

信 息 系 统 工 程 基 础

美国密歇根大学短期集训课程

杨 朝 津 译

"Foundations of Information Systems Engineering"
an Intensive Short Course
The University of Michigan Engineering Summer Conferences, 1971
Professor H.L.Garner, Chairman

内 容 提 要

本书是由美国密歇根大学举办的一次信息系统工程基础的暑期集训班的讲稿汇编而成。系统工程是一门能为多种学科所用,能揭示多种学科之间的某种共同规律的横跨学科。但本书的取材是针对信息工程学的。通信、广播电视、计算机、雷达、遥感遥测等都属于信息系统。因此,本书是这些方面的工程技术人员学习系统工程的一本入门书。全书共11章,所讲的数学、最优化理论、网路理论、数学规划、决策论、排队论、信息论等,都是为了学习信息系统工程这门学科所必须掌握的基本知识。

信 息 系 统 工 程 基 础

美国密歇根大学短期集训课程

杨 朝 津 译

人民邮电出版社出版

北京东长安街27号

河北省邮电印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

开本: 850×1168 1/32

1982年7月 第 一 版

印张: 13 12/32页数: 214

1982年7月河北第一次印刷

字数: 355 千字

印数 1—8,300 册

统一书号, 15045·总2594—无6186

定价: 1.70 元

目 录

I	译者序	(1)
II	集合、关系和代数系	(7)
III	概率论及应用中的课题	(81)
IV	图论中的一些课题	(132)
V	通信网和流网	(155)
附录	最短路径计算	(186)
VI	数学规划初步	(209)
VII	不肯定性下的决策制定	(252)
VIII	排队论入门	(302)
IX	自动机理论	(320)
X	语言由文法和自动机的表征	(348)
XI	信息论和码	(378)

I 译 者 序

本书是美国密歇根大学1970年6月举办的一次关于信息系统工程基础的暑期讲座的讲稿,由8名教授和1名博士讲授。在讲座开始的第一天,主持人H.L.加纳教授曾进行过一小时的课程介绍,但这一发言在原书中没有印出来。为了弥补这一缺欠,译者认为有必要在这里对系统工程的形成和发展概况先作简短叙述,然后扼要介绍本书各章的内容。

1. 系统工程的形成

现代科学技术与过去不同的一个主要特点是科学技术领域的相互促进和相互渗透。这不仅导致学科不断分化,同时也促使学科不断综合。除了出现为数众多的边缘学科之外,还出现了不少揭示多种学科之间某种共同规律的横跨学科,如信息论、控制论、系统论等等;而且数学日益广泛地应用于各种学科。特别是电子计算机的出现,更大大地加快了这种进程。数学与其它学科的交叉结合目前不仅限于自然科学和工业技术领域,而且延伸到了军事行动、运用管理和社会科学方面,例如运筹学、经营科学等等。以上趋势在现代技术方面的具体表现是:

第一,现代的研制项目,无论是组成分部的数量和种类,还是分部之间关系的复杂性,都在与日俱增,因而规模和难度愈来愈大,必须投入大量的人力、物力,建立庞大的试验基地,搞大协作,群策群力才能解决。

第二,新技术、新产品的有用寿命愈来愈短,特别是在电子技术领域中,最近十多年来发展起来的新成果已有百分之五十过时。

因此开展一个现代的研制项目，成本愈来愈高，风险愈来愈大，愈来愈需要有一套制订有效计划、执行周密设计和建立完善管理所应遵循的一套原理和方法。这就促使人们去运用已经兴起的运筹学、信息论、控制论和计算机技术，逐渐形成了一种新兴的技术——系统工程。

2. 系统工程的概况

当前大多数学者都认为系统工程是最近三十年左右才开创的一门学科。所谓系统，简单地说就是由相互依存、相互制约的多个分部组成，并具有特定功能的一个有机整体。系统的组成关系称为结构 (*structure*)。系统的变动方式称为行为 (*behaviour*，也可译为“动式”或“动度”)。结构和行为二者形成系统的功能。所谓系统工程，简单地说，就是：以复杂的系统为对象，在统筹兼顾、全面规划的原则下，使用科学的理论和方法进行求好择优的一门技术。

系统工程没有局限的专业领域，它从许多专业中抽象提炼出来，又为各个专业所应用。系统工程大体可分为七个逻辑步骤：问题确定、价值系统设计、综合、分析、最优化、决策和实施。现对这些步骤逐一简单解释如下：问题确定是对需求和环境进行调研，收集和分析所要的数据，然后明确要解决什么问题。价值系统设计是规定满足各种要求的指标和评比各种方案的准则。综合是针对要解决的问题拟定多个满足要求的方案以供选择。分析是对各个备选方案进行分析推演，看它是否符合指标要求。最优化则需要前四个步骤的多次反复，使每个方案在各相应条件下达到理想的目标，这项工作往往要塑造模型来进行。决策是按价值系统设计规定的准则，对多个备选方案进行评价权衡，最后从中择取一个（或几个）方案。实施则是根据最后选定的方案制定行动计划，具体付诸实现。以上的逻辑步骤没有严格的时间顺序，它的实质是用模型来描述系统，然后在步骤的循环往复中进行求好择优。数学模型是人们

熟知的一类模型。由于人类对客观世界的认识有一个由浅入深、由粗到精的过程，因此不仅要获得反映定量关系的数学模型，也有必要采用反映定性关系的粗略模型。

在系统以时间划分的任何一个阶段中，例如长远规划、近期计划、研究、试制、生产、使用、更新，都需要上述七个步骤的反复。这样才能分阶段、分步骤、通过信息反馈不断发现错误，不断修正错误，有条不紊地进行下去。国外有人把系统工程比作希腊仙女阿尔玛塞娅(*Almathea*)的法宝“羊角”这个羊角能变出它主人所愿望的任何东西。羊角的螺旋状外形恰好描绘了系统工程刚才所说的循环往复、逐渐收敛的过程。这里，愿望就是需要解决的问题，系统工程师把能量、信息和材料放入羊角粗的一端，经过螺旋的循环收敛过程可从细的一端得到所要的结果。

系统工程应用于通信问题显然与应用于医学或其它问题时不同。纵使一个人精通系统工程的所有观点、理论和工具，也不足以产生真正现实有用的东西，因此还需要具备专业方面的知识。如果按可量化程度的递降顺序把一些专业进行排列的话，或许是工程、医学、建筑、经营、管理和社会科学。善于结合具体情况来灵活运用系统工程的理论和方法是十分关键的。

目前系统工程还处在发展阶段，它所研究问题的范围和规模正在日趋扩大，已由技术性较强的通信、交通、运输、国防等各种工程，逐步扩大到经营、管理、经济、社会等领域。许多国家都十分重视系统工程的研究工作，1972年还成立了国际应用系统分析研究所，先后有十七个国家参加，他们研究的课题有能源、环境保护、生态、医疗以及城市规划等许多国家所共同面临的问题。系统工程的今后发展很可能为当前正在酝酿的科学技术上的重大突破开辟道路。

3. 本书各章的简介

本书是针对信息系统的。通信系统、广播电视系统、计算机系统、雷达系统、遥感系统、遥测系统等等都是信息系统。

本书的第一章是系统工程简介，第二、三、四章是基础数学。数学是一门富有概括性的学问，抽象是它的特色。一切科学的抽象都更深刻、更正确、更完全地反映着客观世界。第Ⅱ章集合、关系和代数系是近世抽象代数的主要内容，它由于高度的概括性已成为数学许多部门的基础，也是一般系统论的得力工具。第Ⅲ章概率论是研究大数现象的工具，通过它可以看出大势所趋，各种情况偶然出现的规律。第Ⅳ章图论是拓扑学的分支，研究一组顶点（代表事物）和边（代表不同事物之间特定的相互关系）所组成的抽象形式的图形，从中找出某种一般规律。

接下来的四章是系统工程中各种数学模型的最优化理论。这些属于运筹学的范畴。数学模型大体分为两类：一类为肯定型，一类为不肯定型。第Ⅴ章网路理论和第Ⅵ章数学规划属于肯定型模型的最优化。第Ⅶ章决策论和第Ⅷ章排队论则属于不肯定型模型的最优化。运筹学所讨论的数学模型还不止这些，这里仅举出了一些最富代表性的。它们都是一般化的理论，应用范围在各章中都大略提到。现在简单地提一下它们可在通信领域内的一些应用。例如第Ⅴ章可用于通信网最大流量、最少费用、最高可靠性、最短迟延等问题的分析和综合以及各种计划的日程、人力、物力的安排调度等。第Ⅵ章可用于各种资源（包括频率、电路、资金等）和性能指标的合理分配。第Ⅶ章可用于预测、投资、质量控制等各种决策的选择思考。第Ⅷ章可用于各种通信业务量的需求以及设备维修的组织等方面的研究。

后三章是信息领域内的专门理论。第Ⅸ章自动机理论、第Ⅹ章语言的表征讨论的都是信息处理方面的理论。所谓自动机就是模

拟人的思维的机器，属于控制论的范畴。目前自动机有三类，即组合机（逻辑电路）、序贯机（序贯电路）和图灵机（数字计算机模型），一类的比前一类更高级。第Ⅷ章主要讲给出“算法”、“可计算函数”精确定义的一些有限状态自动机理论。第Ⅸ章主要讲各种修正型图灵机与形式语言的关系。第Ⅹ章信息论和码所讨论的则是信息传输方面的理论，着重讲保证信息通过信道进行有效或可靠传输的一些编、解码方案。

一个现代通信网相当于一个人的神经系统。一个四通八达、综合运用、平战结合的现代化全国通信网不仅规模庞大、结构复杂、关系众多，仅从现代科学技术的角度来看，它就与1978年全国科学大会上提出的八大科学技术（农业、能源、材料、电子计算机、激光、空间、高能物理、遗传工程）中的半数直接有关，这样一个大系统乃至它的各级分系统如果不从研究、试制、生产、基建、使用各个阶段采用系统工程的一套技术，要想多快好省地建成这个通信网是不可能的。

系统工程在我国已开始受到不少部门的重视。通信部门在世界范围来说是系统工程的发源地之一。我国也早在1960年山东省济南市邮电局得到山东师范学院帮助，在报刊邮件投递方面推广使用运筹学线性规划，合理调整投递班次和投递段道，不仅加快了投递速度，而且还缩短了投递人员的工时；上海市市内电话局取得华东师大的协助，把线性规划应用到市话维修路由选择方面，并把排队论应用到机群话务平衡方面，大大提高了设备利用率和劳动生产率，还节约了原材料。以上只不过是应用运筹学在通信某些局部所取得的成效，今后在通信各个领域应用系统工程将无疑是大有作为的。

系统工程涉及的学科甚多，除了上面提到的之外，还有哲学、经济学、心理学等等，可以说还没有一本书能包罗它的所有方面。本书由于授课时间的限制，仅仅讨论了最起码的一些基础问题，但它的内容有启发性，并指出了进一步攻读的许多参考文献，可供其

有大学毕业水平、从事这方面工作的人员参阅。

译者对原书的打字错误进行的一些更正，并增添了必要的译者注。限于水平，在译文中定有不少缺点和错误，请读者不吝指正。译稿经长沙国防科技大学柳克俊教授全面认真校阅、审定，谨在此表示谢忱。

II 集合、关系和代数系

J.F. 梅耶

- | | |
|---------------------|--------------------|
| 1. 集合.....(7) | 8. 代数系和二元运算...(40) |
| 2. 幂集和笛卡儿积.....(13) | 9. 半群.....(44) |
| 3. 关系.....(16) | 10. 关于半群的同余关系(49) |
| 4. 函数.....(20) | 11. 群.....(54) |
| 5. 关于一个集合的关系...(24) | 12. 环和域.....(66) |
| 6. 等价关系.....(28) | 英汉专用名词对照...(76) |
| 7. 次序关系和格.....(35) | |

这里所介绍的数学概念对研究系统工程中的多种问题来说都是基本的。假设读者以往曾经接触过这些概念,但不一定对它们“工作熟悉”。因此,本章打算对某些正被广泛应用于研究系统结构和行为的数学概念作一介绍或复习。

1. 集 合

我们首先复习集合论的一些基本概念和记号。一个主要的、且对主题作任何公理论述时未下定义的(原始的)概念,就是一个对象“属于”一批对象的概念。我们称对象为**元素**,一批对象为一个**集合**。当元素 x 属于集合 A ,或者,换句话说, x 是 A 的一个元素时,写成

$$x \in A$$

相反的情况,也就是当 x 不是 A 的一个元素时,则写成 $x \notin A$ 。集合相等的基本观念是用“属于”来定义的。

定义1.1

当 A 的每个元素是 B 的一个元素,且 B 的每个元素是 A 的一个

元素时，那么集合 A 和 B 相等（用 $A=B$ 来表示）。

为了指出两个集合不相等，我们写 $A \neq B$ 。集合之间的另一基本关系如下。

定义1.2

如果 A 和 B 是集合，当 A 的每个元素是 B 的一个元素，则 A 是 B 的一个子集。

如果 A 是 B 的一个子集，我们写

$$A \subseteq B$$

有时说： A 包含于 B 内或者 B 包含 A 。在 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$ 的情况，我们说 A 是 B 的一个真子集。根据定义，我们有如下直接的但十分有用的结果：

$$\text{当且仅当 } A \subseteq B \text{ 和 } B \subseteq A \text{ 时, } A = B \quad (1.1)$$

这样我们就重新以公式列出了集合相等的观念。集合相等的大多数证明，的确有两部分，一部分证明 $A \subseteq B$ 而另一部分则证明 $B \subseteq A$ 。我们在这里还要指出：属于（ $\in$ ）和包含（ $\subseteq$ ）是十分不同的观念。关于这一点，在区分属于 A 的一个元素 α （ $\alpha \in A$ ）和仅有一个元素 α 是 A 的一个子集时，必须特别谨慎。在后一情况，我们写成 $\{\alpha\}$ 以表明它是一个子集的地位，也就是 $\{\alpha\} \subseteq A$ 。

集合时常是以对集合中某些且仅仅是那些元素来说可以成立的一句断语来规定的。我们不打算精确给出这里所说的断语的定义，而令 $S(x)$ 表示包含变量 x （ x 遍布在某个以前规定的集合 U 内）的一个断语，并写

$$A = \{x \mid S(x)\}$$

来表示断语对它们成立的所有元素 x 的集合。例如，集合

$$A = \{x \mid x \text{ 是一个整数且可被 } 2 \text{ 整除}\}$$

就是偶整数的集合。另一个例子就是它的元素也是集合的一个集合。因为如果 B 是一个集合，则

$$A = \{X \mid X \subseteq B\}$$

恰好是 B 的所有子集的集合。

在以这种方式来规定集合时，可能使用对任何元素都不成立的断语，结果是没有一个元素属于所规定的集合。例如，设 B 是一个集合，并写出集合

$$A = \{x \mid x \in B \text{ 和 } x \neq x\}$$

显然，集合 A 没有元素。根据集合相等的定义，任何两个具有这种性质的集合必定是同一集合。该集合称为**空集**（**零集**、**虚集**），并通用符号 ϕ 来表示。

注意根据子集的定义，如果 A 是任一集合，则空集的每一元素（因为它没有元素）都是 A 的一个元素，因此

$$\phi \subseteq A$$

这样空集是任一集合的一个子集（如果上述推理显得难懂，可假设 ϕ 不是 A 的一个子集，而试行找出一个不属于 A 的 ϕ 的元素）。

最后，为了描述一个集合，有时可简便地列出它的元素。例如，集合

$$A = \{x \mid x \text{ 是一个整数，且 } 0 \leq x \leq 3\}$$

也可把它写成

$$A = \{0, 1, 2, 3\}$$

甚至当集合是无限时，我们有时也可用标准记号来列出元素。例如，集合

$$A = \{x \mid x \text{ 是一个非负的整数}\}$$

可写成

$$A = \{0, 1, 2, \dots\}$$

下面讨论某些可从已有的集合构成新的集合的运算。给定两个集合 A 和 B 。很自然地，我们或许会想到要把属于 A 或 B 的全部元素看作属于单一集合的元素。我们把这一组合过程以如下形式来列出。如果 A 和 B 都是集合，则

定义1.3

A 和 B 的**并**（用 $A \cup B$ 来表示）是所有或者属于 A 或者属于 B 的元素的集合。更形式化地来表达这一定义，我们有

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

注意这里的“或”字是指“包括在内”，也就是可能 $A \cup B$ 的一个元素既属于 A 又属于 B 。

在另一种情况，还是给定了 A 和 B ，我们或许想要构成仅包括 A 和 B 所共有的那些元素的一个集合。这时我们得到

定义1.4

A 和 B 的交（用 $A \cap B$ 来表示）是所有既属于 A 又属于 B 的元素的集合。

同样，我们可重述定义如下

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 和 } x \in B\}$$

在 A 和 B 没有共同元素的情况，也就是 $A \cap B = \phi$ ，我们说 A 和 B 不相交。举下面的例子来说明这些运算。

例1.1

$$A = \{a, b, c, 1, 2\}$$

$$B = \{c, d, 1, 2, 3\}$$

则

$$A \cup B = \{a, b, c, d, 1, 2, 3\}$$

和

$$A \cap B = \{c, 1, 2\}$$

并和交可自然地推广到一批两个以上的集合。如果 $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ 是有限的一批集合 A_i ，则可定义这批集合的并和交如下

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ 对于某些 } i, 1 \leq i \leq n\}$$

和

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ 对于所有的 } i, 1 \leq i \leq n\}$$

更一般地说，如果 Ω 是这批的一个指标集，我们写成

$$\bigcup_{\alpha \in \Omega} A_\alpha = \{x \mid x \in A_\alpha \text{ 对于 } \Omega \text{ 中某些 } \alpha\}$$

和

$$\bigcap_{\alpha \in \Omega} A_{\alpha} = \{x \mid x \in A_{\alpha} \text{ 对于 } \Omega \text{ 中所有的 } \alpha\}$$

当一批中相异的集合两两不相交时，这批集合**不相交**。

下列关于成对集合并的结果，可直接由定义得到证实。如果 A , B 和 C 是集合，则

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (1.2)$$

$$A \cup B = B \cup A \quad (1.3)$$

$$A \cup A = A \quad (1.4)$$

$$A \cup \phi = A \quad (1.5)$$

$$\text{当且仅当 } A \cup B = B \text{ 时, } A \subseteq B \quad (1.6)$$

类似地，对于成对集合交的结果，

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad (1.7)$$

$$A \cap B = B \cap A \quad (1.8)$$

$$A \cap A = A \quad (1.9)$$

$$A \cap \phi = \phi \quad (1.10)$$

$$\text{当且仅当 } A \cap B = A \text{ 时, } A \subseteq B \quad (1.11)$$

有关 $\cup$ 和 $\cap$ 的两个重要恒等式是：

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (1.12)$$

和

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (1.13)$$

这两个恒等式称为分配律，同样可由相等、并和交的定义来加以证实。

另有一个有用的观念就是两个集合之间的差。直观地说， A 和 B 之间的差就是从 A 去掉也属于 B 的那些元素的结果。更精确地说：

定义1.5

A 和 B 之间的**差**（用 $A - B$ 来表示）是所有属于 A 但不属于 B 的元素的集合。即

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 和 } x \notin B\}$$

对于例1.1的集合,

$$A - B = \{a, b\}$$

和

$$B - A = \{d, 3\}$$

在构成差时要注意次序。有时把差 $A - B$ 称为 **B在A中的对补**。如果我们假设所有讨论中的集合都是某集合 U 的子集, 且所有对补都在 U 内, 则我们可以简化记号而写成

$$\overline{A}$$

以表示差 $U - A$ 。因为知道所有的对补都在 U 内, 我们时常把 $\overline{A}$ 简称 **A的补**。对于每一集合 $A \subseteq U$, 我们都附有一个唯一的集合 $\overline{A}$, 因此可把构成补的过程看作一个运算。看作运算以后, 通常就把它称为**求补**, 它与并和交以下列恒等式相联系。

$$A \cup \overline{A} = U \quad (1.14)$$

$$A \cap \overline{A} = \phi \quad (1.15)$$

$$\text{当且仅当 } \overline{B} \subseteq \overline{A} \text{ 时, } A \subseteq B \quad (1.16)$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad (1.17)$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad (1.18)$$

我们把最后两个恒等式称为德·摩根(*De Morgan*)定律, 并容易把它推广到两个以上成批的集合。我们还应看到

$$(\overline{\overline{A}}) = A \quad (1.19)$$

以及 ϕ 和 U 有补的关系, 也就是

$$\overline{\phi} = U \quad (1.20)$$

$$\overline{U} = \phi \quad (1.21)$$

我们在这里顺便提出几句插话, 在这个时候似乎是恰当。我们引入并、交、差和补等观念的动机, 主要在于能从现有的集合构成新的集合。虽然这些观念的引入是各个独立的, 但从(1.12)~(1.21)所示的性质, 这些运算显然在相当程度上是互相关联的。的确, 某一集合 U 的所有子集的集合, 和 U 内的并、交、求补等运算, 一起构成一个称为布尔代数的十分著名的代数结构。这种代数系可作为

公理来定义并具有不同于集合解释的一些含意深远的解释。虽然讨论布尔代数或许有助于把我们对并、交、和补所讲的各种事例有系统地联系起来，但不先建立某些更为基本的概念而去进行这样的讨论是困难的。由于这个理由，我们至少在目前对这些概念选择不太有系统的（但望不是更难理解的）陈述，也就满意了。

2. 幂集和笛卡儿积

第一节中所讨论的并、交和差的运算具有一个共同的性质，即结果集合的每一元素至少属于一个施加运算的集合。本节中我们还将讨论集合的构造，但这次新集合的元素在性质上与原来的不同。

我们已有机会提到过一个集合 A 的所有子集的集合。因为这一观念十分经常地出现，我们应对它特别注意。如果 A 是任一集合，则

定义2.1

A 的**幂集**（用 $\mathscr{P}(A)$ 来表示）是 A 的所有子集的集合。
换句话说，

$$\mathscr{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

例2.1

令 $A = \{a, b, c\}$ 。于是 $\mathscr{P}(A)$ 的元素是下列按子集中元素数所类聚的所有子集。

没有元素： ϕ

一个元素： $\{a\}, \{b\}, \{c\}$

两个元素： $\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}$

三个元素： $\{a, b, c\}$ 。

这样例中的幂集有八个元素。如果 A 是一个集合，我们引入记号

$$|A|$$

来表示 A 的**元素数**（更精确地说， A 的**基数**）。如果 A 是有限的，

也就是 $|A|$ 是一个整数, 则我们有下列关于 $|A|$ 和 $|\mathcal{P}(A)|$ 的恒等式.

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|} \quad (2.1)$$

例中, $|A| = 3$, $|\mathcal{P}(A)| = 8$ 而的确 $8 = 2^3$. 我们省去(2.1)的证明, 因为它涉及的概念目前对我们并不是特别有用的. 但是这个关系告诉了我们有关幂集是怎样得到它名字的某些由来.

另一个重要的集合构造是把一些集合的一个给定序列的元素组合起来, 形成“复合”元素的一个新集合. 如果 n 是一个正整数, 我们写

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

来表示不一定是相异元素的一个 n -元组 (或有序序列). 如果 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 是一个 n -元组, 则元素 a_i 称为第 i 个坐标 ($i = 1, 2, \dots, n$), 且当 $a_i = b_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 时, 定义两个 n -元组 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 和 $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ 相等. 通常把一个 2-元组称作一个有序偶. 我们想更加详细讨论 n -元组的集合, 特别是有序偶的集合. 如果 A 和 B 是集合, 则

定义 2.2

A 和 B 的笛卡儿积 (用 $A \times B$ 来表示) 是所有有序偶 (x, y) 的集合, 而使得 x 是 A 的一个元素和 y 是 B 的一个元素.

以更加简洁的形式重述这个定义

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ 和 } y \in B\}$$

有时把集合 A 和 B 分别称作第一和第二坐标集.

或许最熟悉的笛卡儿积就是集合 $R \times R$, 式中 R 是实数的集合. 于是 $R \times R$ 是平面中所有点的集合. 一个不太自然的例子可能有助于进一步澄清这个概念.

例 2.2

$$A = \{1, 2, 3\}$$