



AutoLISP

机械工程CAD 应用与开发

肖世德 熊 鹰 王小强 编著

西南交通大学出版社

711122

机械工程 CAD 应用与开发

肖世德 熊 鹰 王小强 编著

此书由西南交通大学出版基金资助

西南交通大学出版社

· 成 都 ·

内 容 简 介

本书以 AutoCAD 2000 为基础,全面地介绍了 AutoCAD 的二次开发技术,着重介绍了 AutoLISP 语言在机械工程 CAD 参数化设计绘图中的应用。主要包括:二维图形学理论基础、AutoCAD 交互式绘图、Visual LISP 参数化绘图、AutoLISP 图形数据库操纵、菜单与对话框界面设计、ObjectARX 及 ActiveX/VBA 开发技术。并结合工程实际介绍了这些技术在冲压模具 CAD 系统和蛇形管 CAD/CAM 系统中的应用。

本书实例丰富,工程实用性强,可作为在校师生和相关设计人员的参考书。

图书在版编目 (C I P) 数据

机械工程 CAD 应用与开发 / 肖世德, 熊鹰, 王小强编著. — 成都: 西南交通大学出版社, 2002.2
ISBN 7-81057-626-7

I. 机... II. ①肖... ②熊... ③王... III. 机械设计: 计算机辅助设计—应用软件, AutoCAD 2000
IV. TH122

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2002) 第 002050 号

机械工程 CAD 应用与开发

肖世德 熊 鹰 王小强 编著

*

出 版 人 宋绍南

责任编辑 李 蕾 秦 薇

封面设计 肖 勤

西南交通大学出版社出版发行

(成都二环路北一段 111 号 邮政编码: 610031 发行科电话: 7600564)

<http://press.swjtu.edu.cn>

E-mail: cbs@center2.swjtu.edu.cn

西南冶金地质印刷厂印刷

*

开本: 787 mm × 1092 mm 1/16 印张: 17.5

字数: 411 千字 印数: 1—1500 册

2002 年 2 月第 1 版 2002 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 7-81057-626-7/TH·280

定价: 25.00 元

前 言

目前,计算机辅助设计(Computer Aided Design 简称 CAD)在各国的制造业中已得到广泛应用。经过 10 多年的努力,我国的机械制造业也已经普及了 CAD 绘图技术,实现了“甩图板”的目标。现在工程界普遍缺乏掌握 CAD 二次开发的人才,因而让广大工程技术人员进一步掌握 CAD 开发技术很有必要。在现有的微机 CAD 软件中,美国 Autodesk 公司的 AutoCAD 以其强大的图形编辑和处理功能、开放性结构以及良好的性价比,获得了极大的市场优势,是主要的 CAD 开发平台之一。

本书全面介绍了 AutoCAD 2000 二次开发技术,着重介绍了 AutoLISP 语言在机械工程 CAD 参数化设计绘图中的应用。主要内容包括:二维图形学理论基础、AutoCAD 交互式绘图、Visual LISP 参数化绘图、AutoLISP 图形数据库操纵、菜单与对话框界面设计、ObjectARX 及 ActiveX/VBA 开发技术。在此基础上结合工程实际介绍了这些开发技术在冲压模具 CAD 系统和蛇形管 CAD/CAM 系统中的应用。在附录中列出了 Visual LISP 的常用函数及其简要说明,可作为开发时的参考资料查阅。

本书具有以下特点:

1. 以二维 CAD 图形参数化程序绘图为重点,结合中国制造业广大工程技术人员迫切需要的掌握参数化 CAD 开发技术的现实需求,对于解决企业普遍存在的系列产品设计问题及减少重复、相似性绘图劳动的意义重大。

2. 编写自成体系,特别是第 1 章列出的计算机二维图形学基础理论,内容十分简明扼要,有利于工程设计绘图人员掌握计算机二维绘图技术原理。

3. 深度和广度适当,例子丰富而典型,多数采用作者自己的教学科研开发成果作例子,用示例来深入阐述参数化 CAD 开发的思路。

本书包含了丰富的实例,清晰易懂,工程实用性强,对在校师生和设计人员均具有很好的参考价值。书中实例均在 AutoCAD 2000 下调试通过。

编 者
2001 年 3 月

目 录

第 1 章 计算机二维图形学理论基础	1
1.1 图形分类与图形标准	1
1.1.1 图形分类	1
1.1.2 图形标准	2
1.2 基本图形元素的参数表达	4
1.2.1 点	4
1.2.2 线段	5
1.2.3 圆与圆弧	5
1.2.4 矩形与椭圆	6
1.2.5 样条曲线	6
1.2.6 平面	10
1.2.7 文本	10
1.3 基本图形元素求交算法	10
1.3.1 线段与线段求交	11
1.3.2 线段与圆弧(圆)求交	11
1.3.3 圆弧与圆弧求交	12
1.3.4 直线与平面求交	12
1.4 点的运算	13
1.4.1 点与点	13
1.4.2 点与直线	15
1.4.3 点与圆、圆弧	16
1.4.4 点与矩形	17
1.4.5 线与矩形(直线剪裁)	17
1.4.6 线与面(剖面形、填充)	18
1.5 综合应用实例——GKS2D 通用函数库与解析曲线做图	18
第 2 章 AutoCAD 交互绘图	25
2.1 AutoCAD 与计算机绘图	25
2.1.1 AutoCAD 的发展	25
2.1.2 AutoCAD 2000 的新功能	26
2.1.3 计算机绘图的特点	27

2.2 AutoCAD 界面与交互操作	28
2.2.1 命令输入方式	29
2.2.2 坐标输入方式	30
2.2.3 特征点分类	30
2.2.4 距离位移角度输入	31
2.2.5 选择集输入方式	31
2.2.6 反馈信息表达方式	32
2.3 图形绘制	32
2.3.1 绘图环境和属性设置	33
2.3.2 基本几何图形绘制	38
2.4 图形变换与编辑	48
2.5 AutoCAD 2000 新功能的使用	53
2.5.1 设计中心	53
2.5.2 对象特性管理器	54
2.6 总结	54
第 3 章 Visual LISP 参数化绘图	56
3.1 AutoLISP 语言概述	56
3.2 AutoLISP 程序结构	58
3.2.1 变量、常量和数据类型	58
3.2.2 运算符和表达式	59
3.2.3 函数和子程序	59
3.2.4 程序控制语句	61
3.2.5 字符串处理函数	64
3.2.6 表处理函数	66
3.3 交互输入函数和图形程序设计	67
3.3.1 图形处理函数	67
3.3.2 交互输入输出函数	68
3.4 Visual LISP 开发	72
3.4.1 Visual LISP 的界面	73
3.4.2 装载和运行程序	74
3.4.3 调试程序	74
3.4.4 创建应用程序	76
3.4.5 维护应用程序	81
3.5 参数化绘图实例	85
第 4 章 AutoLISP 图形数据库操纵	103
4.1 DXF 文件格式	103
4.1.1 DXF 文件的一般格式	103

4.1.2 组码和组值	103
4.1.3 标题段 (Header Section)	106
4.1.4 表段 (Tables Section)	106
4.1.5 块段 (Blocks Section)	106
4.1.6 实体段 (Entities Section)	109
4.2 选择集的构造与操纵函数	114
4.3 实体操作函数	115
4.4 图形数据库操纵程序实例	116
4.5 大型程序开发实例	120
第 5 章 AutoCAD 用户化与界面开发	135
5.1 绘图环境和用户标准库的用户化	135
5.1.1 线型文件	135
5.1.2 图案填充文件	136
5.1.3 型模文件	138
5.1.4 典型环境执行文件 ACAD.pgp	140
5.1.5 命令文件	141
5.1.6 幻灯片文件	141
5.2 菜单界面的二次开发	143
5.2.1 菜单文件的结构	143
5.2.2 下拉菜单	145
5.2.3 光标菜单	146
5.2.4 屏幕菜单	147
5.2.5 按钮、辅助菜单	147
5.2.6 图标菜单	147
5.2.7 菜单的加载	148
5.3 对话框界面的二次开发	148
5.3.1 对话框定义文件	149
5.3.2 对话框驱动程序	153
5.3.3 对话框示例	154
第 6 章 ARX 及 VBA 二次开发	166
6.1 ObjectARX	166
6.1.1 ObjectARX 简介	166
6.1.2 ObjectARX 编程实例	167
6.2 ActiveX Automation	171
6.3 AutoCAD VBA 简介	172
第 7 章 机械 CAD 系统应用实例	180

7.1 典型冲压模具 CAD 系统	180
7.1.1 菜单设计	181
7.1.2 图形环境初始化	182
7.1.3 绘制工作图	184
7.1.4 选择并计算参数	184
7.1.5 绘制装配图	185
7.1.6 绘制零件图	192
7.2 蛇形管 CAD/CAM 系统	206
7.2.1 系统菜单设计	206
7.2.2 应用程序设计	207
7.2.3 对话框设计	233
附录 A Visual LISP 函数参考	237
A.1 基本函数	237
A.2 实用函数	247
A.3 选择集、对象和符号表函数	253
A.4 内存管理函数	254
A.5 Visual LISP 扩展函数	255
A.6 反应器函数	257
A.7 VLX 变量空间函数	259
A.8 DCL 函数	260
附录 B AutoCAD 2000 命令浏览表	261
参考文献	272

第1章 计算机二维图形学理论基础

CAD 是研究在计算机上对图形、图像进行生成 (Creating)、构筑 (Constructing)、变换 (Transform)、显示 (Display)、修改 (Modify)、编辑 (Edit)、更新 (Update) 和管理 (Manage) 的科学。

无论二维 (2D)、三维 (3D) 图形, 从构成层次来讲, 可归纳为点、线、面、体四个层次。二维图形无论多么复杂, 其基本构成要素仍为线段、圆、圆弧、样条曲线和文本。三维实体 (零件和装配体) 从构筑方法来讲, 分两种: 一种是“从顶向下”的方法, 实体由基本体素 (标准体素 Primitive) 经过布尔运算 (交、并、差) 生成, 即构筑几何表达 (CSG); 另一种是“从底到顶”的方法, 按点—线架 (Wireframe)—截面 (Section Profile)—实体—曲面 (Solid Surface) 顺序构成, 即表面表达方法 (Brep)。

本章简要论述坐标点 (Point)、线段 (Line、Polyline)、圆弧 (Arc、Circle)、矩形 (Rectangle、Viewport、Window)、样条曲线 (Spline)、平面 (Plane、Facet) 这些图形学基本元素的相互关系与算法, 它们是计算机图形学 (CG) 的理论基础。

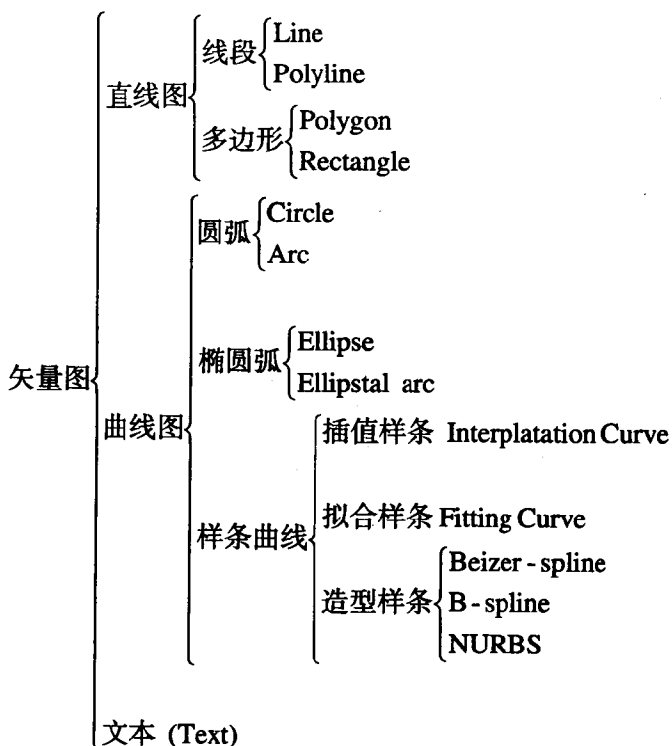
1.1 图形分类与图形标准

1.1.1 图形分类

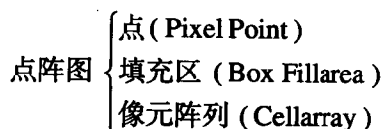
对人类而言, “一幅图胜过万语千言”, 人们通常更擅长形象的、直观的思维 (识别、判断、选择), 而计算机本质上就是一个 0、1 的数值机器, 它的长处在于数值运算快、存储量大、表达精确, 因此作为人机结合的交互式 CAD 软件, 在计算机内进行的是 0、1 数值运算与存储操作, 而对外则必须化为图形方式输入、输出与显示。扫描仪的输入, 显示器、打印机的输出是光栅点阵图形 (Image), 绘图机输出的是线画矢量图形 (Vector)。点阵图生成容易, 但不便检索修改, 存储量大; 矢量图则便于修改检索和参数化, 数据库存储量少。计算机图形学研究的就是点阵图、矢量图与数值的相互关系和相互变换。对于设计工程师而言, 重点是矢量图形, 点阵图形主要应用于艺术动画仿真制作。

1. 矢量图

矢量图可划分如下:



2. 点阵图可划分如下



1.1.2 图形标准

由于设计工程师从事的领域不同,如机械、建筑、艺术、电气、土木等,以及图形设备种类不同,对图形分类就千差万别,尤其在子类图形分类上。为此提出了图形分类与表达的标准化问题。

20 世纪 80 年代以来,国际标准化组织 ISO 先后宣布了 GKS、GKS3D、PHIGS、CGI、IGES、STEP 图形标准。另外 Autodesk 公司的 DXF 亦成为事实上的工业图形交换标准。

(1) GKS

GKS 图形标准把图形分为 6 个类别,如图 1.1 所示:

- ▶ 多点折线 Polyline;
- ▶ 多点记号 Polymarker;
- ▶ 文本 Text;
- ▶ 填充区 Fillarea;

- ▶ 像元阵列 Cellarray;
- ▶ 广义图形元素 GDP (General Drawing Primitive) 如圆、圆弧、椭圆、样条等。

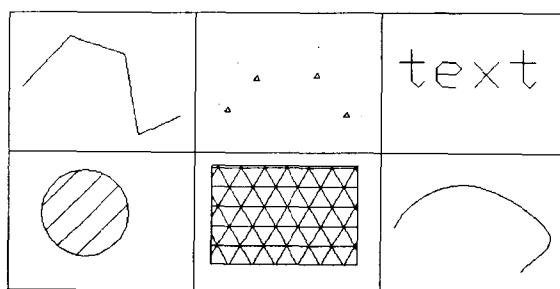


图 1.1 GKS 六种基本图元

(2) AutoCAD

AutoCAD 把图形分成以下几类来绘制:

- ▶ 点 Point, 可绘记号 Marker, 可以是 3D 点;
- ▶ 线段 Line, 实质上是多点折线 Polyline, 可以是 3D 线;
- ▶ 圆 Circle, 提供 6 种画圆方式;
- ▶ 圆弧 Arc, 提供 11 种画圆弧方式;
- ▶ 多义线 Pline, 画线、圆弧、样条及其组合, 包括圆环 Donut、椭圆 Ellipse、正多边形 Polygon;

- ▶ 文本 Text;
- ▶ 轨迹 Trace;
- ▶ 实心面 Solid;
- ▶ 块 Block;
- ▶ 属性 Attribute;
- ▶ 尺寸 Dimension;
- ▶ 阴影线图案 Hatch;
- ▶ 形 Shape;
- ▶ 三维面 3DFace Pface;
- ▶ 三维网 3Dmesh;
- ▶ 规则曲面 Rulesurf、Tabsurf、Revsurf、Edgesurf。

(3) I-DEAS

I-DEAS Drafting 把图形分成以下几类绘制:

- ▶ 点 Point;
- ▶ 线段 Line, 可以是有限或无限线;
- ▶ 圆 Circle, 可绘同心圆;
- ▶ 圆弧 Arc;
- ▶ 椭圆 Ellipse;
- ▶ 矩形 Rectangle;
- ▶ 样条 Spline;

- 文本 Annotation;
- 尺寸 Dimension;
- 符号 Symbol, 包括属性 BOM。

本章只论述以下最基本图形元素的表达及相互关系:

- 点 Point;
- 线段 Line, 限两点式;
- 圆弧 Arc, 含 360° 圆 Circle;
- 矩形 Rectangle, 限正则矩形;
- 样条 Spline, 限 2-3 阶插值、拟合与造型样条 (Beizer 和 B 样条);
- 文本 Text, 限单行文本;
- 平面 Plane, 限有界平面。

1.2 基本图形元素的参数表达

基本图形表达方式有直角坐标式 $y=f(x)$ 、 $f(x, y)=0$, 极坐标式 $P=\rho(\theta)$, 圆柱坐标和球坐标式。推荐采用参数表达方式, 即

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases} \quad t \in [t_s, t_e]$$

因为采用参数方程表达方式, 可以

- ① 方便地处理多分支、多值、自封闭、自交图形 (如圆、叶形图等)。
- ② 以参数 t 作为循环变量, 生成细小折线片段和曲面片可获得较均匀的长度和变化率, 所拟合图形很形似, 没有不均匀台阶形状。
- ③ 便于处理切矢、法矢为 0、 ∞ 的情况。
- ④ 选择与坐标系无关的 t 参数, 可以使得图形生成具有几何不变性 (样条曲线)。
- ⑤ 对曲线、曲面可以控制很多自由度, 实现坐标变量独立求解。

极坐标、圆柱坐标、球坐标方程可转化成参数方程, 如极坐标方程

$$P=\rho(\theta) \Rightarrow \begin{cases} x=\rho(\theta)\cos\theta \\ y=\rho(\theta)\sin\theta \end{cases} \quad \theta \in [\theta_s, \theta_e]$$

对于直角坐标方程, 可以设法使 t 归一化

$$\begin{cases} x=x(t)=x_s+Ht \\ y=f(x(t))=y(t) \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

1.2.1 点

点有两个自由度 (x, y) 。给定坐标 x, y , 即确定一个点。

1.2.2 线段

$$p = p_1 + (p_2 - p_1)t$$

即

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

线段参数方程本质上是两点式, 即已知两点坐标 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2)

若采用 $Ax + By + C = 0$ 方式, 则有

$$A = y_2 - y_1$$

$$B = x_1 - x_2$$

$$C = -x_1A - y_1B$$

线段共有 4 个自由度。

1.2.3 圆与圆弧

已知: 圆心 (x_c, y_c) , 半径 R , 始角 θ_s , 末角 θ_e (对于圆: $\theta_s = 0$, $\theta_e = 2\pi$)

参数方程

$$\begin{cases} x = x_c + R \cos t \\ y = y_c + R \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi] \text{ (圆)}, \quad t \in [\theta_s, \theta_e] \text{ (圆弧)}$$

解析方程

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$$

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

圆有三个自由度 (x_c, y_c, R) , 圆弧有五个自由度 $(x_c, y_c, R, \theta_s, \theta_e)$ 。

一般规定圆弧为逆时针方向, 角度逆时针为正。也可采用 $(x_c, y_c, R, \theta_s, \Delta\theta)$ 方式, $\Delta\theta$ 参数的符号代表圆弧张角和走向。

① 对于用两点方式给定的圆, 则

已知圆心 (x_c, y_c) , 圆上一点 (x_e, y_e) , 半径对应 $R = \sqrt{(x_e - x_c)^2 + (y_e - y_c)^2}$

已知直径两端点 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) , 对应

$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_c = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad R = \frac{1}{2} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

② 对于用圆周上三点给定的圆、圆弧, 则

已知 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) 、 (x_3, y_3) 对应方程组

$$\begin{cases} (x_1 - x_c)^2 + (y_1 - y_c)^2 = R^2 \\ (x_2 - x_c)^2 + (y_2 - y_c)^2 = R^2 \\ (x_3 - x_c)^2 + (y_3 - y_c)^2 = R^2 \end{cases}$$

由此解出 (x_c, y_c, R) , 若三点不共线肯定有解。

且

$$\theta_s = \text{atan2}(y_1 - y_c, x_1 - x_c), \quad \theta_e = \text{atan2}(y_3 - y_c, x_3 - x_c)$$

1.2.4 矩形与椭圆

它们有五个自由度, 即: 定位点 (x_1, y_1) , 长 L , 宽 W 和定位角 θ_0 (对于正放的矩形 $\theta_0 = 0$)。矩形由四条线段构成。对于正放矩形, 已知左下角和右上角顶点坐标: (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) , 有

$$\begin{cases} \text{长度 } L = (x_2 - x_1) \\ \text{宽度 } W = (y_2 - y_1) \\ \text{倾角 } \theta_0 = 0 \end{cases}$$

矩心

$$\begin{cases} x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}, \\ y_c = \frac{y_1 + y_2}{2}, \end{cases}$$

相应的椭圆方程

$$\begin{cases} x = x_c + A \cos(t + \theta_0) \\ y = y_c + B \sin(t + \theta_0) \end{cases}$$

式中 $\begin{cases} x_c = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y_c = \frac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}; A = \frac{L}{2}; B = \frac{W}{2};$

由于正放矩形与视口、窗口的一致性, 我们以后只讨论正放矩形, 并略去“正放”定语。

1.2.5 样条曲线

曲线一般由点列决定, 已知点列: (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$ 和边界条件:

- ▶ 自由边界 $y_1'' = 0$ $y_n'' = 0$
- ▶ 固定边界 $y_1' = a$ $y_n' = b$
- ▶ 铰支边界 $y_1'' = 0$ $y_n'' = 0$

若要求曲线通过点列, 则为插值样条; 若要求曲线与点列误差最小, 则为拟合样条; 若要求曲线贴近点列构成多边形, 则为造型样条。

工程上一般要求样条有 C^0 、 C^1 、 C^2 阶连续性, 采用分片三阶多项式参数方程可以满足 C^2 连续, 且多项式便于处理, 不存在高次误差和振荡。即

$$\rho(t) = \vec{A}_0 + \vec{A}_1 t + \vec{A}_2 t^2 + \vec{A}_3 t^3 \quad t \in [0, 1]$$

一般地, 已知点列坐标 (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$, 可按如下流程绘出多折线:

moveto (x_1, y_1)

for ($i=2; i \leq n; i++$) {

 lineto (x_i, y_i);

}

lineto (x_1, y_1) // 若要求闭合

当点列很密时, 上述多折线就是函数曲线。

对于插值、拟合、造型来讲, 核心就是如何根据稀疏的点列, 按照 C^0 、 C^1 、 C^2 连续要求, 求出 A_0 、 A_1 、 A_2 、 A_3 , 再求出点列绘图。

有关样条理论及公式推导参见文献 [1]、[2], 下文只给出有关结论。

1. 点点通过的插值样条

① 已知两点 P_0 、 P_1 , 有直线样条

$$P(t) = f_0 P_0 + f_1 P_1 = \text{TMP}$$

$$\text{式中, } f_0 = 1-t; f_1 = t; T = [t \ 1]; M = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; P = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \end{bmatrix}$$

② 已知三点 P_0 、 P_1 、 P_2 , 有抛物线样条

$$P(t) = f_0 P_0 + f_1 P_1 + f_2 P_2 = \text{TMP}$$

$$\text{式中, } f_0 = 2t^2 - 3t + 1; f_1 = 4t - 4t^2; f_2 = t - 2t^2。$$

$$T = [t^2 \ t \ 1]; M = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; P = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}。$$

对于点列 P_0 、 P_1 , $\dots$, P_n 采用加权合成法、生成 $n-2$ 段抛物曲线, 达到 C^1 连续。

$$P_{i+1}(t) = f_i P_i + f_{i+1} P_{i+1} + f_{i+2} P_{i+2} + f_{i+3} P_{i+3} \quad i=0, 1, \dots, n-3$$

$$\text{式中, } f_i = -4t^3 + 4t^2 - t; f_{i+1} = 12t^3 - 10t^2 + 1; f_{i+2} = -12t^3 + 8t^2 + t; f_{i+3} = 4t^3 - 2t^2; t \in [0, 0.5]。$$

首末段根据边界条件要求可以补点生成。

③ 已知两点及其切矢 P_0 、 P_1 、 P'_0 、 P'_1 , 有三次样条:

$$P(t) = f_0 P_0 + f_1 P_1 + f_2 P'_0 + f_3 P'_1 = \text{TMP}$$

$$\text{式中, } f_0 = 2t^3 - 3t^2 + 1; f_1 = -2t^3 + 3t^2; f_2 = t^3 - 2t^2 + t; f_3 = t^3 - t^2;$$

$$T = [t^3 \ t^2 \ t \ 1]; M = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; P = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P'_0 \\ P'_1 \end{bmatrix}。$$

对于点列 P_0 、 P_1 , $\dots$, P_n , 可根据 C^2 条件, 求出切矢 P'_i :

$$P'_{i-1} + 4P'_i + P'_{i+1} = 3(P_{i+1} - P_{i-1}) \quad i=1, 2, \dots, n-1$$

补充两个端点条件, 构成三对角方程求解。

固定端 P'_0 、 P'_n 已知,

$$\begin{aligned} \text{悬臂端} \quad & P'_0 + P'_1 = 2(P_1 - P_0) \\ & P'_n + P'_{n-1} = 2(P_n - P_{n-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{铰支端} \quad & 2P'_0 + P'_1 = 3(P_1 - P_0) \\ & P'_{n-1} + 2P'_n = 3(P_n - P_{n-1}) \end{aligned}$$

2. 误差平方和最小的拟合样条

已知点列 (x_i, y_i) , $i=0, \dots, n$

① 拟合直线 $y = a_0 + a_1x$, $x \in [x_0, \dots, x_n]$

$$\begin{cases} a_0 \sum_{i=0}^n x_i + a_1 n = \sum_{i=0}^n y_i \\ a_1 \sum_{i=0}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=0}^n x_i = \sum_{i=0}^n x_i y_i \end{cases}$$

② 拟合抛物线 $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i & n \\ \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i^4 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i \end{bmatrix}$$

③ 拟合三次样条 $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i & n \\ \sum_{i=0}^n x_i^4 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i^5 & \sum_{i=0}^n x_i^4 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^2 \\ \sum_{i=0}^n x_i^6 & \sum_{i=0}^n x_i^5 & \sum_{i=0}^n x_i^4 & \sum_{i=0}^n x_i^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i^3 y_i \end{bmatrix}$$

线性方程组可用列主元 Gauss 消元法求解。

3. 控制顶点多边形的造型样条

① 二次 Beizer 样条

已知 P_0, P_1, P_2 , 有

$$P(t) = f_0 P_0 + f_1 P_1 + f_2 P_2 = \text{TMP}$$

式中, $f_0 = (1-t)^2$; $f_1 = 2t(1-t)$; $f_2 = t^2$;

$$T = [t^2 \quad t \quad 1]; \quad M = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad P = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}.$$

性质 以 P_0, P_2 为始、末点, 起始向切于 $P_1 - P_0, P_2 - P_1$, 过 $\Delta P_0 P_1 P_2$ 中线 $P_1 P_m$ 中点的抛物线。

② 三次 Beizer 样条, 如图 1.2 所示。

已知 P_0 、 P_1 、 P_2 、 P_3 , 有

$$P(t) = f_0 P_0 + f_1 P_1 + f_2 P_2 + f_3 P_3 = \text{TMP}$$

式中, $f_0 = (1-t)^3$; $f_1 = 3t^2(1-t)$; $f_2 = 3t(1-t)^2$,
 $f_3 = t^3$;

$$T = [t^3 \ t^2 \ t \ 1]; M = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; P = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}。$$

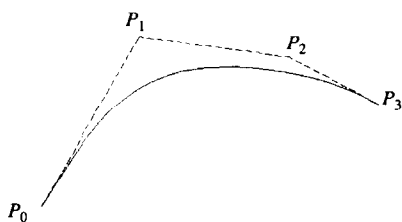


图 1.2 三次 Beizer 样条

性质 过始点 P_0 、末点 P_3 。

③ 二次 B 样条 (均匀)

$$P(t) = f_0 P_0 + f_1 P_1 + f_2 P_2 = \text{TMP}$$

式中, $f_0 = \frac{1}{2}(t-1)^2$; $f_1 = \frac{1}{2}(-2t^2 + 2t + 1)$; $f_2 = \frac{1}{2}t^2$;

$$T = [t^2 \ t \ 1]; M = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; P = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}。$$

性质 以 P_0P_1 边和 P_1P_2 边中点 $P_{1m}P_{2m}$ 为始末, 切矢为边 $P_1 - P_0$ 、 $P_2 - P_1$ 。P/2 过 $\Delta P_{1m}P_{2m}$ 的中线中点, 且切矢为 $P_{2m}P_{1m}$ 的抛物线, 显然由 m 个顶点定义 $m-2$ 段抛物线自动实现 C^1 连续。

④ 三次 B 样条 (均匀)

$$P(t) = f_0 P_0 + f_1 P_1 + f_2 P_2 + f_3 P_3 = \text{TMP}$$

式中, $f_0 = (t^3 + 3t^2 - 3t + 1)/6$; $f_1 = (3t^3 - 6t^2 + 4)/6$; $f_2 = (-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1)/6$; $f_3 = t^3/6$;

$$T = [t^3 \ t^2 \ t \ 1]; M = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}; P = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}。$$

性质 始点 P_0 位于 $\Delta P_0P_1P_2$ 底边 P_0P_2 的中线 P_1P_m 上距 P_1 点 $1/3$ 处, 切矢 $p'_{(0)}$ 平行于底边且长为 $(P_2 - P_0)/2$, $P'_{(0)}$ 为中线矢量 P_1P_m 的 2 倍。终点类似。

以上公式中 $t \in [0, 1]$ 。

若要求 B 样条通过点列 Q , 则反求控制多边形 P 有

$$P_i + 4P_{i+1} + P_{i+2} = 6Q_i \quad i = 0, 1, \dots, n-2$$

另外补充两个端点条件方程 (给定位置、切矢、曲率等) 构成三角方程求解。显然由 m 个顶点定义 $m-3$ 阶三次 B 样条自动实现 C^2 连续。