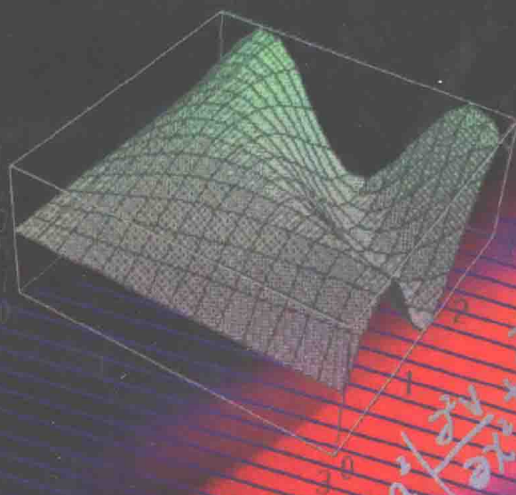


DAXUESHENGSHUXUEJIANMO
JINGSAIFUDAOJIAOCAI

大学生数学建模 竞赛辅导教材

叶其孝主编

(二)



$$\frac{\partial v}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

湖南教育出版社



叶其孝主编

大学生数学建模竞赛
辅导教材
(二)

湖南教育出版社

大学生数学建模竞赛辅导教材(二)

叶其孝 主编

责任编辑:郑绍辉

湖南教育出版社出版发行

湖南省新华书店经销 湖南省新华印刷厂印刷

850mm×1168mm 32开 印张:9.625 字数:257,000

1997年6月第1版 1998年4月第2次印刷

ISBN 7-5355-2500-8/G·2495

定价:13.60元

本书若有印刷、装订错误,可向承印厂调换

序 言

一年一次的全国大学生数学建模竞赛 (China Undergraduate Mathematical Contest in Modeling 缩写为 CUMCM) 已经举办了五届, 特别是从 1994 年开始 CUMCM 被国家教委高教司确定为面向全国大学生的一项全国性竞赛以来, 在国家教委高教司的指导和支持下, 在全国组委会的组织领导下, 取得了很大的成绩。1996 年全国 24 个省、市、自治区的 337 所院校有 1683 个队参加了竞赛, 充分展现了我国大学生的聪明才智和创造性。CUMCM 不仅通过赛前培训、竞赛三天的紧张拼搏以及赛后的总结和继续, 培养了一大批优秀的大学生, 而且愈来愈显示出 CUMCM 对整个大学数学教育改革的推动作用。实际上, 目前以大学生数学建模竞赛活动为主体的数学建模教学活动是一种规模相当大的不打乱现行教学秩序的大学数学教育改革的试验, 其意义和影响将是深远的。

为了进一步开展好 CUMCM, 现在迫切需要的是向大学生们提供有关数学建模教学和竞赛的高质量的参考材料。值得庆幸的是我国科技战线有一大批专家关注和支持着 CUMCM, 本书的出版就充分反映了这一事实。本书的内容涉及《大学生数学建模辅导教材(一)》中未曾涉及或很少涉及的重要的数学建模方法。张尧庭教授写的因子分析与数学建模; 姜启源教授写的优化问题中的数学规划模型; 朱建青同志和我编写的附录: 线性规划与整数规划——解法、算法与软件; 谭永基教授写的若干参数辨识模型; 王树禾教授写的数学建模中的图论方法; 李尚志教授写的保密通讯中的数学模型; 何伟同志编写的附录: 密码学初步; 我自己也写了差分、微分方程建模; 齐东旭教授写的拟合的计算几何学方法, 不仅反映了重要的数学建模方法而且能与国内外数学建模竞赛的赛题紧密结合, 深入浅出地论述这些重要方法。不少篇

章可以作为各级各类学校的数学建模课程中某些部分的教材。有的还初步介绍了有关软件（例如优化软件）的使用和信息。我们还尽可能介绍了生动并富有启发性的电视片，例如“破译者”。尽管这方面的努力刚刚开始，然而我们相信形象化的教学手段是大学数学教育的一个重要方面。我们希望本册的出版能为进一步开展好大学生数学建模的竞赛作出贡献。

由于我们水平有限，书中难免有不妥、错误之处。我们诚恳地希望读者予以批评指正。

最后我们要感谢湖南教育出版社的领导，特别是郑绍辉编辑的大力支持，本书才得以在相当短的时间内顺利出版。

叶其孝

于北京理工大学，1996，12，26

数学建模教学活动与大学数学教育改革 (代前言)

叶其孝

北京理工大学 应用数学系

一、数学建模教学活动

数学建模(Mathematical Modeling)就是应用建立数学模型来解决各种实际问题的方法,也就是通过对实际问题的抽象、简化,确定变量和参数,并应用某些“规律”建立起变量、参数间的确定的数学问题(也可称为一个数学模型),求解该数学问题,解释、验证所得到的解,从而确定能否用于解决实际问题的多次循环、不断深化的过程。由于计算能力(计算机及其相应的软件)的迅速发展,“数学建模和与之相伴的计算正在成为工程设计中的关键工具”,而一种成功的方法和技术一定会反映在培养专门人材的大学的教学活动中,这就是本文中所谓的数学建模教学活动。目前,在我国大学中开展的数学建模教学活动大致有以下几种:

1. 开设必修的或选修的数学建模课程;
2. 组织学生参加大学生数学建模竞赛,这是一种三人组队、共三天(72小时)的通讯竞赛,这一活动实际上由赛前的培训、三天竞赛的拼搏和赛后的继续这样三部分组成;
3. 数学(建模)实验室课程或活动,实验室装备有许多良好的计算机和相应的软件,为学生、教师创造、提供用数学建模方法去解决各种实际问题的条件和交流活动的场所;
4. 由团委或学生科协举办的各种与数学建模有关的学生科技发明和创造活动。

二、数学和数学教育的作用、重要性

数学是一切科学和技术的基础,因而数学的重要性似乎是不

可动摇的。数学在教育中的重要地位似乎也是毋庸置疑的，因为只要问一下以下的问题：从小学一年级到大学一年级哪门课程永远是主课？并听一下回答（这样的课程是存在唯一的，只有数学课）就够了。然而，实际情况远非如此。认为有了计算机和各种软件，数学就不如以前那么重要了，数学教育也就不如以前那么重要了的理解在广大的公众、行政领导甚至科技界中有相当的市场，这肯定非常不利于我们培养富有竞争力的跨世纪的人材。因而重新思考一下数学的作用和重要性是十分必要的。笔者认为以下的认识是十分重要的。“数学的思考方式具有根本的重要性。简而言之，数学为组织和构造知识提供方法，以至当用于技术时，就能使科学家和工程师们生产出系统的、能够复制的、并且是可以传播的知识。分析、设计、建模、模拟以及具体的执行就可能使之变成有效的结构良好的活动。”“数学除了锻炼敏锐的理解力、发现真理以外，她还有一个训练全面考虑科学系统的头脑的开发功能。”“学生从数学学习中能获得的最重要的东西是达到较高的智力水平。”由此可见，数学对于从事任何工作的人都是至关重要的，问题是我们现在的大学数学教育是否做到了“为组织和构造知识提供方法”，“训练全面考虑科学系统的头脑”和“达到较高的智力水平”呢？或者说，怎样才能做到呢？这正是大学数学教育改革应该认真考虑的问题。

三、大学数学教育改革的任务

大学数学教育的任务就是要通过教学活动让学生学习、掌握数学的思想、方法和技巧，并能学以致用，初步具备自学所需的更深入的数学的能力。学习数学的方法和途径可以不同，但都可能学习并掌握数学的思想、方法和技巧，即“条条大路通罗马”。如果我们的大学数学教育都能达到这样的目标，那就无须进行改革了。事实上，现在的大学数学教育相当不尽人意，改革迫在眉睫。就理工科（不包括数学系）的数学教学而言至少存在以下问题：学时少、内容多，师生共同赶进度；又想严格、又严格不了，

只好牺牲应用、牺牲计算；学生的学习兴趣不高，数学学习进入一种不良循环。很多学生到了后继数学课、专业课时才感到数学重要，但为时已晚了。专业系对作为为他们服务的数学课也不尽满意。姜伯驹院士在国家教委“数学与力学教学指导委员会第二次工作会议”上的讲话中有详细的分析。当然，大学数学教育改革是一个相当复杂的系统工程，需要学生、教师、专家和社会（包括领导和家长）的共同努力，需要相当长的时间才能解决好。笔者在本文中只能提出一些个人的想法。

首先要对数学教育的目标有一个共识，再对实现这样的目标中存在的问题有一个中肯的分析，然后才能找出正确的对策。具体说，大学数学教育改革中要研究的问题有：应设置什么样的大学数学课程系列，甚至可以研究大学第一门数学课程是否一定是高等数学（大体上和国外的微积分相当）；就每门课程而言，有教什么、怎么教、要不要加强应用意识、如何在教学中使用技术手段（例如，计算机及相应的数学软件、多媒体技术、大屏幕投影等等），是否永远是教师讲、学生听这种单一的方式呢；教学内容现代化的问题、教材的革新和编写问题；怎样调动学生的主动性和积极性，使师生在教学过程中能更好地交流和相互作用；如何真正培养学生分析、解决问题的能力，因材施教，从而更好地为工程专业服务；怎样通过数学教学活动促进理工结合、学科交叉，为提高大学的整体实力服务；最为关键的是怎样培养一支优秀的教师队伍。当然，对于不同性质的学校、不同层次的学生，在解决共同问题的同时，改革的侧重应有所不同。

四、以大学生数学建模竞赛为主体的数学建模教学活动实际上是一种不打乱现行教学秩序的、规模相当大的大学数学教育改革的试验

自从1989年在我国开展大学生数学建模竞赛以来，越来越多的学生对这项竞赛感兴趣，从1994年起这项竞赛已被国家教委规定为全国大学生四大竞赛之一，今年由来自24个省、市、自治

区的 337 所大学的 1683 个队、5000 多位同学参加了这一竞赛,很多大学生充分表现了他们的智慧和解决问题的能力。特别是在不少大学开展了如第二节中所说的各种数学建模教学活动。多年来的实践使我们认识到以大学生数学建模竞赛为主体的数学建模教学活动实际上是一种不打乱现行正常教学秩序的、规模相当大的大学数学教育改革的试验。首先,这是学生(而且大部分是比较优秀的学生)自愿参加的活动不会影响现行的教学秩序。其次,在相当大的程度上测试学生有没有学会过去学过的数学,特别是能否应用它们来解决实际问题,从而可以发现我们在教学中存在的各种问题。关于大学应设置什么样的课程,虽然尚不可能有什么定见,但从已经在国内广泛开设的数学建模课来看,大学生数学建模竞赛已经对课程设置产生了实质性的影响。对大学(包括大专)的数学系来说,数学建模课都已经是必修课了。对于非数学专业同学来说,许多学校都为他们开设数学建模的选修课。有的重点大学的教务处把高等数学的学时从近 200 学时的课程减少为 160 学时,把余下的近 40 学时的课时开设两门限制性选修课——数学建模课和计算方法课。至于国内现有的数学建模课的教材都大量利用了数学建模竞赛中的例子,编写了许多很好的可以用于教学的教学单元(Module: A unit of education or instruction with a relatively high teacher to student ratio, in which a single topic or a small section of a board topic is studied for a given period of time, 一种能在一定时间内进行教学的单一主题或更广泛的主题的一小节,并能具有较高师生比的教学单元,也可译为教学插件)。更可喜的是许多教师在自己开设的课程(包括高等数学课在内)中力图渗透数学建模的思想,并取得了很好的教学效果。高等数学(微积分)应该怎么教、怎么学也正在深入展开研究,甚至大学生的第一门数学课是否一定是高等数学的问题也有所思考。接受参加数学建模竞赛赛前培训的同学大都学了诸如数理统计、最优化、图论、微分方程、计算方法、神经网络、层次分析法、模糊数学、

数学软件包的使用等等“短课程”(或讲座),用的学时不多,多数是启发性的讲一些基本的概念和方法,主要是靠同学们自己去学,这充分调动了同学们的积极性,充分发挥了同学们的潜能。培训中广泛地采用的讨论班方式,同学自己报告、讨论、辩论,教师主要起质疑、答疑、辅导的作用,这不仅大大提高了学生的表达和交流能力,对于怎样改变始终由教师讲、学生听的方式也很有启发。竞赛中一定要使用计算机及相应的软件,如 Mathematica, Matlab, Maple, SAS, 甚至排版软件等,这些也给我们许多启发:如果计算机进入教学,要用多少学时?应编写怎样的习题来促使同学更好地掌握数学的思想方法和技巧?数学建模竞赛和数学实验室活动向不同系的同学和教师提供了交流的机会和场所,在某种意义上这正是理工结合、学科交叉的结合点,对于提高学校的整体实力起着极其重要的作用,越来越多的学校领导认识到这一点,投入很大的力量来建设数学(建模)实验室。就最为关键的师资队伍建设来说,过去我们对于数学教师应有正确、全面的数学观重视不够,现在看来任何一个数学教师都应该了解一点数学建模的知识,这样他们对于数学应用的广泛性、纯粹数学的极端重要性、数学是怎样应用的等问题才会有正确的理解,才会把自己的研究领域的重要性放在一个恰当的位置上,他们的研究和教学工作一定会做得更好。由此可见,以大学生数学建模竞赛为主体的数学建模教学活动确实是一种不打乱现行正常教学秩序的、规模相当大的大学数学教育改革的试验,给以较大的人力和资金的投入是相当值得的。

五、展望

1. 大学数学教育中加强应用意识决不等于在课程中讲点应用、用点计算机就可以了,这也是国外不少教师和专家担心并有不同意见的,这是相当有道理的。大学数学教育改革决不等于应用加计算机,学习数学必须按数学的规律循序渐进地学习。大学生数学建模竞赛的经验告诉我们,关键是要帮助同学们建立起

一种学习数学的良性循环(即学生在学了一定的数学后能有一定的应用,通过应用不仅了解到数学是有用的,而且了解到真要解决实际问题自己的数学知识远远不够,学而后知不足,从而产生强烈的学习愿望),激励学生的学习积极性和主动性。能切实做到这一点的一种办法也许是编写优秀的教学单元,并逐步集成优秀的教学模块,用于教学实践来实现学习数学的良性循环这一目标。

2. 真正做好大学数学教育改革必须取得社会的支持,因此,我们必须在普及数学和改善数学的形象方面做大量的、切实的工作。
3. 整个数学教育改革是一个整体,大学中的数学教育改革必将对中学的数学教育改革产生影响,自 1991 年以来在上海和北京开展的中学生数学知识应用竞赛意义重大,实际上这同样是一种不打乱现行正常教学秩序的、规模相当大的中学数学教育改革的试验,值得推广。

目 录

序言	(1)
数学建模教学活动与大学数学教育改革 (代前言)	(1)
第一章 因子分析与数学建模	(1)
§ 1.1 引言	(1)
§ 1.2 因子分析的内容	(1)
§ 1.3 一个实例	(9)
§ 1.4 各种应用	(15)
第二章 优化问题中的数学规划模型	(24)
§ 2.1 引言	(24)
§ 2.2 生产计划	(26)
§ 2.3 分派与装载	(31)
§ 2.4 运输、投资与聘用	(34)
§ 2.5 产品试验与设计	(39)
§ 2.6 多阶段决策问题	(42)
§ 2.7 规划算法简介	(50)
§ 2.8 附录: 线性规划与整数规划——解法、算法与 软件	(57)
2.8.1 引言	(57)
2.8.2 线性规划	(60)
2.8.3 整数规划	(72)
2.8.4 数学规划软件简介	(76)
第三章 若干参数辨识模型	(81)
§ 3.1 引言	(81)

§ 3.2	施肥效果分析	(82)
§ 3.3	薄膜渗透率的测定	(86)
§ 3.4	用放射性同位素测定局部脑血流量	(89)
§ 3.5	电阻率测井的数学模型	(98)
第四章	数学建模中的图论方法	(107)
§ 4.1	图、算法与矩阵	(107)
§ 4.2	图论算法的时间复杂度	(126)
§ 4.3	网络流、PERT 技术和工序问题	(137)
§ 4.4	迷宫、邮路和扫雪问题	(151)
§ 4.5	锁具装箱问题	(161)
第五章	保密通讯中的数学模型	(167)
§ 5.1	问题的提出	(167)
§ 5.2	最初的加密算法——单表密码	(169)
§ 5.3	多表密码	(172)
§ 5.4	现代序列密码体制	(175)
§ 5.5	移位寄存器系列	(180)
§ 5.6	公开密钥密码体制	(182)
§ 5.7	附录：密码学 (Cryptology) 初步	(186)
5.7.1	引言	(186)
5.7.2	置换 (substitution) 密码	(187)
5.7.3	仿射 (Affine) 密码	(189)
5.7.4	矩阵 (matrix) 密码	(190)
5.7.5	整数矩阵	(193)
5.7.6	公开密钥 (public-key) 密码	(194)
5.7.7	用 C 语言编写的 $ed \equiv 1 \pmod{r}$ 的程序	(197)
5.7.8	电视片：破译者	(199)
5.7.9	练习题答案	(199)
第六章	差分、微分方程建模	(201)
§ 6.1	引言——什么是数学建模？	(201)

§ 6.2	差分方程建模	(206)
§ 6.3	常微分方程建模	(213)
§ 6.4	偏微分方程建模	(231)
第七章	数据拟合的计算几何学方法	(252)
§ 7.1	Bezier 方法	(252)
§ 7.2	样条函数	(260)
§ 7.3	调配函数	(271)
§ 7.4	最小二乘法	(275)
§ 7.5	曲面拟合	(277)
§ 7.6	散乱数据的曲面拟合	(283)
§ 7.7	关于应用的注记	(285)
附录: 1996、1997 中国及美国大学生数学建模竞赛试题		(289)

第一章 因子分析与数学建模

张尧庭

上海财经大学

提 要

因子分析是统计中一种重要的分析方法，它主要特点在于能探索不易观测或不能观察的潜在因素。这里详细地介绍了它的基本方法和思路，用一个经济方面的实例给以说明，并指出了它在社会调查、气象、地质……等诸方面的广泛应用，以期引起建模工作者的注意。

§ 1.1 引言

因子分析是数理统计中多元统计分析的一个重要的部分，它是较为成熟的一个分支，已广泛应用于各个领域。我们在这里将介绍它的方法、简要的历史以及它的变化和应用。

我们通过一个例子来详细说明它的思路、算法，结果的解释。然后通过一些类比来阐述它种种可能的不同用法。

§ 1.2 因子分析的内容

我们先看一个实际问题，然后再引出模型和方法。若有 n 个学生，每个学生考五门课，第 α 个学生第 i 门课的分数用 $x_{\alpha i}$ 表示，于是 n 个学生的考试成绩就是一个矩阵

$$\begin{array}{c} \text{学生 1} \\ \text{学生 2} \\ \vdots \\ \text{学生 } n \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & x_{n4} & x_{n5} \end{pmatrix},$$

把它记为 X , 就有

$$X = (x_{ai})_{n \times 5}.$$

我们都知道, 考试成绩反映了学生的素质和能力。可以设想, 这些成绩是由于学生的理解能力、记忆能力、对文字、符号、概念的反应快慢(反应速度)所决定的。能否从学生的学习成绩去寻找出反映这些能力的量呢? 如果把理解能力、记忆能力、反应速度称为因子的话, 因子分析就是要从考试的成绩去寻找出这些因子来, 并且还能找到成绩与因子的关系。

现在用数学的语言来描述刚才的问题。用 $x_1, x_2, \dots, x_5$ 表示考试成绩, 记为

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)'$$

因子用 f_1, f_2, f_3 表示, 记为

$$f = (f_1, f_2, f_3)'$$

假定它们之间有线性的关系式, 即

$$x = Af + \epsilon \quad (2.1)$$

$$\begin{matrix} 5 \times 1 & 5 \times 3 & 5 \times 1 \end{matrix}$$

$\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5)'$ 表示了 x 中不能被 Af 完全反映的部分, 通常称为误差。我们认为每个学生的成绩就是(2.1)式的一个样本, n 个学生的成绩就是 n 个样本。问题是如何从已知的样本去求得 f 和 A ?

这样我们就引导出一个统计问题如下:

设 $x_1, x_2, \dots, x_p$ 是 p 个随机变量, 用 x 表示。已观察到 x 的 n 个样本是 $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$, 记为

$$X = \begin{pmatrix} x'_{(1)} \\ \vdots \\ x'_{(n)} \end{pmatrix} = (x_{ai})_{n \times p},$$

x 的期望值不妨假定为 0, 因为我们关心的是什么影响着 x 的变异, x 的变异用它的协方差矩阵 Σ 来描述, 即

$$\Sigma = E(x - Ex)(x - Ex)' = Exx' \quad (\text{因为 } Ex = 0)$$

既然因子 f 与 x 有线性关系, 自然想到在 x 的线性函数中去寻找因子 f 。 x 的线性函数是 $a'x$, 其中 $a = (a_1, \dots, a_p)'$ 是 p 维的常数向量, $a'x$ 的期望是 0, 因为 $E(a'x) = a'Ex = a'0 = 0$ 。而 $a'x$ 的方差 $V_{a'x} = E(a'x)^2 = Ea'xx'a = a'Exx'a = a'\Sigma a$ 。很明显, $V_{a'x}(ca'x) = c^2a'\Sigma a$ 对任何实数 c 成立, 所以在寻找因子时, 关键不是 a 的长度, 而是 a 的方向, 这样我们就可以限定 a 在单位球面上变化, 即有约束条件

$$a'a = 1. \quad (2.2)$$

若把 $a'x$ 看成因子, 自然希望 $a'x$ 的方差尽可能大, 这就表示 x 这个向量在 a 这个方向有很大的变异, 因而 $a'x$ 就可以解释 x 的相当大的一部分变异。这样就引出了数学问题:

$$\text{求 } a \text{ 使 } a'a = 1, \text{ 且 } a'\Sigma a = \text{最大} \quad (2.3)$$

问题的解是线性代数中已有的结论, (2.3) 式的解就是矩阵 Σ 的最大特征根 λ_1 所对应的特征向量 a_1 , 也即有

$$\Sigma a_1 = \lambda_1 a_1. \quad (2.4)$$

因此, 这样找到的 $f_1 = a_1'x$ 称为 x 的第一个主因子。

有了第一个就要找第二个。从统计的眼光看来, 第二个主因子应该与第一个不相关, 最好是彼此独立的。如果 $f_1 = a_1'x$, 那么第二个主因子应在与 f_1 不相关的线性函数 $a'x$ 中寻找。 $a'x$ 与 $a_1'x$ 不相关的条件是

$$\begin{aligned} 0 &= \text{Cov}(a'x, a_1'x) = Eaxx'a_1 \\ &= a'\Sigma a_1. \end{aligned} \quad (2.5)$$

因此第二个主因子 $f_2 = a_2'x$ 的 a_2 应满足:

$$\begin{cases} a_2'a_2 = 1, a_2'\Sigma a_1 = 0 \text{ 且} \\ a_2'\Sigma a_2 \text{ 达到最大 (在所有 } a'a = 1, a'\Sigma a_1 = 0 \text{ 中)} \end{cases} \quad (2.6)$$

从线性代数的知识知道, a_2 正好是 Σ 的第二大特征根 λ_2 所对应的