目　录

第一章　平面坐标法

一、内容概述

本章是平面解析几何的基础，也是中学解析几何的复习，主要谈两个问题，即“平面坐标法”和“方程与图形”.

在平面内建立了坐标系（直角坐标系或极坐标系）后，平面内的点就与有序实数对建立了一种对应关系，这样平面内的点就有了坐标，曲线就有了方程，也就是说，我们可以用有序实数对来表示点，用方程来表示曲线，平面上的几何结构也就被数量化，代数化了，从而我们也就可以用代数方法来研究几何问题了.

本章教材分平面直角坐标、方程与图形和极坐标三个单元.

第一单元：平面直角坐标，即教材的§1.1. 这是解析几何的最基础的部分. 在这一单元中，我们引进了平面直角坐标系，建立了两点间距离与线段的定比分点公式，并且介绍了解析法证题. 这些基础内容，以后经常要用到，十分重要.

第二单元：方程与图形，即教材的§1.2. 它是在前一单元的基础上，阐述了曲线方程的概念，进一步把曲线与方程联系起来. 这一单元介绍的由曲线求它的方程与由方程描绘它的图形，通常叫做曲线与方程的两个基本问题，它揭示了本课程的基本思想，体现了形数结合的基本精神.

第三单元：极坐标，即教材的§1.3. 这是另一种常用的坐标. 它的思想方法与直角坐标十分类似. 在这一单元中，当平面内引进了极坐标系后，就讨论了曲线与它的极坐标方程的两个基本问题，在第一个基本问题，即由曲线求它的极坐标方程中，我们建立了一些常用的曲线如直线、圆、圆锥曲线的极坐标方程，并且

通过例题说明了如何利用极坐标来求动点的轨迹方程，有些复杂的曲线，特别是那些与定点有关的动点的轨迹方程，应用极坐标不仅容易建立，而且形式简单．第二个基本问题即由极坐标方程描绘它的曲线，它与直角坐标的情况一样，基本方法仍然是描点法．最后阐明了极坐标与直角坐标之间的关系，介绍了极坐标与直角坐标的互换公式，以便使点的坐标与曲线的方程在两种坐标系中可以互化．

二、学习要求

1．理解并掌握用有序实数对来刻划点在平面内的位置的直角坐标法与极坐标法，以及两种坐标的互换公式．

2．掌握两点间的距离公式与线段的定比分点公式，并能初步用解析法来证明简单的平面几何题．

3．理解曲线方程的意义，并能根据已知条件选取适当的坐标系，建立曲线的方程（直角坐标方程或极坐标方程）；反过来，能够通过对方程（直角坐标方程或极坐标方程）的讨论，掌握曲线的性质，并画出曲线的图形．

三、学习辅导

1．平面直角坐标

1）有向线段

有向线段，有向线段的长度与有向线段的数值是三个不同的概念，它们既有联系又有区别，它们的记法也不一样．

有向线段是一个几何量，或者说是一个几何图形，以A为起点B为终点的有向线段记做$\overline{AB}$．起点与终点重合的线段叫做零线段，零线段的方向不确定，为方便起见，约定这样的线段也称有向线段．

有向线段的长度是一个正实数,零线段的长度为零,一般有向线段的长度是一个正数,即当选定了一条线段作为长度单位后,去量由有向线段两个端点所决定的线段所得的那个正数. 有向线段$\overline{AB}$的长度记做$|AB|$.

有向线段的数值是一个实数,即它的长度加上正号或负号,当它与所在有向直线的方向相同时为正,相反时为负,零线段的数值为零. 有向线段$\overline{AB}$ 的数值记做 AB.

必须指出,只有当有向线段配置在有向直线上或平行于有向直线时,我们才能比较出有向线段的方向是正还是负,从而才能确定有向线段的数值是正数还是负数,离开了有向直线谈有向线段的数值是没有意义的.

2) 平面解析几何的两个基本公式

平面直角坐标是平面解析几何里应用得最广泛的一种坐标法. 在平面上取定了相互垂直且有公共原点的两数轴, 平面上就确定了一个直角坐标系. 这时平面上的点与一对有序实数就建立了一一对应的关系, 这样平面上的点的位置完全可以由一对有序实数,即点的坐标来刻划,也就是说可以用数来表示点, 从而研究平面上点的问题就转化为研究点的坐标,也就是数的问题了. 例如两点 $M_1(x_1,y_1)$与 $M_2(x_2,y_2)$之间的距离和分有向线段$\overline{M_1M_2}$成定比 λ 的分点M的坐标(x,y)都可以由 M_1 与 M_2 的坐标通过计算而得到,它们分别是教材中的(1.1-2)与(1.1-4),即

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \tag{1.1-2}$$

与

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \tag{1.1-4}$$

公式(1.1-2)的证明,是假定$\overline{M_1M_2}$与坐标轴不平行, 利用直角三角形的勾股定理而得证的,为了说明公式(1.1-2)的普遍性, 我们最后通过验证, 说明当$\overline{M_1M_2}$与坐标轴平行时 (1.1-2)也成立,这一验证的步骤是必要的,不可少的, 因为当$\overline{M_1M_2}$与坐标轴

平行时，直角三角形不存在，勾股定理也就不能应用了.

公式(1.1-4)的应用，必须注意(x_1,y_1)是有向线段起点的坐标，(x_2,y_2)是终点的坐标，而(x,y)是分点的坐标，不能随意改变. 如果M分有向线段$\overline{M_2M_1}$成定比λ，即取$M_2(x_2,y_2)$为起点，$M_1(x_1,y_1)$为终点，那么，分点坐标为

$$x=\frac{x_2+\lambda x_1}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_2+\lambda y_1}{1+\lambda}$$

弄清楚了这一点，那么共线的三点当任意确定了起点、终点与分点后，它们坐标之间的关系就由(1.1-4)给定，教材§1.1例3的解法二就是根据这一点.

公式(1.1-4)的应用，一般有下面四种情况：

1° 已知线段的起点与终点的坐标以及定比λ，求分点的坐标.

2° 已知线段的分点坐标，起点(或终点)坐标及比值λ，求终点(或起点)的坐标；

3° 已知线段的起点、终点及分点的坐标，求比值λ；

4° 证三点共线. 如果按3°，由三点的横坐标求出的λ与由纵坐标求出的λ'的值相同，即$\lambda=\lambda'$，那么，三点共线.

3) 解析法证题

当平面上建立了直角坐标系之后，平面上的点都有了坐标，我们就可以用坐标法即解析法来证明一些简单的几何题. 在这里必须指出，在解析几何中有时也利用平面几何的定理作为论证根据，因为一切都要用解析法徒然增加证明的困难与烦琐. 解析法证题，仅是证明几何命题的一种方法，有时，它不一定比直接从几何的定义、定理经过逻辑推理证明的“综合法”容易，但一般说来，解析法便于构思，方法具有普遍性.

用解析法证题时，选取适当的坐标系可使证明简单，例如教材§1.1例4中的两种坐标系的选取，都有利于简化运算，如果取一

般的坐标系运算就要复杂一些了．这是因为如果取一般的直角坐标系，那么平行四边形 $ABCD$ 的四顶点的坐标可设为

$$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3),D(x_4,y_4),$$

再根据平行四边形对角线相互平分的条件有

$$\frac{x_1+x_3}{2}=\frac{x_2+x_4}{2} \quad 与 \quad \frac{y_1+y_3}{2}=\frac{y_2+y_4}{2},$$

即

$$x_1+x_3=x_2+x_4 \quad 与 \quad y_1+y_3=y_2+y_4. \tag{1}$$

然后由两点距离公式通过计算，并运用(1)才能证得

$$|AB|^2+|BC|^2+|CD|^2+|DA|^2$$
$$=|AC|^2+|BD|^2.$$

虽然我们还可以把上述的证法改进一下，设平行四边形 $ABCD$ 的两顶点 A、B 的坐标为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，两对角线 AC 与 BD 的交点 M_0 的坐标为 $M_0(x_0,y_0)$，那么其余两顶点的坐标为 $C(2x_0-x_1,2y_0-y_1)$，$D(2x_0-x_2,2y_0-y_2)$，这样通过计算也能证得

$$|AB|^2+|BC|^2+|CD|^2+|DA|^2=|AC|^2+|BD|^2$$

但是以上证法与教材中的方法比较，我们不难发现，它在证明过程中的计算就要繁一些了．

2．方程与图形

1）曲线与方程

曲线(或图形)是几何中的对象，方程是代数中的对象，我们通过坐标法把它们联系起来了，因此曲线(或图形)与方程是解析几何的基本概念．我们知道，这里所指的曲线是动点的轨迹，因为动点运动的规律不同，动点的轨迹也不一样，所以轨迹是说明动点变动规律的几何形象．既然点可以用坐标表示，点的变动也就可以用坐标的变动来表示，而点的变动规律可以用坐标 (x,y) 的变动

规律来表示，也就是用含有两个变量 x,y 的方程来表示，于是平面上的曲线便与代数中的方程 $F(x,y)=0$ 联系起来了．这样我们在教材中就提出了关于方程与图形的定义 1.2.1，这个定义非常重要，读者对它要有充分的认识．

关于方程与图形有两个基本问题必须解决．

① 已知曲线(或图形)，求它的方程；

② 已知方程，画出它的图形(或曲线)．

所谓"由曲线求它的方程"就是把"构成曲线的几何条件"转化为"动点的坐标(x,y)所适合的方程"，也就是说把"几何条件"翻泽成"代数条件"，因此在一般情况下，求得曲线的方程之后，我们还不能知道这方程所代表的曲线的形状．必须通过第 2 个基本问题的讨论，才能画出这方程所表示的图形．

2）由曲线求它的方程

由曲线求它的方程一般需要下面的五个步骤：

1° 选取适当的坐标系(如题目中已给定，这一步可省略)；

2° 在曲线上任取一点 $M(x,y)$；

3° 根据曲线上的点所要满足的几何条件写出等式；

4° 用点的坐标 x,y 的关系式来表示这个等式，并化简得方程；

5° 证明所得的方程就是曲线的方程也就是证明它符合定义1.2.1(如果化简的过程都是同解变形的过程，便可断言所得的方程就是曲线的方程)．

教材§1.2 中的例 1 一例 6 基本上就是按照上面的步骤来解的．在这些步骤中的第 1°步，往往影响到方程的繁简，教材中提出的几点习惯的做法，例如，遇到问题中有直角，可取直角边作为两坐标轴建立直角坐标系；如果遇到图形有对称轴或对称中心，又常常取对称轴为坐标轴，或对称中心为坐标原点建立直角坐标系，这时的曲线方程将比较简单，但是一般地说，建立坐标系无一定的

规律可循，只有通过实践，多练习、多总结，注意具体问题具体分析，才能逐步掌握好这一点.

解决了第一个基本问题，即建立了曲线的方程之后，研究曲线与曲线之间的关系就转化为讨论方程与方程之间关系的代数问题，也就是说我们可以用代数的方法来研究有关曲线的几何问题了，教材中以平面上最简单的曲线——直线为例，用代数的方法研究了两直线的位置关系和点与直线的位置关系的判定，以及导出了两直线的交角和点到直线的距离的计算公式，读者不仅要掌握这些结论，而且要领会它的思想方法.

3）由方程画出它的图形

由方程如何画出它的图形，我们介绍了“描点法”，在这里我们提出几点注意事项：

1° 必须明确在画方程的图形时，对方程进行讨论的重要性. 例如对方程进行讨论很容易明确 $x^2-y^2=0$ 代表两相交直线 $(x^2-1)^2+(y^2-1)^2=0$ 代表四个点 $(1,1)$ $(-1,1)$，$(-1,-1)$ 与 $(1,-1)$，而方程 $(x^2+1)^2+(y^2+1)^2=0$ 不表示任何实图形，如果不进行讨论，这些结论并不是很显然的.

2° 在讨论曲线的三种对称性（即关于 x 轴，关于 y 轴，关于坐标原点对称）中，如果有两种成立，那么第三种必然成立. 例如当曲线关于 x 轴与 y 轴都对称，那么曲线关于坐标原点一定对称，这是因为曲线关于 x 轴对称，所以当点 (x,y) 在曲线上时，它关于 x 轴的对称点 $(x,-y)$ 也在曲线上；又曲线关于 y 轴也对称，从而当点 $(x,-y)$ 在曲线上时，它关于 y 轴的对称点 $(-x,-y)$ 也在曲线上，这样从点 (x,y) 在曲线上，推得点 $(-x,-y)$ 也在曲线上，因此曲线关于原点对称.

3° 求曲线的范围，归根到底是确定 x（或 y）的变化范围使得 y（或 x）成为实数，它和解不等式有着密切的关系，但无统一法则，只能具体问题具体分析，例如对方程

$$y^2=4x^3-3x-1$$

所表示的图形范围可作如下讨论，先把方程改写为

$$y^2=(x-1)(2x+1)^2,$$

于是可以看出$\left(-\frac{1}{2},0\right)$适合这方程，从而点$\left(-\frac{1}{2},0\right)$是图形中的点．另一方面当 $x\geqslant 1$ 时，$y^2\geqslant 0$，因此在直线 $x=1$ 的右侧有图形上的点，但当 $x<1$ 时$\left(除去 x=-\frac{1}{2}\right)$，$y^2<0$，所以除点$\left(-\frac{1}{2},0\right)$以外在直线 $x=1$ 的左侧没有图形上的点，所以方程表示的图形是由孤立点$\left(-\frac{1}{2},0\right)$与直线 $x=1$ 的右侧的曲线构成．

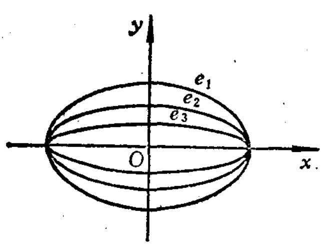
3．椭圆、双曲线的离心率

椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(b^2=a^2-c^2)$的离心率为

$$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}},$$

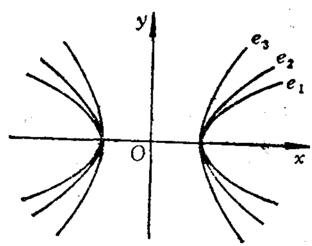
$$0<e<1,$$

所以当 e 越大，$\frac{b}{a}$越小，椭圆也就越扁；当 e 越小，$\frac{b}{a}$越大，椭圆也就越圆，如图 1-1（图中将椭圆的 a 值固定）．



$0<e_1<e_2<e_3<1$

图 1-1



$1<e_1<e_2<e_3$

图 1-2

双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(b^2=c^2-a^2)$的离心率为

$$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}, \quad e>1.$$

所以当离心率 e 越小，$\frac{b}{a}$也越小，双曲线越弯曲；当 e 越大，$\frac{b}{a}$也越大，双曲线就越伸直，如图 1-2(图中双曲线的 a 值固定).

4. 直线族

直线族是指具有共同性质的直线的集合，在解析几何中常用带有参数的关于 x,y 的一次方程来表示，本课程主要介绍了直线束，定理 1.2.3 证明了以两相交直线

$$l_1:\ A_1x+B_1y+C_1=0$$
$$l_2:\ A_2x+B_2y+C_2=0$$

的交点为中心的中心直线束的方程为

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2)=0, \tag{2}$$

其中 λ,μ 是不全为零的参数. 证明的步骤分三步：

1° 不论$\lambda:\mu$取何值，(2) 总是一个二元一次方程，所以(2)总表示直线；

2° 由(2)表示的直线总通过两已知直线 l_1与l_2 的交点；

3° 由(2)表示的直线包含了平面上通过 l_1与 l_2交点的所有直线.

定理 1.2.4 是关于平行直线束的问题.

如果把定理 1.2.3 的条件作一些扩充，即如果$l_1 /\!/ l_2$，那么有

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2},$$

于是

$$\frac{\lambda A_1+\mu A_2}{A_2}=\frac{\lambda B_1+\mu B_2}{B_2},$$

所以直线

$$(\lambda A_1+\mu A_2)x+(\lambda B_1+\mu B_2)y+(\lambda C_1+\mu C_2)=0,$$

即(2)也与它们平行，因此当 $l_1 /\!/ l_2$ 时，方程(2)表示平行直线束.

利用直线束来求直线的方程是一个很重要的方法，特别是对于那些通过两已知直线交点或平行于已知直线的直线问题. 利用直线束可使这些问题的解法更加方便. §1.2 的例 8 与例 9 就说明了这个问题.

5. 极坐标

1) 极坐标系下曲线与其方程的关系

极坐标是平面解析几何中常用的另一种坐标法，也是用一对有序实数来确定平面上点的位置，但是在极坐标系下，平面上的点 M 与有序实数对 (ρ,φ) 之间的对应关系并不是一一对应的，同一个点，它的极坐标却有无数多，例如当 (ρ,φ) 是点 M 的极坐标时，那么 $(\rho,\varphi+2k\pi)$ 与 $(-\rho,\varphi+(2k+1)\pi)$（$k$ 为整数）都可以作为点 M 的极坐标，所以在极坐标系下，曲线与其极坐标方程之间的关系是：满足方程 $F(\rho,\varphi)=0$ 的 (ρ,φ) 必是曲线 L 上的某一点的坐标；反过来，曲线 L 上的任何一点至少有一组极坐标 (ρ,φ) 满足方程 $F(\rho,\varphi)=0$，例如对于双曲线与其极坐标方程

$$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\varphi},\quad (e>1), \tag{3}$$

它的一支由 ρ 取正值各点所组成，而另一支是由 ρ 取负值的各点所组成，下面我们来说明这个问题，

$\because\ e>1,-1\leqslant\cos\varphi\leqslant 1,$

$\therefore\ 1-e\cos\varphi \gtreqless 0,$

当 $1-e\cos\varphi=0$ 时，由(3)知对应的 ρ 值不存在，但因为这时有 $0<\cos\varphi=\frac{1}{e}<1$，所以 $\varphi=\pm\arccos\frac{1}{e}$，又因为 $e=\frac{c}{a}$，所以

$\cos\varphi=\frac{a}{c}$; 从而 $\mathrm{tg}\varphi=\pm\frac{b}{a}$，因此这时过极点与极轴交成角 $\arccos\frac{1}{e}$ 或 $-\arccos\frac{1}{e}$的两射线分别与双曲线的两条渐近线平行．两射线间的角 $2\arccos\frac{1}{e}$等于两渐近线的交角(图1-3)．

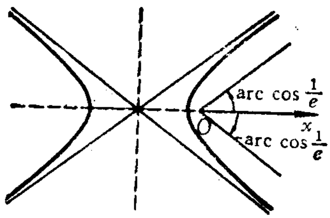


图 1-3

当 $1-e\cos\varphi<0$，即 $\cos\varphi>\frac{1}{e}$时，由(3)知 ρ 取负值，也就是当 $-\arccos\frac{1}{e}<\varphi<\arccos\frac{1}{e}$时，$\rho$取负值，这时的点为双曲线(3)左支上的点．

当 $1-e\cos\varphi>0$，即$\cos\varphi<\frac{1}{e}$时，由(3)知 ρ 取正值，也就是当 $\arccos\frac{1}{e}<\varphi\leqslant\pi$或$-\pi<\varphi<-\arccos\frac{1}{e}$时，$\rho$ 取正值，这时的点为双曲线(3)右支上的点．

在极坐标系下，平面上的点与其极坐标不是一一对应的，这就使得同一条曲线的极坐标方程有时可以有不同的表达形式，如方程

$$\rho=a \quad 与 \quad \rho=-a$$

表示同一个圆，而方程

$$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\varphi} \text{与} \quad \rho=-\frac{ep}{1+e\cos\varphi}$$

表示同一条圆锥曲线. 此外,根据方程来讨论曲线的性质时,也必须注意到这一点.

2) 极坐标系下曲线(图形)与其方程的两个基本问题

在极坐标系下,关于方程与曲线(图形)之间也存在着两个基本问题,这就是

① 由曲线求它的极坐标方程;

② 由极坐标方程画出它的图形.

这两问题的解决,其思想方法与直角坐标系下的情况是十分类似的. 因此在熟悉直角坐标系下的情况的基础上,再注意极坐标的特点,对于一些常见的问题,也就不难解决了. 教材中的例子已初步说明了这个问题. 但是我们必须指出,对于极坐标方程的讨论与画图,是一个比较复杂的问题,在本课程中只作初步的介绍. 有兴趣的读者,可去参考其他书籍. 下面对这两问题再作两点说明:

1° 对于一些曲线,它的直角坐标方程比较复杂,而极坐标方程却比较简单. 例如,教材§1.3 中的例 1、例 2 所指出的等速螺线(即阿基米德螺线)与帕斯卡蜗线,再如例 3 的心脏线,例 4 的三叶玫瑰线等都能说明这个问题,特别是那些绕定点转动或与定点有关的点的轨迹,用极坐标方程来表示往往比直角坐标方程要简单得多.

2° 在判别极坐标方程所表示的曲线的对称性(关于极轴、或极点,或过极点且垂直于极轴的直线对称)时,我们常以满足方程的动点的对称点的坐标代入方程来检验,如果它也满足方程,那么曲线具有对称性(对称于极轴,或极点,或过极点且垂直于极轴的直线). 由于在极坐标系下,我们知道,点的坐标不是唯一的,除极点外,同一点的坐标一般有两类表达形式,$(\rho,\varphi+2k\pi)$与$(-\rho,\varphi+(2k+1)\pi)$,因此在检验时必须考虑这两种情况,只要有一种

适合，曲线就具有对称性. 例如方程

$$\rho=a\cos 2\varphi,$$

当(ρ,φ)满足方程时，它关于极轴的对称点$(\rho,-\varphi)$[或$(\rho,-\varphi+2k\pi)$]也满足方程，所以曲线$\rho=a\cos\varphi$关于极轴对称. 再如方程

$$\rho=a\sin 2\varphi,$$

当(ρ,φ)满足方程，虽然$(\rho,-\varphi)$[或$(\rho,-\varphi+2k\pi)$]不满足方程，但(ρ,φ)关于极轴的对称点的坐标的另一表达式$(-\rho,\pi-\varphi)$[或$(-\rho,-\varphi+(2k+1)\pi$]却满足方程，所以$\rho=a\sin 2\varphi$关于极轴对称. 至于关于极点或过极点且垂直于极轴的直线对称的判别，也有类似的情况.

最后我们还要指出，曲线性质的研究，往往利用曲线的方程来进行的，但是某些曲线，它的直角坐标方程比较复杂而它的极坐标方程却比较简单，而另一些曲线恰巧相反，因此为了方便，我们应根据比较简单的方程来研究. 这样就有必要把两种坐标系下的曲线方程互换，而公式(1.3-12)或(1.3-13)就提供了方便.

公式(1.3-13)有时也写成

$$\begin{cases}\rho=\pm\sqrt{x^2+y^2},\\ \operatorname{tg}\varphi=\dfrac{y}{x},\end{cases}\tag{1.3-13'}$$

但它必须除去$x=0$的例外情形.

四、补充例题

例 1 已知三角形的顶点是$A(4,0)$，$B(7,4)$，$O(0,0)$，求角A的平分线的长度.

解 设AD是角A的平分线，交BO边于$D(x,y)$(图 1-4)，由三角形的平分线的性质知

$$\frac{|BD|}{|DO|}=\frac{|AB|}{|AO|},$$

而 $|AB|=\sqrt{(7-4)^2+4^2}=5,\quad |AO|=4,$

且D是BO的内分点，所以得

$$\frac{BD}{DO}=\frac{5}{4},$$

因此D的坐标为

$$x=\frac{7}{1+\frac{5}{4}}=\frac{28}{9},\qquad y=\frac{4}{1+\frac{5}{4}}=\frac{16}{9}.$$

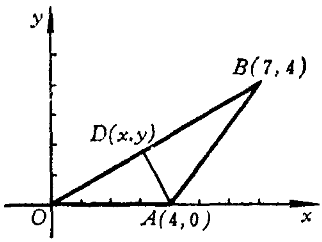


图 1-4

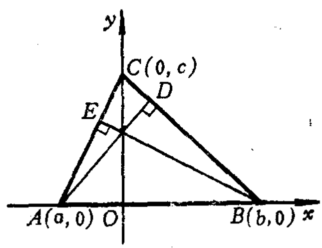


图 1-5

$$\therefore\quad |AD|=\sqrt{\left(\frac{28}{9}-4\right)^2+\left(\frac{16}{9}-0\right)^2}=\frac{8}{9}\sqrt{5}.$$

注 在解析几何中，可以利用初等几何的定理作为解题的依据，本例的解法利用了平面几何中关于三角形内角平分线的定理.

例 2 用解析法证明三角形的三条高共点.

证法一 设三角形ABC，取AB边所在直线作为x轴，AB边上的高线为y轴，建立直角坐标系(图 1-5).

设A,B,C三点坐标分别为$(a,0),(b,0),(0,c)$，于是三条高线的方程分别为