkowski inequality, Brunn-Minkowski inequality and Aleksandrov-Fenchel inequality of mixed intersection bodies and prove some interrelated results. Then, we present the mysterious duality between intersection and projection bodies. Further, proving an important surmise which was posed by Lutwak in 1988.

(8) We establish inverses of disperse and continuous Pachpatte's inequalities and generalize some new Hilbert type integral inequalities.

Key words convex bodies, star bodies, intersection bodies, projection bodies, polars of mixed projection bodies

目 录