

经济应用数学基础
(五)

运筹学通论

中国人民大学数学教研室编

一九八三·四

前 言

本书介绍运筹学(除线性规划外)的基本知识,要求读者具备微积分、线性代数、概率论与数理统计、线性规划等的基础知识。这本书可作为高等院校财经专业的试用教材,也可做为其它院校的运筹学、系统工程、管理工程等有关专门化的试用教材。为了内容的完整起见,我们介绍了运筹学各分支的主要内容,因各校学时不一致,书中有些章节加注了“※”号,时间不够时可略去不讲。

在编写过程中,中国科学院系统科学研究所田丰同志、应用数学研究所程侃同志、北京航空学院王日英同志等对有关章节提出了很多宝贵意见,谨在此表示感谢。

由于我们水平不高,教学经验不足,本书一定还有不少缺点和错误,请广大读者批评指正。

编 者 1982年12月

目 录

第一章 整数规划	1
§ 1.1 整数规划的例子	1
§ 1.2 整数规划的解法(一)——分枝定界法	4
§ 1.3 整数规划的解法(二)——割平面法	12
习题一	20
第二章 图与网络	21
§ 2.1 基本概念	21
§ 2.2 欧拉图与中国邮路问题	25
§ 2.3 哈密尔顿图	30
§ 2.4 最短路问题	38
§ 2.5 最小树问题	43
§ 2.6 最大流问题	45
§ 2.7 匹配	52
习题二	55
*第三章 统筹方法	60
§ 3.1 引言	60
§ 3.2 统筹图	60
§ 3.3 关键路线(主要矛盾线)	69
§ 3.4 统筹图上的有关参数计算	70
习题三	74
第四章 对策论	75
§ 4.1 对策论的基本概念	75
§ 4.2 矩阵对策的最优纯策略	77

§ 4.3	矩阵对策的混合策略与混合扩充	82
§ 4.4	矩阵对策的线性规划解法	87
* § 4.5	其它对策模型简介	92
习题四		98
第五章	非线性规划	100
§ 5.1	例子	100
§ 5.2	预备知识	102
§ 5.3	凸集、凸函数与凸规划	109
§ 5.4	单变量极值问题的解法	112
§ 5.5	无约束极值问题的解法	121
§ 5.6	罚函数方法	127
§ 5.7	线性约束条件下线性逼近的方法	134
习题五		142
第六章	动态规划	145
§ 6.1	最短路线问题与“最优化原则”	145
§ 6.2	多阶段配置问题	153
§ 6.3	“背包”问题	157
§ 6.4	资源分配问题	165
习题六		170
* 第七章	多目标数学规划	172
§ 7.1	引言及例子	172
§ 7.2	各种意义之下的解集	174
§ 7.3	像集	182
§ 7.4	处理多目标规划的一些方法	191
习题七		207
第八章	排队论	209

§ 8.1 排队系统的描述	209
§ 8.2 马氏型排队系统	215
§ 8.3 例子	225
习题八	230
第九章 库存理论	231
§ 9.1 库存理论中的几个要素	231
§ 9.2 确定性库存模型	233
§ 9.3 随机型库存模型	242
习题九	248
第十章 模拟	249
§ 10.1 引论	249
§ 10.2 例子	252
§ 10.3 随机数的产生	257
习题十	263
*第十一章 质量管理	266
§ 11.1 概论	266
§ 11.2 质量管理基本方法(1)	271
§ 11.3 质量管理基本方法(2)	283
参考文献	295

第一章 整数规划

整数规划是数学规划的一个重要分支。在一个规划问题中, 如果它的某些变量(或全部变量)要求取整数时, 这个问题就称为整数规划问题。特别是问题的约束条件和目标函数都是线性函数时, 就称此问题是整数线性规划。

从表面上看, 整数规划问题似乎要比对应的数学规划问题容易一些。但实际上, 它比对应的数学规划问题要困难的多。到目前为止, 整数规划问题还没有一个很有效的解法, 但是, 由于应用及理论上提出的许多问题都可以归结为整数规划问题, 所以, 对于整数规划的研究在理论上和实践上都有重大意义。在这一章, 我们只讨论整数线性规划的解法。

§ 1.1 整数规划的例子

例1 (下料问题)

设用某种型号的圆钢下另件 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 的毛坯, 在一根圆钢上, 下料的不同方式有 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 种, 每种下料方式可以得到各种零件的毛坯数以及每种零件的需要数量如下表:

各方式下的 另件毛坯个 另件名称	下料方 式 数	B_1	B_2	$\dots$	B_n	各零件的需要量
A_1		C_{11}	C_{12}	$\dots$	C_{1n}	a_1
A_2		C_{21}	C_{22}	$\dots$	C_{2n}	a_2
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$
A_m		C_{m1}	C_{m2}	$\dots$	C_{mn}	a_m

问应怎样安排下料方式, 使得既满足需要, 又使所用原材料最

2

少?

设用 B_j 方式下料的圆钢有 x_j 根, 则这一问题的数学模型为:

求一组变量 x_j ($j=1, 2, \dots, n$) 的值, 使它满足约束条件:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n C_{ij} x_j \geq a_i & (i=1, 2, \dots, m) \\ \text{(所得第 } A_i \text{ 种零件毛坯个数不少于 } a_i) \\ x_j \geq 0, \text{ 且为整数.} \end{cases}$$

并使目标函数 $S = \sum_{j=1}^n x_j$ 的值最小。

在这个例子中, 所有变量均要求是整数。这类问题称为整数规划问题。

例 2: (工厂选址问题)

要在 m 个不同地点计划修建 m 个规模不全相同的工厂, 它们的生产能力分别是 $a_1, a_2, \dots, a_m$ (为简便起见, 假设生产同一种产品)。第 i 个工厂的建设费用为 f_i , $i=1, 2, \dots, m$ 。又有 n 个零售商店销售这种产品, 对这种产品的需求量分别为 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 。从第 i 个工厂运送一单位产品到第 j 个零售商店的运费为 C_{ij} 。试决定在修建哪些工厂, 使得既满足零售商店的需求, 又使建设工厂和运输的总费用最小。

设 x_{ij} 是第 i 个工厂运往第 j 个零售商店的产品数量。

又设: $y_i = \begin{cases} 1 & \text{如果决定修建第 } i \text{ 个工厂} \\ 0 & \text{相反} \end{cases}$

于是有:
$$\min \sum_{i=1}^m [f_i y_i + \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij}]$$

满足:
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j & j=1, 2, \dots, n \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i y_i & i=1, 2, \dots, m \\ y_i = 0 \text{ 或 } 1, & i=1, 2, \dots, m \\ x_{ij} \geq 0 & i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n \end{cases}$$

在这个例子中, a_i 可取 0 或 1, 而 x_{ij} 可取任意非负实数。这类整数规划问题称为混合规划问题。

例 3

有 m 台同一类型的机床, 有 n 种零件在这类机床上进行加工, 设各种零件的加工时间分别为: $a_1, a_2, \dots, a_n$, 问如何分配, 使各机床的总加工任务相等, 或者说尽可能均衡。

引进变量 x_{ij} ($i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$), 规定

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若零件 } j \text{ 分配在第 } i \text{ 台机床,} \\ 0, & \text{若零件 } j \text{ 不分配在第 } i \text{ 台机床上加工.} \end{cases}$$

于是第 i 台机床加工各种零件的总时间为:

$$\sum_{j=1}^n a_j x_{ij} \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

又一个零件只能在一台机床上加工, 所以又有:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1 \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

问题归结为: 求一组变量 x_{ij} , 使得

$$\min \left\{ \max \left[\sum_{j=1}^n a_j x_{1j}, \sum_{j=1}^n a_j x_{2j}, \dots, \sum_{j=1}^n a_j x_{mj} \right] \right\}$$

且满足: $\begin{cases} \sum_{i=1}^m x_{ij} = 1 & (j=1, 2, \dots, n) \\ x_{ij} \text{ 取 } 0 \text{ 或 } 1, & (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n) \end{cases}$

在这个例子中, 所有变量均取 0 或 1。这类整数规划问题称为 0-1 规划问题。

例 4 “背包”问题

一个旅行者, 为了准备旅行的必备物品, 要在背包里装一些最有用的东西, 但他最多只能携带 b 公斤的物品。而每件物品只能整件携带, 于是他给每件物品规定了一定的“价值”, 以表示其有用程度。如果共有 m 件物品, 第 i 件物品重 a_i 公斤, 其价值 c_i 。问题就变成: 在携带的物品总重不超过 b 公斤的

条件下, 携带哪些物品, 可使总价值最大。

首先引进变量 x_j , 规定:

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{当携带第 } j \text{ 件物品时,} \\ 0, & \text{当不携带第 } j \text{ 件物品时.} \end{cases}$$

问题的数学形式可写成 (m 为正整数):

$$\max \sum_{i=1}^m C_i x_i$$

满足:
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m a_{ij} x_j \leq b \\ x_j = 0 \text{ 或 } 1 \end{cases}$$

这也是一个 0-1 规划问题。

§1.2 整数规划的解法 (一) —— 分枝定界法

对于整数线性规划问题, 如果它的可行解集是有限集, 我们可以将它的所有的解依次代入目标函数中, 比较所得目标函数值的大小, 从而求得最优解。

例如 §1.1 的背包问题中, 若 x^0 是它的一个可行解:

$$x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \quad (x_j^0 = 0 \text{ 或 } 1).$$

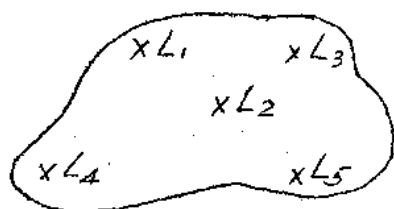
则可能的解最多有 2^n 个。当 n 较小时, 逐条地比较这些解的优劣, 则可求得最优解。这样的方法称为完全枚举法。

但是, 当 n 较大时, 利用完全枚举法几乎是不可能的。这时, 我们可以利用部分枚举法来解决这一问题。这种方法亦称分枝定界方法。我们仍以背包问题来说明这一解法的基本思想。

例 1. 现有 100 万元资金打算在五个不同的地方修建某种工厂, 由于条件不同, 所需投资分别为: $a_1=56, a_2=20, a_3=54, a_4=42, a_5=15$, (单位: 万元)。工厂建成后, 每年能得到的利润分别为 $C_1=7, C_2=5, C_3=9, C_4=6, C_5=3$ (单位: 万元)。问应如何确定投资地点, 使用款不超过 100 万元, 且

使建成后每年所获总利润最多?

设 $x_j = \begin{cases} 1 & \text{当在 } L_j \text{ 处投资建厂} \\ 0 & \text{当不在 } L_j \text{ 处投资建厂} \end{cases}$
($j = 1, 2, 3, 4, 5$)



得:

$$\text{问题[0]} \begin{cases} \max f = 7x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 6x_4 + 3x_5 \dots\dots\dots (1) \\ 56x_1 + 20x_2 + 54x_3 + 42x_4 + 15x_5 \leq 100 \dots\dots\dots (2) \\ x_j = 0 \text{ 或 } 1, j = 1, 2, 3, 4, 5 \dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

问题[0]显然有一个可行解 $x^0 = (0, 0, 0, 0, 0)$. 对应的目标值为 $f_0 = 0$, 显然 f_0 是目标值的一个下界.

如果我们将约束条件(3)改为 $0 \leq x_j \leq 1$, 则问题[0]变为普通线性规划问题:

$$\text{问题[0]}' \begin{cases} \max f = 7x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 6x_4 + 3x_5 \dots\dots\dots (1) \\ 56x_1 + 20x_2 + 54x_3 + 42x_4 + 15x_5 \leq 100 \dots\dots\dots (2) \\ x_j \leq 1 \dots\dots\dots (3) \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

问题[0]的解集是问题[0]的解集的子集, 问题[0]'称为问题[0]的松弛问题. 它是较易求解的. 解问题[0]', 可能有下面几种情形:

i. 所得最优解恰全为整数, 当然, 这个解也是问题[0]的解.

ii. 若松弛问题无可行解, 显然问题[0]也无可行解.

iii. 有最优解, 但其分量不全为整数, 所以不是问题[0]的最优解.

为了求问题[0]'的解, 我们可以利用单纯形方法. 但是, 这里, 我们用更简单的方法来求它的解: 首先, 求出 C_i/a_{ij} ($i = 1, \dots, 5$), 这个比值的经济意义是投资一万元在第 i 地

· 6 ·

所能获得的利润，求出比值如表(一)：

将比值最大的所对应的变量取作1 ($x_2=1$)，再取比值次大所对应的变量为1 ($x_5=1$)……依次作下去，使满足约束条件(2)，就得到一个解：

$$x^0 = (0, 1, 1, 1/42, 1)$$

对应的目标值 $f^0 = 18\frac{7}{10}$ 。 f^0 是问

题[0]的目标值的上界。但是 x^0 不是问题[0]的解，因

$x_4 = 1/42$ 不是整数，但 x_4 只能取0或1，所以我们分别令 $x_4=0$ 或 $x_4=1$ ，可将问题[0]化为两个子问题：

$$\text{问题[1]} \left\{ \begin{array}{l} \max f = 7x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 3x_5 \\ 56x_1 + 20x_2 + 54x_3 + 15x_5 \leq 100 \\ x_4 = 0 \\ x_j = 0 \text{ 或 } 1, \quad j = 1, 2, 3, 5. \end{array} \right.$$

$$\text{问题[2]} \left\{ \begin{array}{l} \max f = 7x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 3x_5 + 6 \\ 56x_1 + 20x_2 + 54x_3 + 15x_5 \leq 58 \\ x_4 = 1 \\ x_j = 0 \text{ 或 } 1, \quad j = 1, 2, 3, 5. \end{array} \right.$$

对于任一子问题，如果已求得它的解，或知道它无解，或能断定它有解也不一定是所求的最优解。那末，我们就称这一子问题已经探明，否则探未探明。将原问题分为子问题的过程称为分枝。

用同样的方法，我们可以求得问题[1]的松弛问题，并求这个松弛问题的解。得到 $x' = (1/16, 1, 1, 0, 1)$ ；对应目标值为 $f' = 18\frac{7}{10}$ 。 x' 仍不是整数解，再分别令 $x_1=0$ ，或 $x_1=1$ 。

表(一)

变量 x_i	a_i	b_i	b_i/a_i
1	56	7	$1/8$
2	20	5	$1/4$
3	54	9	$1/6$
4	42	6	$1/7$
5	15	3	$1/5$

又可将问题 [1] 分支为：

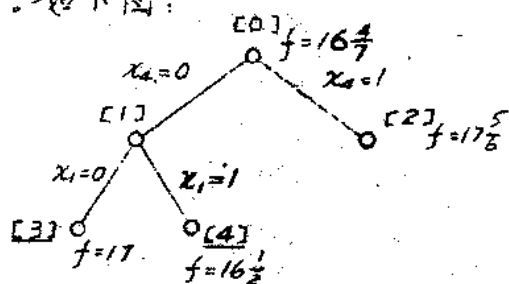
$$\text{问题 [3]}: \begin{cases} \max f = 5x_2 + 9x_3 + 3x_5 \\ 20x_2 + 54x_3 + 15x_5 \leq 100 \\ x_1 = 0, \quad x_4 = 0 \\ x_j = 0 \text{ 或 } 1, \quad j = 2, 3, 5 \end{cases}$$

$$\text{问题 [4]}: \begin{cases} \max f = 5x_2 + 9x_3 + 3x_5 + 7 \\ 20x_2 + 54x_3 + 15x_5 \leq 44 \\ x_4 = 0, \quad x_1 = 1 \\ x_j = 0 \text{ 或 } 1, \quad j = 2, 3, 5 \end{cases}$$

解问题 [3] 的松弛问题得 $x^3 = (0, 1, 1, 0, 1)$, $f_3 = 17$ 。
显然, x^3 也是问题 [3] 的解, 这时子问题 [3] 已探明。再解
问题 [4] 对应的松弛问题, 可得: $x^4 = (1, 1, \frac{1}{2}, 0, 1)$, $f_4 = 16\frac{1}{2}$ 。
 x^4 仍不是问题 [4] 的解, 但其最大值 $f_4 = 16\frac{1}{2} < f_3 = 17$ 。所
以问题 [4] 也不用再分支了, 于是问题 [4] 也已探明。

上述分枝过程用树形图表示。如下图:

做到这里, 我们总结一
下解一个子问题的松弛问题
时, 可能碰到的几种情况和
处理方法:



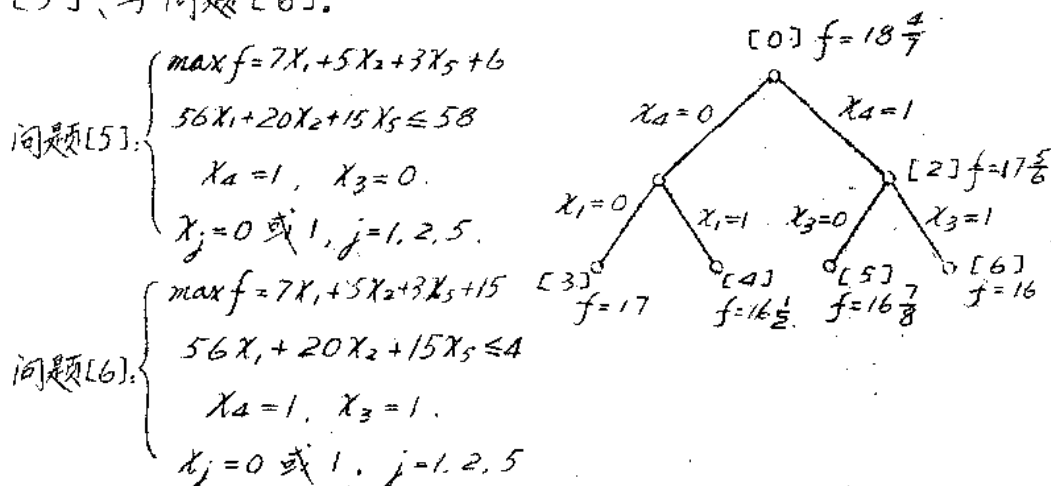
i. 对应的松弛问题无
解, 则该子问题也无解。这时, 这个子问题不必再分枝做下去。
该子问题已探明。探明的子问题在树形图中画一横线。

ii. 对应的松弛问题的解, 恰是该子问题的解。这是就求
得该子问题的最优解。这时, 亦无必要从这个子问题再进行分
枝了, 因为它的子问题的最优值决不会超过这个最优值。这时,
该子问题也已探明。例如: 问题 [3] 的解已求得, 则问题 [3]

已探明，并用 $f_3 = 17$ 代替 $\bar{f}_0 = 0$ ，改为下界。

iii. 对应的松弛问题的解不是这个子问题的解。则当其目标值大于现有最好下界时，该子问题继续分枝。而当其目标值不超过现有最好下界时，则该子问题也已探明。这时，称它为剪枝。例如：问题 [4] 的最优值 $f_4 < f_3$ ，则可剪枝。将问题 [4] 标明已探明。

现在，再看问题 [2]，可求其松弛问题的解为： $x^2 = (0, 1\frac{5}{8}, 1, 1)$ ， $f_2 = 17\frac{5}{8} > f_3$ 。所以，将问题 [2] 分枝。分枝方法仍根据取非整数值的 x_3 取 0 或 1 来进行。分别令 $x_3 = 0$ 或 1，得子问题 [5]、子问题 [6]。



由于 $x^5 = (\frac{23}{56}, 1, 0, 1, 1)$ ， $f_5 = 16\frac{7}{8} < f_3 = 17$ ，

所以，可剪枝。问题 [6] 也已探明。至此全部子问题均已探明，从而求得原问题 [0] 的解就是 $x^3 = (0, 1, 1, 0, 1)$ ，而 $f_3 = 17$ 。解题过程可用树形图表示如上图。

如果我们用完全枚举法，就要试 $2^5 = 32$ 次才能得出结果。由此例可以看出，对于这类问题，关键首先在于如何确定原问题的松弛问题，而松弛问题有比较有效的解法。其次，就是如何确定分枝的规则，能将原问题分枝为两个子问题。最后，在

求解过程中，要不断考虑能否修改下界（是界）以便于剪枝。如果所有子问题都已探明，就可以获得原问题的解。

下面，我们再看如何应用这一思想来解一般的整数线性规划问题。

例2：

$$(L_0) \begin{cases} \max f = x_1 + x_2 & \dots\dots (1) \\ x_1 + \frac{9}{14}x_2 \leq \frac{51}{14} & \dots\dots (2) \\ -2x_1 + x_2 \leq \frac{1}{3} & \dots\dots (3) \\ x_1, x_2 \geq 0 & \dots\dots (4) \\ x_1, x_2 \text{ 均为整数} & \dots\dots (5) \end{cases}$$

满足约束(2)、(3)、(4)的解区域如图1中的R（图中阴影部分）。而原问题(L₀)的解只是R的一个子集 $\bar{R}$ （图1中 $\bar{R}$ 标以黑点），(L₀)显然有解 $x^0 = (0, 0)$ ， $f_0 = 0$ 是(L₀)最优解的下界。我们把去掉约束(5)后的问题做为(L₁)的松弛问题。利用单纯形方法，可以求得此松弛问题的解。

$$x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_2 = \frac{10}{3}, \quad \max f = \frac{29}{6} \quad (\text{图中A点})$$

但这个解不是原问题(L₀)的解。可以设想，解求最优解，距A不太远，对于 $x_1 = \frac{3}{2}$ ，最靠近 $\frac{3}{2}$ 的整数是1和2，所以我们可以考虑下面的两个子问题：

$$(L_1) \begin{cases} \max f = x_1 + x_2 \\ x_1 + \frac{9}{14}x_2 \leq \frac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \leq \frac{1}{3} \\ 2 \leq x_1, \quad 0 \leq x_2 \\ x_1, x_2 \text{ 为整数} \end{cases}$$

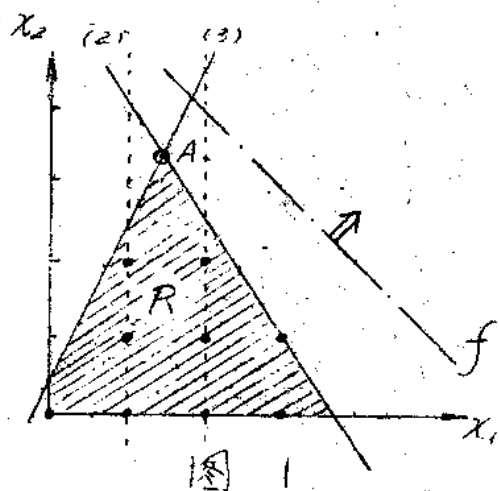


图 1

$$(L_2) \begin{cases} \max f = x_1 + x_2 \\ x_1 + \frac{9}{14} x_2 \leq 5\frac{1}{14} \\ -2x_1 + x_2 \leq \frac{1}{3} \\ 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \\ x_1, x_2 \text{ 为整数} \end{cases}$$

问题 (L_1) 和 (L_2) 的解集分别记为 $\bar{R}_1$ 和 $\bar{R}_2$ 。显然 $\bar{R} = \bar{R}_1 \cup \bar{R}_2$ ，因为没有丢掉任一整数解。

再求解 (L_1) 和 (L_2) 的松弛问题（即去掉两问题中的整数约束）。并记其相应的可行解集为 R_1 和 R_2 （图2），可得 (L_1) 和 (L_2) 的松弛问题的最优解分别为

$$x' = (2, \frac{23}{9})$$

$$\max f = 4\frac{1}{9} \text{ (图2中点B)}$$

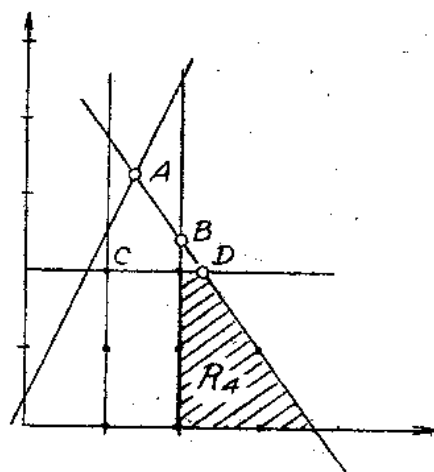
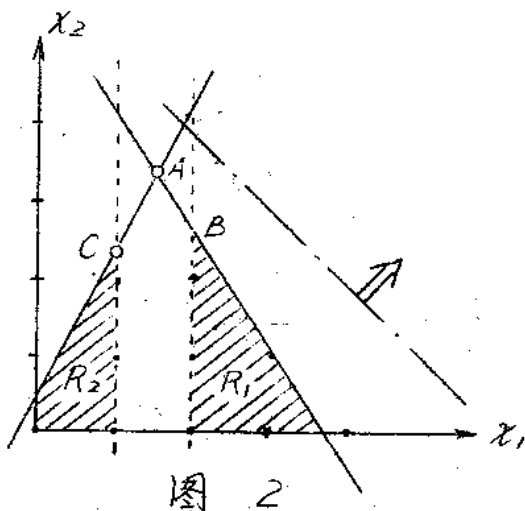
$$x'' = (1, \frac{7}{3})$$

$$\max f = \frac{10}{3} \text{ (图2中点C)}$$

最优解均大于现有下界 $f_0 = 0$ ，需继续分枝。由 $x'_2 = \frac{23}{9}$ ，知 $2 \leq x_2 \leq 3$ ，则可将问题 (L_1) 分枝为：

$$(L_3) \begin{cases} \max f = x_1 + x_2 \\ x_1 + \frac{9}{14} x_2 \leq 5\frac{1}{14} \\ -x_1 + x_2 \leq \frac{1}{3} \\ 2 \leq x_1, 3 \leq x_2 \\ x_1, x_2 \text{ 为整数} \end{cases}$$

$$(L_4) \begin{cases} \max f = x_1 + x_2 \\ x_1 + \frac{9}{14} x_2 \leq 5\frac{1}{14} \\ -2x_1 + x_2 \leq \frac{1}{3} \\ 2 \leq x_1, 0 \leq x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \text{ 为整数} \end{cases}$$



解 (L_3) 的松弛问题, 知其无解。于是 (L_3) 也无解。问题 (L_3) 已探明。再解 (L_4) 的松弛问题(记其可行解集为 R_4), 得最优解 $x^4 = (33/4, 2)$, $\max f = 61/4$ 。仍不是 (L_4) 的解, 需继续分枝。

由于 $61/4 > 10/3$, 所以原问题最优解可能在 D 点附近, 所以继续从 (L_4) 分枝。否则应回到 C 点, 从 (L_2) 分枝。

类似于前面, (L_4) 可分枝为:

$$(L_5) \left\{ \begin{array}{l} \max f = x_1 + x_2 \\ x_1 + \frac{9}{14}x_2 \leq 51/4 \\ -2x_1 + x_2 \leq 1/3 \\ 2 \leq x_1, x_2 \leq 2, x_1 \leq 2 \\ x_1, x_2 \text{ 为非负整数} \end{array} \right.$$

$$(L_6) \left\{ \begin{array}{l} \max f = x_1 + x_2 \\ x_1 + \frac{9}{14}x_2 \leq 51/4 \\ -2x_1 + x_2 \leq \frac{1}{3} \\ 2 \leq x_1, x_2 \leq 2, 3 \leq x_1 \\ x_1, x_2 \text{ 为非负整数} \end{array} \right.$$

记 (L_5) 和 (L_6) 的松弛问题的可行解集分别为 R_5 和 R_6 , (如图)。又可求得其最优解分别为:

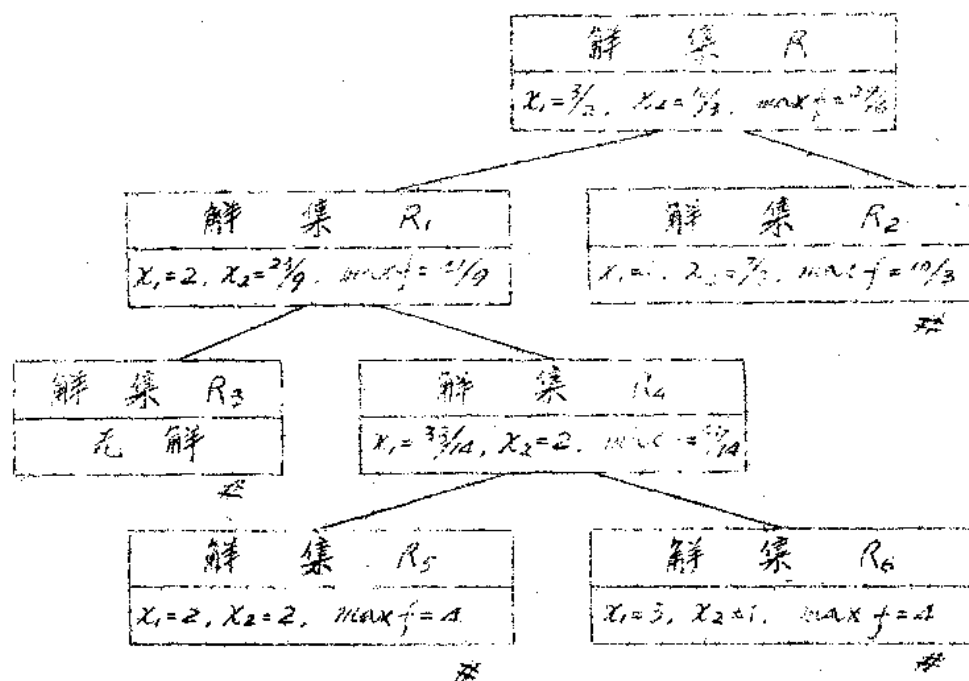
$$x^5 = (2, 2) \quad \max f = 4 \quad (\text{图中E点})$$

$$x^6 = (3, 1) \quad \max f = 4 \quad (\text{图中F点})$$

于是 (L_5) , (L_6) 的最优解也是 $x^5 = (2, 2)$ 和 $x^6 = (3, 1)$ 这两个子问题也已探明。而原问题的下界($f_0 = 0$)可重新订为 $f_5 = 4$ 。

最后, 对于子问题 (L_2) , 由于 $4 > 10/3$, 所以可以剪枝。子问题 (L_2) 也已探明。至此, 全部子问题均已探明, 故

$x^5 = (2, 2)$ 和 $x^6 = (3, 1)$ 是原问题的解。其求解全部过程可用树形图表示如下：



§1.3 整数规划的解法(二)——割平面法

考虑整数线性规划问题：

$$(ILP) \begin{cases} \min CX \\ AX = b \\ x \geq 0, \quad x_j \text{ 为整数, } (j=1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

我们可以先解其对应的线性规划问题：

$$(LP) \begin{cases} \min CX \\ AX = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

如果问题 (LP) 的基本最优解恰好是整数解，则也求得了原问题 (ILP) 的整数解。若问题 (LP) 的基本最优解不全为整数时，我们就设法对于 (LP) 增加一个约束条件，使得这个