

图书在版编目(CIP)数据

理论力学/刘延柱,杨海兴,朱本华编著. —2版. —北京:高等教育出版社,2001
面向21世纪课程教材
ISBN 7-04-009410-X

I. 理… II. ①刘…②杨…③朱… III. 理论力学—高等学校—教材 IV. 031

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 031192 号

责任编辑 黄毅 封面设计 张楠 责任绘图 朱静
版式设计 马静如 责任校对 康晓燕 责任印制 宋克学

理论力学 第二版

刘延柱 杨海兴 朱本华 编著

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市东城区沙滩后街 55 号

邮政编码 100009

电 话 010-64054588

传 真 010-64014048

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

<http://www.hep.com.cn>

经 销 新华书店北京发行所

印 刷 中国科学院印刷厂

版 次 1991 年 4 月第 1 版

2001 年 7 月第 2 版

开 本 787×960 1/16

印 次 2001 年 7 月第 1 次印刷

印 张 29.25

定 价 24.50 元

字 数 540 000

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

绪 论

§ 0.1 理论力学的研究对象

力学是研究客观物质机械运动规律的科学。机械运动是指物质在空间和时间中的位置变化。固体的移动和变形、气体和液体的流动都属于机械运动。机械运动是自然界最普遍的运动。大至宇宙,小至基本粒子,无处不存在这种机械运动。即使是物质更高级的运动形态,如物理、化学、乃至生命活动,也含有机运动在内。对各种不同形态的机械运动的研究产生了不同的力学分支学科。理论力学研究机械运动的最普遍和最基本的规律,它是各门力学学科的基础。近代工程技术,如土木工程、机械工程、航空航天工程等都是在力学理论指导下发展起来的,因此理论力学也是这些与机械运动密切相关的工程技术学科的基础。

理论力学起源于物理学的一个独立分支,但它的内容已大大超过了物理学的内容。理论力学不仅要求建立与力学有关的各种基本概念和理论,而且要求能运用理论知识对于从实际问题中抽象出来的力学模型进行分析和计算。所谓力学模型就是对自然界和工程技术中复杂的实际研究对象的合理简化。当所研究物体的运动范围远远超过它本身的几何尺度时,它的形状对运动的影响极微小,可以将物体简化为只有质量而没有体积的几何点,称为质点。一般情况下任何物体都可以看作是由许多质点组成的系统,称为质点系。对于那些在运动中变形极小,或虽有变形但不影响其整体运动的物体,可以完全不考虑其变形而认为组成物体的各个质点之间保持距离不变。这种不变形的特殊质点系称为刚体。由许多刚体组成的系统称为刚体系。理论力学的研究对象仅限于离散的质点、质点系、刚体和刚体系,统称为离散系统。在分析固体的变形或流体的流动规律时,必须建立另一种力学模型,即物质在空间连续分布的连续介质。虽然对连续介质的研究属于后续的其它力学课程的任务,但理论力学所研究的普遍性规律也适用于连续介质。

对实际物体抽象为何种力学模型,取决于问题的性质。如计算人造卫星绕地球运行的轨道运动时,由于卫星的尺度远远小于轨道半径,可以将卫星简化为质点。但在讨论卫星绕质心转动的姿态运动时,必须将卫星抽象为刚体。对于

带有挠性太阳帆板的卫星,还必须抽象为刚体和弹性体组成的更复杂的模型。

理论力学所研究的力学规律仅限于经典力学范畴。它的研究对象被限制为由大量分子组成,且运动速度远远小于光速(3×10^8 m/s)的宏观物体。绝大多数工程实际问题都属于这个范畴。一般认为,经典力学是以牛顿定律为基础建立起来的力学理论,它的结论不适用于原子、电子等微观粒子的运动^①,或速度接近于光速的物体运动。后两种运动属于量子力学和相对论的研究对象。

理论力学的内容由三部分组成:静力学、运动学和动力学。静力学研究力系的简化,以及物体在力系作用下的平衡规律。运动学从几何学的观点研究物体的运动。动力学则研究物体的运动与作用于物体的力之间的关系。静力学中所讨论的静止和平衡是运动的一种特殊形态。因此,也可以认为静力学是动力学的一种特殊情形。不过由于工程技术发展的需要,静力学已积累了丰富的内容而成为一个相对独立的组成部分。

§ 0.2 理论力学的研究方法

与一切科学相同,对力学基本规律的研究起源于对实际现象的观察和归纳。人类在生产活动中很早就开始积累经验并逐渐形成初步的力学知识。我国的墨翟(公元前 465—376)在《墨经》中已经对力和重心的概念作了最早的解释^②。古希腊的亚里士多德(Aristotel, 公元前 384—322)和阿基米德(Arhimed, 公元前 287—212)总结了杠杆原理和浮力原理。经过人类对力学的认识不断深化的漫长过程,伽利略(Galileo, G., 1564—1642)正确地认识了物体的惯性和加速度概念,提出了运动相对性原理。开普勒(Kepler, J., 1571—1630)在对大量天文观测资料的分析中总结出行星的运动规律。在他们的认识基础上,1687年牛顿(Newton, I., 1642—1727)在《自然哲学的数学原理》一书中提出了制约物质宏观机械运动的基本规律,即万有引力定律和动力学基本定律,从而奠定了后人称为牛顿力学的基础。1670年牛顿和莱布尼茨(Leibniz, G. W., 1646—1716)创立了研究力学规律的数学方法——微积分。此后力学的研究才有可能从归纳性科学转变为演绎性,即以牛顿定律为基本出发点,利用数学推理得出结论以解释或预测实际现象,并经受实践的检验。因此力学和数学之间有着密切的联系。人类在实践活动中对牛顿力学基本原理的无数次检验证实,对于速度远远小于光速的宏观物体的运动,牛顿定律具有高度正确性。1846年根据牛顿定律推算结果的预测

① 牛顿定律不适用。但动量守恒、动量矩守恒和能量守恒的自然规律依然成立。

② 《墨经》中的“力,形之所以奋也”可解释为:力是物体产生加速度的原因,与牛顿定律一致。

而发现海王星实际存在的事实,不仅有力地证实牛顿定律的正确性,而且展示出理论在指导实际方面的巨大力量和前景^①。牛顿定律在经典力学中的奠基地位被牢固树立以后,力学才得以发展成为一门科学。鉴于牛顿力学中所讨论的许多力学概念如速度、加速度、角速度、角加速度、力和力矩等都是以矢量形式出现的物理量,因此也可将牛顿力学称为**矢量力学**。

如上所述,牛顿力学是根据天体运动的大量观测资料归纳产生的力学理论。与生产活动中的物体相比较,天体的运动更接近于理想化的自由质点。在18世纪,随着机器生产的迅速发展,要求对刚体和受约束机械系统的运动进行分析。在这方面,牛顿力学继续取得进展,如欧拉(Euler, L., 1707—1783)建立了刚体的运动微分方程,达朗贝尔(d'Alembert, J. le R., 1717—1783)建立了与牛顿第二定律等效的达朗贝尔原理。达朗贝尔原理将约束归结为力的作用,提供了解决约束质点系动力学问题的一般方法。但由于未知的约束力使运动微分方程的未知变量急剧增加,因此用矢量力学方法讨论受约束物体的运动仍显得十分不便。在此历史背景下,1788年拉格朗日(Lagrange, J. L., 1736—1813)对力学提出了全新的叙述方式。他以虚位移原理和达朗贝尔原理作为力学的演绎基础,建立受约束系统的动力学普遍方程,并进而导出拉格朗日方程,从而产生了与牛顿力学并驾齐驱的新力学体系,称为**拉格朗日力学**。这种体系的特点是引进标量形式的广义坐标、能量和功,采用纯粹的分析方法使力学建立在统一的数学基础之上,而完全摆脱以矢量为特征的几何方法。因此也称为**分析力学**,以区别于牛顿的**矢量力学**。分析力学是经典力学的另一组成部分,用分析力学方法研究受约束机械系统可以避免系统内理想约束力的出现,从而在很大程度上克服了矢量力学面临的困难。

在分析力学的发展过程中,出现过对力学基本原理的不同表达方式。其中力学的变分原理占有重要地位。**变分原理**与牛顿力学或拉格朗日力学建立运动微分方程求解的思维方式完全不同。它不直接叙述运动的基本规律,而是将真实发生的运动与可能发生的运动加以比较,并提供能将真实运动从可能运动中甄别出来的准则。在各种变分原理中,哈密顿(Hamilton, W. R., 1805—1865)提出的原理最具有代表性。通常将哈密顿原理以及由哈密顿导出的正则方程称为**哈密顿力学**。拉格朗日力学和哈密顿力学都是分析力学的组成部分,其基本原理不仅适用于离散机械系统,而且也适用于更广泛的领域,如连续介质系统、机电耦合系统、控制系统和微观物质系统等。因此对量子力学和统计力学的发展

^① 1846年勒维耶(Leverrier, U. J. J.)应用牛顿的万有引力定律和动力学基本定律推算出,太阳系中除七大行星以外,还应该有一颗行星才能使计算结果与天文观测数据相符合。随后不久,伽勒(Galle, J. G.)果然在勒维耶预测的方位观测到了海王星,从而有力地证明了牛顿力学基本原理的正确性。

也起了推动作用,成为从经典力学向现代物理学过渡的桥梁。

矢量力学与分析力学是构成经典力学的两个部分。矢量力学的直观性强,是物理学中力学知识的延伸,一些重要的力学基本概念必须在矢量力学中建立,因此矢量力学一直是理论力学课程的主要内容。但也应指出,随着电子计算技术的飞速发展,目前对于复杂工程对象的动力学计算已经愈来愈多地使用分析力学方法。分析力学已经从纯理性的抽象思维走上与现代计算技术相结合的发展道路。因此,有必要提高分析力学在理论力学课程中的比重,使读者有可能应用矢量力学和分析力学两种方法来综合处理工程实际中的力学问题。

虽然在理论力学课程中演绎和计算占据了重要地位,但不能认为理论力学是纯粹的演绎科学。在近代力学的发展过程中,尤其是对于一些边缘性力学学科,还需要对客观运动规律进行观测,或在实验室进行实验,并应用经典力学的基本理论和方法对观测或实验数据进行归纳和总结,以解释新的力学现象或探索新的自然规律。不论演绎过程如何严格,所导出的一切结论都必须经受实践的检验才能被认为是正确的结论。

§ 0.3 经典力学的基本概念

1. 空间与时间

物体的机械运动表现为物体的位置变化,这种变化必须在确定的空间中进行。变化的持续性表明运动不仅在空间中而且在时间中发生。空间和时间是一切物质存在和运动的共同形式。经典力学中的空间是孤立于物体运动之外的绝对空间,即三维欧几里得空间。经典力学中的时间是孤立于物体运动之外的绝对时间。时间与空间相互独立,在空间的不同位置有相同的时间坐标。空间和时间的度量和单位已在物理学中阐明,在我国法定计量单位中,长度的单位是 m,时间的单位是 s。

2. 力与质量

力的概念产生于牛顿第一定律:物体 A 对物体 B 产生影响以改变后者的运动状态或使后者变形,则称 A 对 B 产生力的作用。自然界中存在不同性质的力,体积力是一种超距离力,如万有引力、静电引力和磁场中的洛伦兹力;面积力由物体之间的接触产生,作用于接触面,如弹力、摩擦力、流体压力和粘性阻力。质量是物体惯性的度量,其概念产生于牛顿第二定律:作用于质点的力与该力使质点产生的加速度之比对于该质点而言是一恒量,即该物体的惯性质量。此外,质量的概念也来自牛顿万有引力定律:两个质点之间的万有引力与其质量的乘

积成正比,与距离的平方成反比。按万有引力定律确定的质量称为引力质量。精密测量证实,在测量精度范围内,同一物体的惯性质量与引力质量相等,因此可以不加区分地统称为质量。在我国法定计量单位中,质量的单位是 kg,力的单位是 N($1\text{ N} = 1\text{ kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2$)。

3. 惯性参考系

根据运动的相对性,一切对于运动的描述必须相对某个确定的参考体才有意义。利用不共面但相交于一点的三根直线组成的标架作为抽象的参考体称为参考系。参考系可以固定在具体的参考体上,也可不与任何实体相联系,而理解为三维空间的一种抽象。相交于参考系中任意一点的三根相互正交并固结于参考系的有向直线构成坐标系。有向直线称为坐标轴,其交点称为原点。坐标系与参考系的区别在于:同一参考系中可以根据具体问题的需要设置不同的坐标系。在描述运动时,相对某个参考系有时也可说成相对某个坐标系而不加区分。

作为经典力学基础的牛顿定律,并非相对任何参考系都能成立。能使牛顿力学严格成立的参考系称为惯性参考系,反之为非惯性参考系。在实际计算中,哪一种参考系可以作为惯性参考系则取决于量测方法和计算要求的精确度,因此实际上存在着按精确程度区分的不同层次的惯性参考系。以太阳中心为原点、各轴指向恒星的参考系称为日心参考系,已被天文观测资料证实是非常精确的惯性参考系。物理学中证明,相对惯性参考系作匀速直线平移^①的参考系也都是惯性参考系。从工程观点考虑,任何相对惯性参考系运动的参考系,只要加速度效应引起的对于牛顿定律的偏离不超过量测方法或计算精度的允许范围,即可看作是惯性参考系。例如以地球中心为原点,各轴平行于日心参考系的地心参考系,由于地球公转的影响极其微弱,可以认为是足够精确的惯性参考系。与地球固结的参考系由于地球自转的影响,严格说来已不是惯性参考系,但对于在地面附近运动的一般工程问题,在一般精度范围内也可当作是惯性参考系。在转动物体上或在具有明显加速度的运动物体上固结的参考系则是非惯性参考系。

^① 在第六章中将给出平移的严格定义,这里可理解为参考系上的每个点均作相同的匀速直线运动。

第 一 篇

静 力 学

静力学研究物体在力系作用下的平衡规律。这里的物体是指抽象化的刚体,力系是指作用在物体上的一组力。静力学中物体的平衡是指运动的一种特殊状态,通常理解为物体相对于惯性参考系保持静止状态或匀速直线平移状态。这两种状态无本质差别,因为在绪论中已经说明,相对惯性参考系作匀速直线平移的任何参考系都是惯性参考系,因此作匀速直线平移的物体相对于以同一速度作匀速直线平移的惯性参考系必保持静止;反之,静止状态可看作是速度为零的匀速直线平移。

根据牛顿第一定律,物体如不受到力的作用必保持平衡,但客观世界中任何物体都不可避免地受到力的作用。实践经验表明,物体上作用的力系只要满足一定的条件,即可使物体保持平衡,这种条件称为力系的平衡条件。满足平衡条件的力系称为平衡力系。应该指出,物体在平衡力系作用下除有可能保持相对于惯性参考系的平衡状态以外,也有可能处于某种惯性运动状态,例如物体绕惯性参考系中某个光滑轴的匀速转动状态。因此,在动力学中,力系的平衡只是物体平衡的必要条件。只有在静力学中,才能认为力系的平衡与物体的平衡为同一概念。

实践经验还表明,在刚体上任意增加或减去平衡力系必不影响刚体的平衡,称为增减平衡力系原理。可由此推论,处于平衡状态的同一刚体可作用有不同的平衡力系,这些不同的力系对刚体的作用效果完全相同,因此称它们互为等效力系。更广泛的等效概念应叙述为:若作用于同一刚体的两组不同力系能使该刚体的运动状态产生完全相同的变化,则称这两组力系互为等效。一个力系用其等效力系来代替,称为力系的等效替换。用一个简单力系等效替换一个复杂力系,称为力系的简化。若力系与一个力等效,则称后者为该力系的合力。平衡力系也可定义为简化结果为零的力系。

静力学主要讨论以下两个基本问题:

- (1) 力系的等效替换和简化;
- (2) 力系的平衡条件及其应用。

虽然静力学的研究对象是刚体,但所导出的平衡条件对于必须考虑变形的

物体也有实际意义。因为实践经验表明:在力系作用下处于平衡状态的变形体如刚化成刚体,则平衡不受影响。此结论通常称为刚化原理,即:能使变形体平衡的力系若作用于刚体,也必然能使刚体平衡,但反之则不一定。刚化原理也可叙述为:刚体的平衡条件是变形体平衡的必要(但不充分)条件。由多个刚体组成的机构、弹性体、塑性体、流体、流变体都是变形体,各种变形体在力作用下各自具有特殊的变形规律,而上述平衡的必要条件则适用于一切变形体。

静力学的演绎必须以若干条基本原理为出发点,这些原理是从人类亿万次实践中归纳总结出来的真理而无须证明。在一些静力学教科书中,有时也将这些基本原理称为公理。通常可列出以下五条公理:

- (1) 二力平衡公理;
- (2) 增减平衡力系公理;
- (3) 力的平行四边形公理;
- (4) 作用与反作用公理;
- (5) 刚化公理。

其中公理(2),(5)就是上面已经叙述过的增减平衡力系原理和刚化原理,公理(4)就是牛顿第三定律。实际上静力学中的公理与动力学中的原理或定律在涵义上无原则区别,不同的称呼是由于历史原因形成的。虽然静力学公理体系使静力学的演绎带有与平面几何学公理体系类似的特点,但它对于静力学并非绝对必需,因为这些原理也可在叙述力的性质及平衡条件时直接阐明而不影响静力学演绎的严格性。本章采用后一种叙述方法。

本篇所叙述的静力学建立在力的矢量特性基础上,称为矢量静力学。所涉及的物理量,如力、力矩、力偶矩等都是矢量,各物理量之间以简明的矢量关系式相联系。利用矢量在参考坐标系上的投影,可将矢量运算化为投影矩阵之间的标量运算。除矢量静力学以外,还有另一种用分析方法表达的静力学,称为分析静力学。分析静力学是分析动力学的特殊情形,将在本书第十五章中叙述。

第一章 力和力矩

§ 1.1 力的性质

人类对力的认识最初来自劳动中所使用的体力,以后在长期的生产实践中逐渐加深认识,直到产生牛顿第一定律才建立起严格的力的定义:力是物体之间的相互作用,能使物体的运动状态发生变化,或使物体变形。对于不变形的刚体,力的作用只改变其运动状态。力具有以下性质:

性质一:力对物体的作用效果取决于三个因素:大小、方向和作用点。

此性质称为力的三要素。力的大小即物体之间机械作用的强度,在我国法定的计量单位中以 N 或 kN 为单位。力的方向即物体之间机械作用的方向。力的作用点即物体之间机械作用的位置。可以用有向线段表示力的三要素,线段的长度表示力的大小,箭头表示力的方向,线段的起点或终点表示力的作用点,线段所在的直线称为力的作用线。

性质二:在同一作用点上作用的两个力,其合力的大小与方向由表示两力的有向线段为边所构成的平行四边形的对角线确定,且具有相同的作用点。

此性质称为力的平行四边形法则,它表明力的合成符合矢量求和规则。根据力的上述性质,力可以用矢量来表示。以矢量 F_1, F_2 表示作用于 A 点的两个力,其合力 F 为 F_1 和 F_2 的矢量和(图 1.1):

$$F = F_1 + F_2$$

作为一种特例,当矢量和 F 等于零矢量时, $F_2 = -F_1$ 。这表明同一作用点上的两力如大小相等、方向相反,则对物体的作用效果等于零,即 F_1 和 F_2 组成平衡力系。根据实践经验,此平衡条件中相同的作用点对于刚体可放宽为沿相同的作用线。归纳为以下二力平衡条件:

受二力作用的刚体平衡的必要充分条件是二力的大小相等,方向相反,沿同一作用线(图 1.2)。

利用二力平衡条件和增减平衡力系原理还可以证明以下推论:

力在刚体上的作用点可沿作用线移至刚体内的任意点而不改变该力对刚体

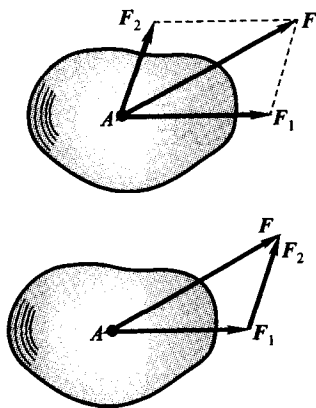


图 1.1 力的分解与合成

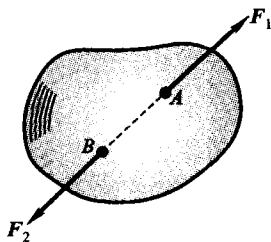


图 1.2 二力平衡

作用的效果。

此性质称为力的可传性,证明留给读者自己完成。考虑这一性质,作用于刚体的力的三要素可改为:大小、方向和作用线。沿作用线可任意滑动的矢量称为滑动矢量,因此作用于刚体的力是滑动矢量。但此结论完全不适用于变形体。对于变形体,力的作用效果与作用点密切相关。作用点不得任意改变的矢量称为定位矢量,作用于变形体的力是定位矢量。

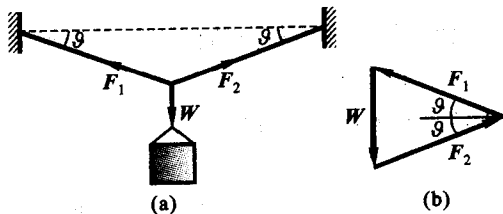
性质三:作用力与反作用力同时存在,大小相等、方向相反,沿同一作用线分别作用于不同的物体。

此性质就是牛顿第三定律的内容。注意不要将作用力与反作用力性质与二力平衡条件相混淆,前者的两力分别作用于不同物体,而后的两力作用于同一物体。

★ 试利用二力平衡条件和增减平衡力系原理证明力的可传性。

例 1.1 在水平软绳的中心 A 点处悬挂一重量为 W 的物体(图 a),使绳产生变形,相对水平线倾斜 ϑ 角,求绳的拉力 F_1 和 F_2 (拉力沿拉直的绳方向)。设 $W = 10\text{ N}$, $\vartheta = 5^\circ$, 计算拉力的大小。

解: 根据刚化原理,绳的左右两边拉力 F_1 和 F_2 的合力应与重力 W 平衡,即



例 1.1 图

$$F_1 + F_2 = -W \quad \text{或} \quad F_1 + F_2 + W = 0$$

则 F_1, F_2 和 W 必组成封闭的力三角形(见图 b), 利用几何关系导出

$$|F_1| = |F_2| = F = \frac{W}{2 \sin \vartheta}$$

代入 $W = 10 \text{ N}$, $\vartheta = 5^\circ$, 算出 $F = 57.4 \text{ N}$, 约为重量的 6 倍。

§ 1.2 力矢量的坐标表示

任何矢量都可用相对于某个坐标系的坐标表示。以作用点 O 为原点, 建立坐标系 ($Oxyz$), 沿各坐标轴的单位矢量称为此坐标系的基矢量, 以 i, j, k 表示, 则力矢量 F 可用相对于 ($Oxyz$) 各轴的投影 F_x, F_y, F_z 表示为

$$F = F_x i + F_y j + F_z k \quad (1.2.1)$$

各轴的投影等于力矢量与该轴基矢量的标积:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= F \cdot i = F \cos(F, i) \\ F_y &= F \cdot j = F \cos(F, j) \\ F_z &= F \cdot k = F \cos(F, k) \end{aligned} \right\} \quad (1.2.2)$$

其中 (F, i) 等表示括号内二矢量的夹角, F 为 F 的模:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (1.2.3)$$

对于确定的坐标系 ($Oxyz$), 也可将力的投影排成列阵, 作为力的矩阵表示形式, 记作

$$F^{(0)} = (F_x \quad F_y \quad F_z)^T \quad (1.2.4)$$

力矢量 F 向坐标轴投影时, 也可先沿某个坐标平面, 如 (Oxy) 平面, 以及垂直于该平面的坐标轴, 如 z 轴, 投影为两个分量 F_{xy} 和 $F_z k$, 然后将 F_{xy} 向 x 轴和 y 轴再次投影, 得到 $F_x i$ 和 $F_y j$ (图 1.3)。这种二次投影法是静力学中常用的方法。

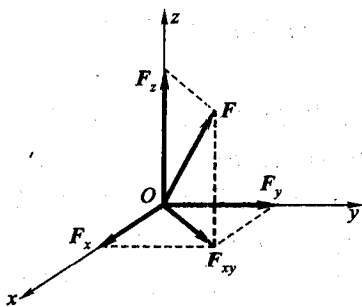


图 1.3 力的二次投影

§ 1.3 力对点的矩

在生活中和生产实际中, 存在着绕固定点转动的物体。用球铰链联结的台灯和汽车操纵杆就是常见的例子(图 1.4)。实践经验表明, 当可绕固定点 O 转

动的刚体上受到力 F 的作用时,原来静止的刚体将以 F 的作用线与 O 点所组成的平面的法线为轴产生转动趋势,方向取决于力在该平面内的指向,强弱程度取决于力 F 的大小和 O 点到 F 的作用线的垂直距离 h 的乘积。

为了衡量力对刚体绕固定点转动的作用效果,建立以下力对点的矩的抽象概念:设 O 为空间的任意确定点,自 O 至力 F 的作用点 A 引矢径 r (图 1.5),则 r 和 F 的矢积称为 F 对 O 点之矩,简称力矩,记作 $M_O(F)$ (或在不致产生误解的情况下简写成 M_O),即

$$M_O(F) = r \times F \quad (1.3.1)$$

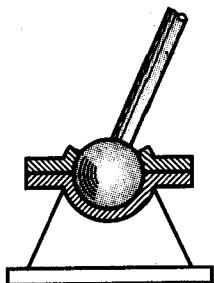


图 1.4 球铰链

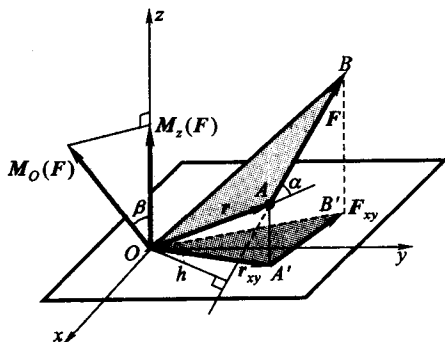


图 1.5 力对点的矩

设 α 为 r 与 F 的夹角,上述力矩矢量的模为

$$|M_O(F)| = |r \times F| = Fr \sin \alpha = Fh$$

等于力的模与力臂 h 的乘积。力矩的方向即矢积 $r \times F$ 的方向。因此,力矩矢量恰好全面地表达了力对绕定点转动刚体的转动效应,点 O 称为矩心,在式 (1.3.1) 中定义的力矩符号中以下角标表示。由于力矩矢量 $M_O(F)$ 的模和方向都与矩心 O 的位置有关,因此力矩是一个定位矢量,其始端必须放在矩心上。也可将大小、方向和矩心看作是力矩的三要素。力矩的单位是 $\text{N} \cdot \text{m}$ 或 $\text{kN} \cdot \text{m}$ 。既然矢量 r 和 F 均满足平行四边形合成法则,则它们的矢积也必然满足这个矢量求和法则。由此直接得出以下结论:矩心相同的两个力矩矢量也按平行四边形法则合成。

以 O 为原点建立直角坐标系 ($Oxyz$),设 F 用式 (1.2.1) 表示, r 用下式表示:

$$r = xi + yj + zk$$

根据矢积的算法,导出

$$M_O(F) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= (yF_z - zF_y)\mathbf{i} + (zF_x - xF_z)\mathbf{j} + (xF_y - yF_x)\mathbf{k}$$

基矢量 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 前面的三个系数, 分别表示力矩矢量 $\mathbf{M}_O(\mathbf{F})$ 在三个坐标轴上的投影, 即

$$M_{Ox} = yF_z - zF_y \quad (1.3.2a)$$

$$M_{Oy} = zF_x - xF_z \quad (1.3.2b)$$

$$M_{Oz} = xF_y - yF_x \quad (1.3.2c)$$

式(1.3.1)也可用矩阵表示, 设 $\mathbf{M}_O$ 的投影列阵和 $\mathbf{r}$ 的投影反对称方阵(见附录 A)分别为

$$\mathbf{M}_O^{(0)} = \begin{pmatrix} M_{Ox} \\ M_{Oy} \\ M_{Oz} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{r}}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \quad (1.3.3)$$

则有

$$\mathbf{M}_O^{(0)} = \tilde{\mathbf{r}}^{(0)} \mathbf{F}^{(0)} \quad (1.3.4)$$

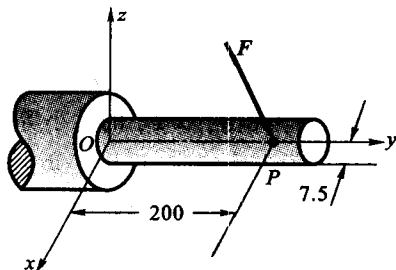
例 1.2 镗刀杆的刀头 P 点处受切削力 $\mathbf{F}$ 作用如图示, $\mathbf{F}$ 的大小为 500 N, 与 $(Oxyz)$ 各轴的夹角分别为 $108^\circ, 81^\circ$ 和 165° , 作用点 P 位于 (Oxy) 坐标面内, 与 y 轴和 x 轴的距离分别为 7.5 mm 和 200 mm, 求力 $\mathbf{F}$ 对刀杆根部点 O 的力矩。

解: 先计算 $\mathbf{F}$ 沿 $(Oxyz)$ 各轴的投影, 得到

$$F_x = (500 \text{ N}) \times \cos 108^\circ = -154.5 \text{ N}$$

$$F_y = (500 \text{ N}) \times \cos 81^\circ = 78.2 \text{ N}$$

$$F_z = (500 \text{ N}) \times \cos 165^\circ = -483.0 \text{ N}$$



例 1.2 图^①

将上式和 $x = 7.5 \text{ mm}, y = 200 \text{ mm}, z = 0$ 代入式(1.3.2), 算出

$$M_{Ox} = (0.2 \text{ m}) \times (-483.0 \text{ N}) = -96.6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{Oy} = (-0.0075 \text{ m}) \times (-483.0 \text{ N}) = 3.6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{Oz} = (0.0075 \text{ m}) \times (78.2 \text{ N}) - (0.2 \text{ m}) \times (-154.5 \text{ N}) = 31.5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

也可利用矩阵式(1.3.4)计算, 得到

$$\begin{pmatrix} M_{Ox} \\ M_{Oy} \\ M_{Oz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & -0.0075 \\ -0.2 & 0.0075 & 0 \end{pmatrix} \text{ m} \cdot \begin{pmatrix} -154.5 \\ 78.2 \\ -483.0 \end{pmatrix} \text{ N} = \begin{pmatrix} -96.6 \\ 3.6 \\ 31.5 \end{pmatrix} \text{ N} \cdot \text{m}$$

① 按有关制图标准规定, 在本书各图中, 凡长度尺寸的单位为 mm 者, 将不再标注其单位 mm。

§ 1.4 力对轴的矩

在生活中和工程实际中,还大量存在着绕固定轴转动的物体,例如用柱铰链安装的门窗、带有轴承的车轮和各种旋转机械等。设绕固定的 z 轴转动的刚体上受到力 F 的作用,将力 F 沿 z 轴和垂直于 z 轴的任意平面(Oxy)分解为 F_z 和 F_{xy} 两个分量(图 1.6)。实践经验表明, F_z 不影响刚体的转动,而 F_{xy} 能使原来静止的刚体绕 z 轴产生转动趋势,方向取决于 F_{xy} 在(Oxy)平面内的指向,强弱程度取决于 F_{xy} 的大小和 O 点到 F_{xy} 的垂直距离 h 的乘积。

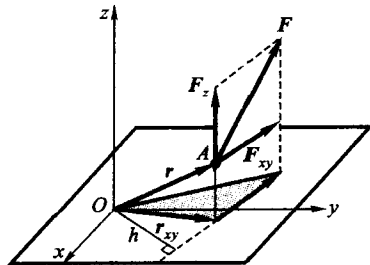


图 1.6 力对轴的矩

为了衡量力对刚体绕固定轴转动的作用效果,建立以下力对轴的矩的抽象概念:设 z 轴为空间中的任意确定轴,则力 F 在垂直于 z 轴的任意平面上的投影 F_{xy} 对 z 轴与平面交点 O 之矩为力对轴的矩。自点 O 至力 F 的作用点 A 引矢径 r , r 在(Oxy)平面上的分量 r_{xy} 与 F_{xy} 的矢积可用来表达力对刚体绕 z 轴的转动效应。不难验证,矢积 $r_{xy} \times F_{xy}$ 的大小等于 $F_{xy}h$,其方向沿 z 轴的正向或负向。当 z 轴的方向已预先确定时,可用正负号表示此矢积的方向,正号表示沿 z 轴的正方向,负号表示沿 z 轴的负方向。因此力对 z 轴的矩定义为 r_{xy} 与 F_{xy} 的矢积在 z 轴上的投影,记作 $M_z(F)$,即

$$M_z(F) = (r_{xy} \times F_{xy}) \cdot k \quad (1.4.1)$$

根据上述定义不难判断,当力沿其作用线滑动时,力对轴的矩不变。当力的作用线与 z 轴平行($F_{xy} = 0$)或相交(r_{xy} 和 F_{xy} 共线)时,矢积 $r_{xy} \times F_{xy}$ 均为零。可归纳为:力与轴共面时,力对轴的矩为零。

利用矢量 r_{xy} , F_{xy} 在 x 轴和 y 轴上的投影式

$$r_{xy} = xi + yj, \quad F_{xy} = F_x i + F_y j$$

计算力对 z 轴的矩,导出

$$M_z(F) = xF_y - yF_x$$

将上式与式(1.3.2c)对照,可看出 $M_z(F)$ 与 M_{O_z} 完全相同,即

$$M_z(F) = M_{O_z} = (r \times F) \cdot k \quad (1.4.2)$$

表明力对轴的矩等于力对该轴上任意点的矩在该轴上的投影。

此结论也容易从图 1.5 中直观地看出, M_O 和 M_z 分别等于 $\triangle OAB$ 和 $\triangle OA'B'$

面积的 2 倍,后者恰好等于前者在 (Oxy) 平面上的投影,而两个三角形所在平面的夹角 β 即为矢量 M_O 和 z 轴之间的夹角。

例 1.3 槽形架在点 O 处用螺栓固定,在点 A 处受倾斜角为 ϑ 的力 F 作用,尺寸如图示。求力 F 对危险截面 O 处垂直于力作用平面的 Oz 轴的力矩。

解:以 O 为原点作参考坐标系 $(Oxyz)$,作矢径 $r = OA$,写出 F 和 r 的投影式:

$$F = -F(\cos \vartheta i + \sin \vartheta j), \quad r = (a-b)i + hj$$

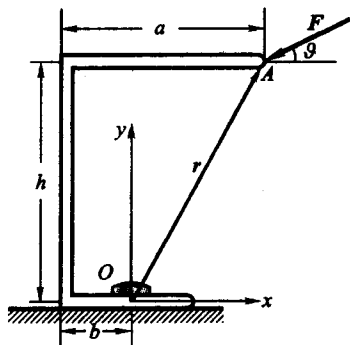
代入式(1.3.1)计算对点 O 的矩,得到

$$M_O(F) = r \times F = -F \begin{vmatrix} i & j & k \\ a-b & h & 0 \\ \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \end{vmatrix} = F[h \cos \vartheta - (a-b) \sin \vartheta] k$$

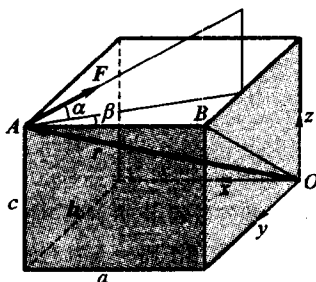
则 F 对 Oz 轴的矩为

$$M_z(F) = F[h \cos \vartheta - (a-b) \sin \vartheta]$$

例 1.4 长方体三边分别为 a, b, c ,在顶点 A 作用一力 F ,其模为 F ,方向如图所示。求 F 对联结顶点 OB 轴的矩。



例 1.3 图



例 1.4 图

解:以 O 为原点建立坐标系 $(Oxyz)$,写出 $r = \overrightarrow{OA}$ 和 F 的投影式。写 F 的投影式时,可用二次投影方法:

$$r = ai + bj + ck$$

$$F = F(-\cos \alpha \cos \beta i - \cos \alpha \sin \beta j + \sin \alpha k)$$

代入式(1.3.1)计算 F 对点 O 的矩,得到

$$\begin{aligned} M_O(F) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ -F \cos \alpha \cos \beta & -F \cos \alpha \sin \beta & F \sin \alpha \end{vmatrix} \\ &= F[(b \sin \alpha + c \cos \alpha \sin \beta)i - (a \sin \alpha + c \cos \alpha \cos \beta)j + \dots] \end{aligned}$$

$$(-a \cos \alpha \sin \beta + b \cos \alpha \cos \beta) \mathbf{k}]$$

设 $\mathbf{e}$ 为 OB 轴的基矢量, 则有

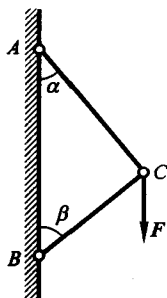
$$\mathbf{e} = \frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|} = \frac{(b\mathbf{j} + c\mathbf{k})}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

利用式(1.4.2), 得到

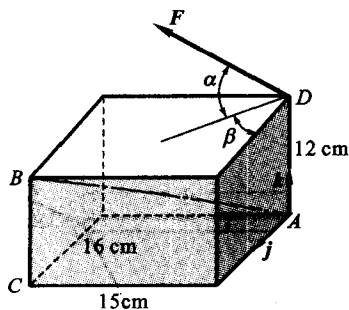
$$\begin{aligned} M_{OB}(\mathbf{F}) &= \mathbf{M}_O(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{e} \\ &= -\frac{Fa(b \sin \alpha + c \cos \alpha \sin \beta)}{\sqrt{b^2 + c^2}} \end{aligned}$$

习 题

1.1 如图示, 将垂直力 F 沿 AC 和 BC 方向分解, 求分解后的分力。



题 1.1 图



题 1.2 图

1.2 如图示, 已知 $\alpha = \arctan(3/4)$, $\beta = \arctan(4/3)$, 试将作用于长方体棱角 D 、大小为 100 N 的力 F 用基矢量表示, 并计算其在长方体对角线 AB 上的投影。

1.3 已知作用于同一点的三个力(单位均为 N) $\mathbf{F}_1 = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$, $\mathbf{F}_2 = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{F}_3 = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ 在 l 轴上的投影分别为 7 N, 2 N 和 4 N, 试求 l 轴的基矢量 $\mathbf{e}_l$ 。

1.4 两轴(基矢量分别为 $\mathbf{e}_1$ 和 $\mathbf{e}_2$)的夹角为 β , 处于两轴所在平面的力 F 在这两轴上的投影分别为 F_1 和 F_2 , 试求力 F 。

1.5 如图示, 求力 F 在 x_1 轴上的投影及对于 z_2 轴之矩。

1.6 计算图示手柄上的力 F 对于 Ax , Ay , Az 轴之矩。已知 $F = 500$ N, $AB = 20$ cm, $BC = 40$ cm, $CD = 15$ cm, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$ 。

1.7 计算题 1.2 中力 F 对长方体另一棱角 C 点的矩。

1.8 力 F 沿边长为 a, b, c 的长方体的一棱边作用如图示。试计算 F 对于长方体对角线 OC 之矩。

1.9 力 F 沿长方体对角线 AB 作用如图示。求 F 对 y 轴及 CD 轴之矩。已知 $F = 1$ kN, $a = 18$ cm, $b = c = 10$ cm。