高等数学是非300例分析

计慕然　郑梅春
　　　　　　　　合编
徐　兵　王日爽

北京航空学院出版社

内 容 简 介

本书是为高等理工科院校学生加深理解高等数学基本概念和基本理论而编写的。全书分为两部分。第一部分以命题形式提出了300个是非问题，第二部分给出了参考解答。这些问题都是在学习中容易混淆或忽视的问题。本书是编者积多年教学经验之总结。本书可以引导学生勤于思考，学会提出问题，学会对已给命题是非做出正确判断，以及提高分析问题和解决问题的能力。

本书除供高等理工科院校学生作为学习参考资料外，还可以作电视大学、夜大学、函授大学及自学高等数学等读者的良师益友。也可以作为报考理工科硕士研究生复习高等数学时解疑的参考资料。

高等数学是非300例分析

許慕然　郑梅春
徐　兵　王日爽　合　编

责任编辑　郭维烈
北京航空学院出版社出版
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
北京航空学院印刷厂排版　新城印刷厂印装

*

787×1092　1/32　印张：$7^5/_8$　字数：165千字
1985年12月第一版　1985年12月第一次印刷
印数：1～35000册　统一书号：15432·004　定价：1.60元

前　言

基本概念、基本理论、基本方法构成高等数学（微积分）的“三基”。这些在高等数学学习中占有举足轻重的地位。对于基本概念、基本理论模糊的学生，很难想象他能够学好高等数学。所以对于一个初学高等数学的人来说，如何搞清楚基本概念、掌握基本定理，这是一个重要而又不易解决的问题。不难理解，初学者往往不善于提出问题，对于一些命题的是非更难以做出判断。因而传授知识、引导学生勤于思考，学会提出问题，学会对已有命题的是非做出正确判断。以及培养学生抽象能力、逻辑思维能力，从而达到学生分析问题、解决问题能力的提高。这无疑是高等数学教师的一个重要任务。

本书就是为高等理工科院校学生加深理解高等数学中的基本概念和基本理论而编写的。本书融汇了高等数学中各环节的内容，原则上不超出高等工科院校高等数学大纲，但略有展开。本书以命题形式提出问题，以期培养学生判断、分析能力，并为今后阅读和理解文献打下良好基础。

本书分两大部分。第一部分提出要判断的命题，第二部分给出问题的分析与参考解答。为了检查对所学内容掌握的程度，读者在阅读本书时最好先看第一部分，自已试先给出判断，然后再对照第二部分，以检查自已所下的结论是否正确。我们希望读者在思考问题的过程中，注意几何直观与物理意义；学会从具体到抽象，从抽象到具体的联想；分析从

正命题到反命题，从反命题到正命题的关系；掌握从特殊到一般，从一般到特殊的规律；区别单元到多元，从多元到单元的异同。从而总结出一套学习方法，以求基本概念清晰、基本理论透彻，打下坚实的数学基础。

本书提出的命题都是有针对性的。其中大多数是在教学过程中常遇到的，而且是学生容易混淆或忽视的问题。有些是学生经常向教师咨询的问题，也有些是初学者在计算过程中易犯的概念性错误。我们积多年教学之经验汇编成册，以期对读者有所裨益。

本书除可供高等理工科院校学生作为学习参考资料外，还可以作为电视大学、夜大学、函授大学及自学高等数学等读者的课外良师益友，也可以作为报考理工科硕士研究生复习高等数学中自检答疑的参考资料。

限于我们的水平，难免有不当之处，恳請读者批评指正。

编　者　一九八五年五月

于北京航空学院

目　录

前　言

第一部分　是非题

第二部分　参考解答

第一部分　是非题

试判断下列命题或运算是否正确：

一、单元函数

1. $y=c$是函数。

2. $y=2lgx$ 与 $y=lgx^2$ 是同一个函数。

3. 给定点列(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，…，(x_n, y_n)，必有函数 $y=f(x)$，使 $y_1=f(x_1)$，$y_2=f(x_2)$，…，$y_n=f(x_n)$。

4. 若 $f(x)=\frac{1}{x}$，则 $f(f(x))=x$。

5. 若 $f(x)$ 在任一有限区间上皆为有界函数，则 $f(x)$在整个数轴上必为有界函数。

6. $f(n)=\sin n$(n 为自然数) 是以 2π 为周期的周期函数。

7. 设$f(x)$ 为定义在 $[-a,a]$ 上的任意函数，则 $f(x)+f(-x)$ 必为偶函数。

8. 若$f(x)$与$g(x)$皆为奇（偶）函数，则 $f(x)+g(x)$仍为奇（偶）函数。

9. 若 $y=f(x)$ 为偶函数，$x=\varphi(t)$ 为奇函数，则 $y=f(\varphi(t))$ 必为偶函数。

10. 两个单调增加函数之和仍为单调增加函数。

11. 两个单调增加（减少）函数之积必为单调增加（减

少）函数。

12. 设$y=f(x)$为单调增加函数，则其反函数$x=\varphi(y)$亦必为单调增加函数。

13. 设$x=f(t)$在$[a, b]$上单调增加，$y=F(x)$在$[f(a), f(b)]$上单调增加，则$y=F(f(t))$在$[a, b]$上亦必为单调增加。

14. 设$f(x)$在其定义区间内每一点都有确定的值，则函数$f(x)$在任一点的充分小的邻域内必有界。

15. 任何周期函数必有最小周期。

16. $y=x^2$ $(-1<x<2)$是偶函数。

17. 由任意的$y=f(u)$及$u=g(x)$必定可以复合成y为x的函数。

18. 任何函数$y=f(x)$皆有反函数。

19. 分段函数都不是初等函数。

20. $1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$是$x$的函数。

21. 任何函数$f(x)$都有零点。

22. 由$F(x,y)=0$必能确定出y为x的函数。

23. $$y=sgnx=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$ 是x的函数。

二、单元函数的极限

24. 若n越大时，u_n-A越小，则数列$\{u_n\}$必以A为极限。

25. 若n越大时，$|u_n-A|$越小，则数列$\{u_n\}$必以

A为极限。

26. 若n越大时，$|u_n-A|$越接近于零，则数列$\{u_n\}$必以A为极限。

27. 若对任意给定的$\varepsilon>0$，存在自然数N，当$n>N$时，总有无穷多个u_n满足$|u_n-A|<\varepsilon$，则数列$\{u_n\}$必以A为极限。

28. 若对任意给定的$\varepsilon>0$，数列$\{u_n\}$中仅有有限多项不满足$|u_n-A|<\varepsilon$，则数列$\{u_n\}$必以A为极限。

29. 在数列$\{u_n\}$中任意去掉有限多项，所得新数列$\{v_n\}$必与原数列$\{u_n\}$同敛散。

30. 在数列$\{u_n\}$中任意去掉无穷多项，所得新数列$\{v_n\}$必与原数列$\{u_n\}$同敛散。

31. 对数列$\{u_n\}$，必有

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}u_{n+p} \qquad (p\text{为正整数})。$$

32. 有界数列必定收敛。

33. 无界数列必定发散。

34. 发散数列必定无界。

35. 单调数列必有极限。

36. 若单调数列的某一子数列收敛于A，则该数列必收敛于A。

37. 若数列$\{u_n\}$收敛于A，则其任意子数列$\{u_{n_k}\}$必收敛于A。

38. 若从某数列中可选出一个子数列不收敛，则该数列必不收敛。

39. 从有界数列$\{u_n\}$中，总可以选出一个收敛的子数列$\{u_{n_k}\}$。

40. 从无界数列$\{u_n\}$中，总可以选出一个发散于无穷大的子数列$\{u_{n_k}\}$。

41. 一个函数有上界，则必有最小的上界。

42. 若$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在，则$f(x)$必为有界函数。

43. 若数列$\{u_n\}$收敛，则其极限必唯一。

44. 若$f(x)>0$，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则必有$A>0$。

45. 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且$A>0$，则在$x_0$的某邻域内，恒有$f(x)>0$。

46. 在变化过程中，某量的绝对值越变越小，则此量必为无穷小。

47. 在变化过程中，某量变得很小很小，则此量必为无穷小。

48. 在变化过程中，某量变得比任何正数都小，则此量必为无穷小。

49. 若对任意给定$\varepsilon>0$，总存在无穷多个x_n，使得$|x_n|<\varepsilon$，则数列$\{x_n\}$必为无穷小。

50. 若对任意给定$\varepsilon>0$，总存在自然数N，当$n>N$时，恒有$x_n<\varepsilon$，则数列$\{x_n\}$必为无穷小。

51. 无穷小是一个非常非常小的数。

52. 0是无穷小。

53. $\dfrac{1}{x}$是无穷小。

54. 无限多个无穷小之和仍为无穷小。

55. 无穷多个无穷小之积仍为无穷小。

56. 两个非无穷小之积必定不是无穷小。

57. 两个非无穷小之和必定不是无穷小。

58. 无穷大是一个非常非常大的数。

59. 无界变量必为无穷大。

60. 有限个无穷大之和仍为无穷大。

61. 在某个过程中，若 $f(x)$有极限，$g(x)$无极限，则 $f(x)+g(x)$必无极限。

62. 在某个过程中，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都无极限，则 $f(x)+g(x)$必无极限。

63. 在某个过程中，若 $f(x)$ 有极限，$g(x)$ 无极限，则 $f(x)\cdot g(x)$ 必无极限。

64. 在某个过程中，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都无极限，则 $f(x)\cdot g(x)$ 必无极限。

65. 任意两个无穷小总可以比较其阶的高低。

66. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|A|$。

67. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|A|$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$。

68. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$，则对任意函数 $f(x)$必有

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}f(y_n)。$$

69. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n\cdot v_n)=0$，则必有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 或者 $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$。

70. 运算

$$\lim_{x\to1}\frac{x}{1-x}=\frac{\lim\limits_{x\to1}x}{\lim\limits_{x\to1}(1-x)}=\frac{1}{0}=\infty$$

是否正确？

71. 运算

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}=0$$

是否正确？

72. 运算

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}+\cdots$$

$$\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+n}=0+0+0+\cdots+0=0$$

是否正确？

73. 当 $x\to 0$ 时，$tgx\sim x$，$\sin x\sim x$，运算

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0$$

是否正确？

74. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则对任意的 $x_n\to x_0$，必有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$。

75. 若对任意的 $x_n\to x_0$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$，则必有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$。

76. 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 必存在。

77. 设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=A$。

78. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，且$a_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$，则有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1 a_2\cdots a_n}=A。$$

79. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}=A$，$\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1}=A$，则$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$。

80. 若 $x_1=\sqrt{2}$，$x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$，$n=2,3,\cdots$，则由

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\sqrt{2+\lim x_{n-1}}=\sqrt{2+\lim\limits_{n\to\infty} x_n}$ 可解出$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=2$。

问运算过程是否正确?

81. 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to A}\varphi(x)=B$，则必有

$\lim\limits_{x\to a}\varphi(f(x))=B$。

82. 若 $f(x)>\varphi(x)$，且 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$（或$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$），$\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=B$（或$\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=B$），则有 $A>B$。

三、单元函数的连续性

83. 若$f(x)$在 x_0 连续，则必有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(\lim_{x\to x_0} x)\ 。$$

84. 若$f(x)$在 x_0 有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 x_0 必连续。

85. 设 $f(x)=\begin{cases} 1\ , & x\text{为有理数；}\\ 0\ , & x\text{为无理数。}\end{cases}$

则 $f(x)$在实数轴上处处不连续。

86. 若$f(x)$在 x_0 连续，则 $|f(x)|$ 在 x_0 必连续。

87. 若 $|f(x)|$ 在 x_0 连续，则 $f(x)$ 在 x_0 必连续。

88. 分段函数必存在间断点。

89. 若 $f(x)$在x_0连续，$g(x)$在x_0不连续，则 $f(x)\cdot g(x)$ 在 x_0 必不连续。

90. 若 $f(x)$、$g(x)$ 在 x_0 都不连续，则 $f(x)\cdot g(x)$ 在 x_0 必不连续。

91. 若 $f(x)$ 在 x_0 连续，$g(x)$ 在 x_0 不连续，则 $f(x)+g(x)$在 x_0 必不连续。

92. 若 $f(x)$、$g(x)$ 在 x_0 都不连续，则$f(x)+g(x)$ 在 x_0 必不连续。

93. 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续，则 $f(x)$ 在 (a, b) 内必有界。

94. 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内一致连续，则 $f(x)$ 在(a, b) 内必有界。

95. 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续，则 $f(x)$ 在 (a, b) 内必能取得最大值与最小值。

96. 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续，则 $f(x)$ 在 (a, b) 内必定一致连续。

97. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义，在 (a, b) 内连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则 $f(x)$ 在 (a, b) 内必有零点。

98. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义，在 (a, b) 内连续，且$f(a)<f(b)$，任给 c 使$f(a)\leqslant c\leqslant f(b)$，则在$(a, b)$内必至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=c$。

99. 初等函数在其定义域内必连续。

100. 若 $f(x)$ 在任何有限区间内连续，则 $f(x)$ 必在无限区间 $(-\infty, +\infty)$ 内连续。

101. 若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，则在任何一个有限闭区间 $[a, b]$ 内必一致连续。

102. 单调有界函数没有第二类间断点。

103. 设$f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的单调有界函数，且 $f(x)$ 能取到 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的一切值，则 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的连续函数。

104. 设对每一个充分小的 $\delta>0$，都存在$\varepsilon>0$，使得：当 $|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，则 $f(x)$ 在 x_0 必连续。

105. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义，且在 (a, b) 内一致连续，又设$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=B$，则$f(x)$ 在$[a, b]$ 上必一致连续。

106. 若 $f(x)$ 及 $g(x)$ 都是连续函数，则

$$\varphi(x)=min\{f(x), g(x)\}$$

也是连续函数。

107. 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 内连续，且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 内有界。

108. 若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续且有界，则$f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内必一致连续。

109. 若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界，则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内必不一致连续。

110. 若 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 (a, b) 内均一致连续，则 $f(x)+g(x)$ 在 (a, b) 内一致连续。

111. 若 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 (a, b) 内均一致连续，则 $f(x)\cdot g(x)$ 在 (a, b) 内一致连续。

112. 若 $f(x)$ 为 (a, b) 内的单调有界且连续的函数，则 $f(x)$ 在 (a, b) 内必一致连续。

四、单元函数的导数与微分

113. 初等函数在其定义域内必可导。

114. 若$f(x)$ 在 x_0 可导，则 $f(x)$ 在 x_0 必连续。

115. 若 $f(x)$ 在 x_0 连续，则 $f(x)$ 在 x_0 必可导。

116. 连续函数 $f(x)$ 除去可能有几个特别点之外，处处有导数。

117. 若 $f(x)$ 在 x_0 不连续，则 $f(x)$ 在 x_0 必不可导。

118. 若 $f(x)$ 在 x_0 不可导，则 $f(x)$ 在x_0必不连续。

119. 若$f(x)$在x_0不可导，则曲线$f(x)$在$(x_0, f(x_0))$点处必无切线。

120. 若曲线 $y=f(x)$ 处处有切线，则函数 $y=f(x)$ 必处处可导。

121. 若 $f(x)$ 在 x_0 可导，则 $|f(x)|$ 在 x_0 必可导。

122. 若 $|f(x)|$ 在 x_0 可导，则 $f(x)$ 在 x_0 必可导。

123. 若 $f(x)+g(x)$ 在 x_0 可导，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 x_0 必皆可导。

124. 若 $f(x)\cdot g(x)$ 在 x_0 可导，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 x_0 必皆可导。

125. 若$f(x)$ 与 $g(x)$ 在 x_0都不可导，则$f(x)+g(x)$ 在 x_0 必不可导。

126. 若$f(x)$ 在 x_0可导，$g(x)$ 在 x_0不可导，则$f(x)+g(x)$ 在 x_0 必不可导。

127. 若 $f(x)$ 在 x_0 可导，$g(x)$ 在 x_0 不可导，则 $f(x)\cdot g(x)$ 在 x_0 必不可导。

128. 若 $f(x)$ 为周期可导函数，则其导数 $f'(x)$ 必为周期函数。

129. 若函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内处处可微，则其导函数必处处连续。

130. 若 $f(x)$ 为 $(-l, l)$ 内的可导的偶（奇）函数，则导数 $f'(x)$ 必为 $(-l, l)$ 内的奇（偶）函数。

131. 若 $y=f(x)$ 在 (a, b) 内可导，则其反函数在相应点必定可导。

132. 若 $y=f(x)$ 在 x_0 可导，则其在 x_0 必可微。

133. 若 $f(u)$ 在 u_0 不可导，$u=g(x)$ 在 x_0 可导，且 $u_0=g(x_0)$，则 $f[g(x)]$ 在 x_0 必不可导。

134. 若 $f(u)$ 在 u_0 不可导，$u=g(x)$ 在 x_0 不可导，且 $u_0=g(x_0)$，则 $f[g(x)]$ 在 x_0 必不可导。

135. 若 $f(u)$ 在 u_0 可导，$u=g(x)$ 在 x_0 不可导，且 $u_0=g(x_0)$，则 $f[g(x)]$ 在 x_0 必不可导。

136. 若 $f'(x_0)$ 存在，则在 x_0 的某邻域内必存在 $x\neq x_0$，使 $f(x)$ 仍可导。

五、单元函数的微分中值定理及导数的应用

137. 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$，则必存在 $\xi\in(a, b)$，使 $f'(\xi)=0$。

138. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)=f(b)$，则必存在 $\xi\in(a, b)$，使 $f'(\xi)=0$。

139. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，