纯粹数学与应用数学专著 第12号

典型群上的调和分析

龚昇著

科学出版社

纯粹数学与应用数学专著 第12号

典型群上的调和分析

龚 昇 著

科 学 出 版 社

1 9 8 3

内 容 简 介

本书作为华罗庚教授的名著《多复变数典型域上的调和分析》一书的发展之一，它总结了作者及国内数学工作者多年来在几个重要的典型群——酉群、旋转群和酉辛群上的调和分析的研究成果，可供数学专业高年级学生、研究生、教师和数学理论工作者参考.

纯粹数学与应用数学专著 第12号

典型群上的调和分析

龚 昇 著

责任编辑 张鸿林 张启男

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1983年11月第一版　　开本：850×1168 1/32

1983年11月第一次印刷　　印张：10

印数：精 1—3,000　　插页：精4 平2

平 1—4,200　　字数：264,000

统一书号：13031·2388

本社书号：3266·13—1

定价：布面精装 2.90 元
平　　装 1.90 元

科技新书目：56-精22 平23

序

H. Weyl 研究了有限维的紧致群上的调和分析. 证明了有一组正交有则的系存在，以及任何一个连续函数都可以用这个系的有限个函数的线性式来逼近. 由于他研究的对象太抽象了，没有方法表达出这一正交有则系，当然谈不上其逼近表达式是什么，更谈不上深入的收敛性了.

紧致群的第一个例子是 $\{e^{i\theta}\}$. 这上面有一个正交正则系

$$\{e^{in\theta}\}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

也就是

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in\theta} \cdot e^{-im\theta} d\theta = \begin{cases} 1, & 当\ n = m\ 时; \\ 0, & 当\ n \neq m\ 时. \end{cases}$$

这一紧致群的调和分析就是整套的 Fourier 分析，已有大量的文献，由 A. Zygnumd 于 1959 年写的两卷七百多页的巨著就可以看到其发展的情况.

$\{e^{i\theta}\}$ 的直接推广就是 U_n 群，也就是 n 行 n 列的方阵 U，它适合于

$$U\bar{U}' = I,$$

$\bar{U}'$ 是 U 的共轭及转置，同时 U_2 与旋转群 SO_3 有同构处. 在物理上 U_n 群的应用越来越重要.

除掉抽象的紧致群及最简单的 $U_1 = \{e^{i\theta}\}$ 之外，无人深入研究. 笔者在研究多复变数典型域的调和分析时，定出了 U_n 上的明确的正交正则完全系而且证明了 Abel 求和法，由此当然可以推出逼近的线性式.

同时任何紧致群可以“嵌入”到 U_n 之中，因此这一方面的研究既具体化了又不失其抽象普遍性.

但 Abel 求和法是我们处理调和分析的最初一步的方法，在

Fourier 分析中存在着大量基本的问题. 例如在求和法中,$(c,1)$ 求和是最合适的方法,这是 Fejér Lebesgue 的重要贡献.

Cesàro 求和怎样推广到 U_n 上的调和分析中来,龚昇同志用了创造性的技巧得到了相当于 Lebesgue 等人的结果. 他还对 U_n 上的调和分析得到了一系列的结果. 也许对 U_n 上的调和分析运用到近代物理会有所帮助. 因此,人们都会问: Fourier 分析的经典工作对 U_n 上的调和分析有没有对应的定理?

这是一个有丰富前途的方向,乐之为序.

华 罗 庚

1979. 2. 26

目　　录

第一部分　酉群上的调和分析

第二部分 旋转群上的调和分析

第一部分　酉群上的调和分析

第0章　导　言

§0.1　引言

本书以群表示论为工具，来研究典型群上的调和分析．本书分成三个部分．第一部分讨论了酉群上的调和分析，第二部分讨论了旋转群上的调和分析，第三部分讨论了酉辛群上的调和分析．每个部分在处理的方法上有相似之处，但又各自成为独立系统．为了使对群表示论不大熟悉的读者很快理解本书的内容，在本书最后部分还写了一个十分简单的紧致李群的表示论的附录，这个附录取材自 Chevalley [1]．

本书的第一部分是作者于 1959 年至 1962 年在华罗庚教授指导下，对酉群上的调和分析进行系统研究的小结．华罗庚教授成功地应用群表示论的工具来研究多复变数典型域的调和分析．这已总结在他的名著[1]中．他的工作有着多方面的深远的影响．例如，从这些工作出发，可以导出如下的一条定理(见华罗庚[2])：酉群上的连续函数的 Fourier 级数可以 Abel 求和于它自己．这是酉群也是紧致李群上调和分析研究的开创性工作．从群表示论的角度来看，这也是一条有趣的定理．著名的 Peter-Weyl [1]定理告诉我们，紧致群上的连续函数可以用群的不可约表示的线性组合逼近之．Peter-Weyl 定理是一条抽象的逼近定理，而华罗庚的定理则是一条关于有限维(维数大于 1)的紧致群上的连续函数的 Fourier 级数的收敛定理．当然一条收敛定理是优于逼近定理的．

从群的观点，单位圆周是一维的酉群，一般的酉群是单位圆周的直接推广．所以在酉群上研究调和分析是古典调和分析的最直接的推广．由于任意紧致拓扑群可以嵌入到酉群内作为一个子

群，任意紧致齐性空间可以看成为二个紧致群的商，对于任意酉群中的紧致子群上的连续函数可以拓展成为酉群上的连续函数，因此，有关酉群上调和分析的研究对于一般的紧致群及紧致齐性空间也都是有意义的，从多复变函数论的观点出发，如果把多个变数的 Fourier 分析看作多复变数多圆柱的特征流形上的调和分析的研究，那么酉群上的 Fourier 分析可以看作多复变数第一类典型域 $\mathscr{R}_{\mathrm{I}}(n,C)$ 的特征流形上的调和分析的研究. 旋转群上的调和分析可以看作实的第一类典型域 $\mathscr{R}_{\mathrm{I}}(n,\mathbf{R})$ 的特征流形[1)]上的调和分析的研究. 而酉辛群上的调和分析的研究则可以看作四元数体上的第一类典型域 $\mathscr{R}_{\mathrm{I}}(n,Q)$ 的特征流形上的调和分析的研究(详细参阅第二、三部分). 也就是说我们所讨论的是复数域、实数域以及四元数体上的第一类典型域的特征流形的调和分析.

这里介绍的处理群上调和分析的方法还可能有其它的应用. 例如，最近钟家庆[3]应用这种方法给出了 Grassmann 流形上的 Schubet 计算的十分明确的公式.

第一部分的书稿写于 1965 年，当时原想独立成篇出版. 由于某些原因，未能实现. 这次，只是对原稿作了很小的修改，改正了一些原稿上的错误，并增加了一些新的内容.

作者愿向自己的导师华罗庚教授表示衷心的感谢，他不但指导了这项研究工作，并且对本书的出版一直给予鼓励和关心，还为本书亲自写了序. 作者愿向钟家庆副教授表示衷心的感谢，他对本书提出了十分宝贵的意见. 在本书的写作过程中，王世坤、陈广晓、贺祖祺、董道珍同志出了不少力，也一并表示感谢.

§ 0.2 酉群上的调和分析

设 U_n 为 n 阶酉群，若 $U \in U_n$，以 $A_{f_1 \cdots f_n}(U)$ 表示 U 的标记为 $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 的酉表示，这里 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是满足 $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots f_n$

1) 这里特征流形 $\mathfrak{C}$ 的定义是：$\mathfrak{C}$ 是 $\mathscr{R}_{\mathrm{I}}$ 的边界上具有以下性质的一部分. i)凡 $\mathscr{R}_{\mathrm{I}}$ 内调和的函数一定在 $\mathfrak{C}$ 上取最大值；ii) 对 $\mathfrak{C}$ 上的任一点 ξ，我们可以找到一个 $\mathscr{R}_{\mathrm{I}}$ 上的调和函数 $f(x)$ 在此点取最大绝对值.

的整数．记 $N(f_1,f_2,\cdots,f_n)$ 为 $A_{f_1\cdots f_n}(U)$ 的阶，我们常用 f 来代表 $(f_1,f_2,\cdots,f_n)$．若

$$A_f(U)=(a_{ij}^f(U))\ 1\leqslant i,j\leqslant N(f),$$

那么 $\{\varphi_{ij}^f(U)\}$ 是 U_n 上的就范直交系，这里

$$\varphi_{ij}^f(U)=\sqrt{\frac{N(f)}{C}}\,a_{ij}^f(U),$$

而 C 是 U_n 的体积，即

$$C=(2\pi)^{\frac{1}{2}n(n+1)}/((n-1)!(n-2)!\cdots 2!1!).$$

$\{\varphi_{ij}^f\}$ 的全体对可积函数来讲是完整的．记

$$\Phi_f(U)=(\varphi_{ij}^f(U))_{1\leqslant i,j\leqslant N(f)}=\sqrt{\frac{N(f)}{C}}\,A_f(U),$$

若 $u(U)$ 是可积函数，它可以展开成 Fourier 级数

$$\sum_{f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_n}\operatorname{tr}(C_{f_1\cdots f_n}\Phi'_{f_1\cdots f_n}(U),) \tag{0.2.1}$$

这里

$$C_{f_1\cdots f_n}=\int_{U_n}u(V)\Phi_{f_1\cdots f_n}(V)\dot{V},$$

$\operatorname{tr}B$ 表示 B 的迹，B' 表示 B 的转置．

更明白些，

$$\begin{aligned}u(U)&\sim\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n}\operatorname{tr}\left(\frac{N(f)}{C}\int_{U_n}u(V)\overline{A_{f_1\cdots f_n}(V\overline{U}')\dot{V}}\right)\\&=\frac{1}{C}\int_{U_n}u(V)\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n}N(f)\chi_{f_1\cdots f_n}(\overline{V}U')\dot{V},\end{aligned} \tag{0.2.2}$$

这里 $\chi_{f_1\cdots f_n}(U)$ 为表示 $A_{f_1\cdots f_n}(U)$ 的特征．

首先很容易的可以证明：如果 $u(U)$ 是实函数，那么它的 Fourier 级数等于它的实部，即

$$\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n}\operatorname{tr}(C_{f_1\cdots f_n}\Phi_{f_1\cdots f_n}(U))=\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n}\operatorname{Re}\operatorname{tr}(C_{f_1\cdots f_n}\Phi'_{f_1\cdots f_n}(U)).$$

若 $U\in U_n,V\in U_n$，那么

$$u(VU)\sim\frac{1}{C}\int_{U_n}u(W)\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n}N(f)\chi_{f_1\cdots f_n}(\overline{W}U'V')\dot{W}$$

$$= \sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n} \frac{N(f)}{C} \operatorname{tr}\left(\int_{U_n} u(W)\overline{A_{f_1\cdots f_n}(W)}\,\overline{A_{f_1\cdots f_n}(\overline{U}')}\,\overline{A_{f_1\cdots f_n}(\overline{V}')}\dot{W}\right)$$

$$= \sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n} \sqrt{\frac{N(f)}{C}} \operatorname{tr}(C_{f_1\cdots f_n}A'_{f_1\cdots f_n}(U)A'_{f_1\cdots f_n}(V)).$$

但是

$$u(\overline{V}U) \sim \sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n} \frac{N(f)}{C} \operatorname{tr}\left(\int_{U_n} u(W)A_{f_1\cdots f_n}(\overline{W}U'\overline{V}')\dot{W}\right)$$

$$= \sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n} \frac{N(f)}{C} \operatorname{tr}\left(\int_{U_n} u(W)A_{-f_n,\cdots,-f_1}(W\overline{U}'V')\dot{W}\right)$$

$$= \sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n} \frac{N(f)}{C} \operatorname{tr}\left(\int_{U_n} u(W)A_{f_1\cdots f_n}(W)\overline{A'_{f_1\cdots f_n}(U)}A_{f_1\cdots f_n}(V')\dot{W}\right)$$

$$= \sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n} \sqrt{\frac{N(f)}{C}} \operatorname{tr}(\overline{C}_{f_1\cdots f_n}\overline{A'_{f_1\cdots f_n}(U)}A_{f_1\cdots f_n}(V')),$$

这是因为

$$A_{f_1\cdots f_n}(U) = \overline{A_{-f_n,\cdots,-f_1}(U)'}$$

及

$$N(f_1,\cdots,f_n) = N(-f_n,\cdots,-f_1),$$

所以

$$\frac{u(VU)+u(\overline{V}U)}{2} \sim \frac{1}{2}\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n} \sqrt{\frac{N(f)}{C}} \operatorname{tr}[C_{f_1\cdots f_n}A'_{f_1\cdots f_n}(U)$$

$$\cdot A'_{f_1\cdots f_n}(V) + \overline{C_{f_1\cdots f_n}A'_{f_1\cdots f_n}(U)}A_{f_1\cdots f_n}(V')].$$

让 $V = I$，即得

$$u(U) \sim \sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n} \operatorname{Re}\operatorname{tr}(C_{f_1\cdots f_n}\Phi'_{f_1\cdots f_n}(U)).$$

§0.3 调和函数

设$\mathscr{M}$是m维 Riemann 流形，基本张量 $g_{ij}(i,j=1,2,\cdots,m)$ 具有一阶连续偏微商，设 $x=(x^1,\cdots,x^m)$ 是任意局部坐标系，

那么有 Beltrami 算子

$$\Delta = \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_{k=1}^{m}\left\{\begin{matrix} k \\ ij \end{matrix}\right\}\frac{\partial}{\partial x^k}\right),$$

这里 g^{ij} 为 g_{ij} 的逆变张量，且

$$\left\{\begin{matrix} k \\ i,j \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right)$$

表示 Christoffel 符号.

设 $u(x)$ 是在 $\mathscr{M}$ 上定义的实函数，且有二阶连续偏微商，若

$$\Delta u(x) = 0, \tag{0.3.1}$$

则称 $u(x)$ 为调和的.

对于典型域 $\mathscr{R}_{\mathrm{I}}$: $I^{(n)} - Z\bar{Z}' > 0$，这里 $I^{(n)}$ 表示 n 阶单位矩阵，$Z = (z_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$；微分方程 (0.3.1) 成为

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\sum_{j,k=1}^{n}\left(\delta_{\alpha\beta} - \sum_{l=1}^{n}\bar{z}_{l\alpha}z_{l\beta}\right) \cdot \left(\delta_{jk} - \sum_{r=1}^{n}\bar{z}_{jr}z_{kr}\right)\frac{\partial^2 u(z)}{\partial \bar{z}_{j\alpha}\partial z_{k\beta}} = 0, \tag{0.3.2}$$

并称其为典型域 $\mathscr{R}_{\mathrm{I}}$ 上的 Beltrami–华方程，算子 Δ 称为 Beltrami–华算子.

华罗庚[3]解决了如下的 Dirichlet 问题：在 U_n 上已给一个连续函数，存在唯一的解满足方程(0.3.2)，且在 U_n 上的值等于已给函数. 具体写出解，就是 Poisson 积分

$$\frac{1}{C}\int_{U_n} u(U)\,\frac{\det^n(I - Z\bar{Z}')}{|\det(I - Z\bar{U}')|^{2n}}\,\dot{U},$$

这里 $u(U)$ 为 U_n 上已给函数，C 为 U_n 的体积.

由此出发，他定义了 U_n 上的 Fourier 级数的 Abel 求和.

由调和函数的理论，我们知道

$$\lim_{Z\to U}\frac{1}{C}\int_{U_n} u(U)\,\frac{\det^n(I - Z\bar{Z}')}{|\det(I - Z\bar{V}')|^{2n}}\,\dot{V} = u(U), \tag{0.3.3}$$

这里 Z 趋于 U 是沿着一条不与边界相切的途径进行的. 有关这方面的工作以及它的进一步发展，请参阅华罗庚的《多复变数函数论

中的典型域的调和分析》、《从单位圆谈起》以及陆启铿的《典型流形与典型域》等著作.

在(0.3.3)中特别取 $Z = rU$，此处 $0 < r < 1$ 就有

$$\lim_{r\to 1}\frac{1}{C}\int_{U_n} u(V)\frac{(1-r^2)^{n^2}}{|\det(I - rU\overline{V}')|^{2n}}\dot{V} = u(U), \quad (0.3.4)$$

所以我们有：$u(U)$ 的 Fourier 级数的 Abel 平均

$$\sum_{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n}\rho^f(r)\,\mathrm{tr}\,(C_{f_1\cdots f_n}\Phi'_{f_1\cdots f_n}(U)), \quad (0.3.5)$$

当 $r\to 1$ 时，是趋于 $u(U)$的. 这里

$$\rho^f(r) = \frac{1}{N(f)}\cdot\frac{1}{C}\int_{U_n}\frac{(1-r^2)^{n^2}\chi_f(U)\dot{U}}{|\det(I - rU)|^{2n}}. \quad (0.3.6)$$

§ 0.4 Fourier 级数的求和

在本书的第一章中，将用二种方法证明(0.3.4)，一种十分简洁的方法是华罗庚给出的. 另一种证明是不通过多复变数调和函数的理论，而直接从调和分析的技巧得到. 证明的方法有它的代表性，对于满足适当条件的情形都是适用的. 例如应用这个方法可以证明：如果 $u(U)$ 在 U_n 上连续，那么它的 Fourier 级数的 Fejér 平均是收敛于它自己的.

至于 $\rho^f(r)$ 的值，我们知道有

(1) $\rho^f(r)\to 1$，当 $r\to 1$；

(2) $$\rho^f(r) = \begin{cases} r^{f_1+\cdots+f_n} & 若 f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant 0; \\ r^{-f_1-\cdots-f_n} & 若 0\geqslant f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n. \end{cases}$$

在第一章中我们给出了 $\rho^f(r)$ 的具体表达式. 计算出 $\rho^f(r)$ 的具体表达式的方法，除了作者的一种方法以外，还有一种是 1974 年钟家庆给出的.

在本书的第二章中，定义了 Fourier 级数(0.2.1)的 Cesàro 平均并且证明了如下的一条 Riesz 型定理：若 $u(U)$ 在 U_n 上连续，那么它的 Fourier 级数可以 (C,α) 求和于它自己，但 $\alpha > \frac{n-1}{n}$.

至于 $\frac{n-1}{n}$ 这个值能否改进，这是尚未解决的问题. 众所周知，当 $n=1$ 时这已是不能改进的了.

在第二章中还对 Cesàro 求和中最重要且最典型的情形——Fejér 求和进一步加以讨论.

还需提出的是我们所得到的 (c,α) 核，都能用矩阵形式简洁地表达出来. 例如 Fejér 核是

$$\frac{1}{D}\left|\frac{\det(I-V^{N+1})}{\det(I-V)}\right|^{2n}.$$

这里 $V\in U_n$，D 是一个与 n，N 有关的绝对常数.

§ 0.5 收敛判别法

Fourier 级数(0.2.1)的部分和是

$$\sum_{N>l_1>\cdots>l_n>-N}\operatorname{tr}\left(C_{l_1\cdots l_n}\Phi'_{l_1\cdots l_n}(U)\right). \tag{0.5.1}$$

这个部分和即所谓"方体"的部分和，它的 Dirichlet 核在第三章中具体给出. 这也有二个证明，其中一个代数的证明是由华罗庚给出的. (0.5.1)的 Dirichlet 核可以写成

$$\frac{1}{(n-1)!\cdots 2!\,1!}\,\frac{D\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial\lambda_n}\right)}{D(\bar{\lambda}_1,\cdots,\bar{\lambda}_n)}\,\frac{\det(\bar{V}'^N-V^{N+1})}{\det(I-V)},$$

这里 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 V 的特征根，而 D 为 Vandermonde 行列式.

当 $N\to\infty$ 时，即使 $u(U)$ 是在 U_n 上连续的，(0.5.1)未必收敛，那么在什么条件下才能保证收敛呢? 在第三章中证明了如下的收敛判别准则: 若 $u(U)$ 属于 $C^{\frac{n(n-1)}{2}+p}(U_n)$ 函数类 $(0<p<1)$，那么(0.5.1)是收敛的，且收敛于 $u(U)$，此外，还给出了一些有关绝对收敛的判别法.

§ 0.6 紧致拓扑群上的逼近理论

Peter-Weyl 定理指出了逼近的存在定理，但是具体的写出有限

线性式来却是另一回事. 由于紧致拓扑群可以同构地映入酉群的某一个子群，所以可以依靠前面几章的结果来建立紧致拓扑群上的逼近理论，这是第四章的内容.

我们在第四章中，首先给出了任意紧致拓扑群上连续函数的连续模的定义，这里不但给出了连续函数的有限性逼近式，而且还进一步的给出了可能的误差程度. 例如在第四章中可以证明：如果 $u(g)$ 在紧致拓扑群 G 上连续，且属于 $\mathrm{Lip}\,p$，那么一定存在一个与 N 有关的有限线性逼近式 $P_N(g)$，使

$$|u(g)-P_N(g)|<C/N^p,$$

这里 C 是绝对常数，$0<p<1$.

§ 0.7 球求和

在本书的第五章中，将讨论球求和，所谓 Fourier 级数的球求和乃是将(0.2.1)考虑为

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\substack{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\\ l_1^2+\cdots+l_n^2=m}}\operatorname{tr}\left(C_{f_1\cdots f_n}\Phi'_{f_1\cdots f_n}(U)\right),\tag{0.7.1}$$

这里 $l_1=f_1+n-1$, $l_2=f_2+n-2$, $\cdots$, $l_n=f_n$.

这时候(0.7.1)的收敛及求和的意义都与以前所给出的定义不一样. 在这一章中，首先给出了(0.7.1)的球平均收敛的一条一般的定理，其中包括了重要的(按球求和意义下的) Riesz 平均，即证明了：如果 $u(U)$ 在 U_n 上连续，那么它的 Fourier 级数(0.7.1)的 δ 次 Riesz 平均

$$\left(1-\frac{(2n-1)n(n-1)}{6R^2}\right)^{-\delta}\sum_{\substack{f_1\geqslant\cdots\geqslant f_n\\ l_1^2+\cdots+l_n^2\leqslant R^2}}\left(1-\frac{l_1^2+\cdots+l_n^2}{R^2}\right)^{\delta}\cdot\operatorname{tr}\left(C_{f_1\cdots f_n}\Phi'_{f_1\cdots f_n}(U)\right)\tag{0.7.2}$$

当 $R\to\infty$ 时是收敛于 $u(U)$ 的，但 $\delta>\dfrac{n^2-1}{2}$.

此外，还给出了一条 Tauber 型的收敛定理.