钟锡华　汤卫东　编著

电磁学题解指导

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

电磁学题解指导

钟锡华　汤卫东　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

电磁学题解指导/钟锡华，汤卫东编著．—北京：北京大学出版社，2016.10

ISBN 978-7-301-27686-0

Ⅰ.①电…　Ⅱ.①钟…②汤…　Ⅲ.①电磁学—高等学校—题解
Ⅳ.①O441-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第255942号

书　　名　电磁学题解指导
DIANCIXUE TIJIE ZHIDAO

著作责任者　钟锡华　汤卫东　编著

责任编辑　顾卫宇

标准书号　ISBN 978-7-301-27686-0

出版发行　北京大学出版社

地　　址　北京市海淀区成府路205号　100871

网　　址　http://www.pup.cn

电子信箱　zpup@pup.cn

电　　话　邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62754271

印 刷 者　北京大学印刷厂

经 销 者　新华书店

890毫米×1240毫米　A5　9.125印张　265千字

2016年10月第1版　2016年10月第1次印刷

定　　价　29.00元

前　言

本书对原著《电磁学通论》所含218道习题均一一作了详尽解答，并且有所借题发挥，或总结点评，或释疑说明，或讨论引申。这类内容散见于各题，随机从缘，无一定格以权作指导。寓指导于题解之中，正是本书的一个特色，也是书名之由来。此番用心旨在使读者在做完一道习题之后还能有更多的收获。

全书由钟锡华教授撰写定稿，青年教师汤卫东博士提供了部分习题的解答草稿。鉴于全部题量中约五成以上系作者新编，其中部分题目颇有分量，难免题解有不妥之处，诚望读者批评指正。愿本书在分析和解决电磁学中的实际问题时，能成为读者的一个好助手。

作　者

于西安交通大学理学院

2015 乙未 · 立秋

目　录

第1章 静 电 场

1.1 原子中的库仑力

氢原子(H)是最简单的一种原子,也是宇宙起源最初生成的一种原子,它由一个质子(p)作为原子核和一个核外环绕电子(e)所组成,它俩电荷异号而数值相等,为$\pm e=\pm 1.6\times 10^{-19}$ C(库仑),而两者质量相差悬殊,电子质量 $m_e=9.11\times 11^{-31}$ kg,质子质量 $m_p=1.67\times 10^{-27}$ kg,即 $m_p/m_e\approx 1830$ 倍.

处于基态的氢原子,其电子的经典轨道半径 $r_0=5.29\times 10^{-2}$ nm.

(1) 求出氢核质子施予电子的库仑力 F_C;

(2) 同时,质子与电子之间还有一个万有引力即牛顿引力 F_G,经计算获知,这引力远远小于库仑力,其比值 $F_G/F_C\approx 4\times 10^{-40}$,试对此比值给予审核.须知,万有引力常量$G=6.67\times 10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$.

说明:库仑定律是宏观电磁学首个实验定律,本题将它应用于原子世界,并非仅仅出于教学上的演练;空间小尺度的物理实验和大尺度的地球物理实验均表明,库仑定律适用的空间尺度 r 相当宽广,从小于原子核尺度的 10^{-15} cm 至地球尺度 10^9 cm 都适用.本题还涉及电子和质子相对于轨道半径 r_0 而言,其点模型是否成立的问题,须知质子或电子是有尺度的,其经典尺度 $a\approx 10^{-13}$ cm,可见 $a\ll r_0=5.29\times 10^{-9}$ cm,点模型成立.

解 (1) 此库仑力为

$$F_C=-k_e\frac{e^2}{r_0^2}\approx -8.99\times 10^9\times\frac{(1.6\times 10^{-19})^2}{(5.29\times 10^{-11})^2}\mathrm{N}$$
$$\approx -8.22\times 10^{-8}\mathrm{N}.$$

(2) 此牛顿引力为

$$F_G=-G\frac{m_e m_p}{r_0^2}$$

$$\approx -6.67\times10^{-11}\times\frac{9.11\times10^{-31}\times1.67\times10^{-27}}{(5.29\times10^{-11})^2}\text{N}$$

$$\approx -3.63\times10^{-47}\text{N}.$$

可见,这两个力之比值为

$$\frac{F_G}{F_C}=\frac{3.63\times10^{-47}}{8.22\times10^{-8}}\approx4\times10^{-40}.$$

推而广之,在微观原子分子世界中考量电子运动时,许可忽略万有引力作用,仅计较电磁力作用就足够了.

1.2 超短脉冲光抓拍核外电子运行图像

德国马普量子光学研究所于 2008 年,研制成功阿秒级超短光脉冲,其脉冲宽度即闪光时间 $\tau=80$ as,1 as(阿秒)$=10^{-18}$ s(秒),其进一步的目标是将 τ 压缩为 24 as,因为氢原子中的电子从一端到另一端的时间约为 24 as. 对此,我们不妨作以下定量考察.

(1) 算出氢原子核外电子的运动速率 v,设 $r_0=5.3\times10^{-2}$ nm.

(2) 算出相应的运行周期 T. 若要抓拍到这电子运行图像,试问光脉冲的闪光时间 τ 应被压缩在何值 τ_0 以下,即 τ 满足 $\tau\leqslant\tau_0$.

解 (1) 设核外电子作匀速圆周运动,其所需向心力 $m_e\dfrac{v^2}{r_0}$ 由库仑引力 F_C 提供,即

$$k_e\frac{e^2}{r_0^2}=m_e\frac{v^2}{r_0},\quad 得\quad v=\sqrt{k_e\frac{e^2}{r_0m_e}},$$

代入数据算出核外电子运动速率

$$v=\sqrt{\frac{9.0\times10^9}{5.3\times10^{-11}\times9.11\times10^{-31}}}\times1.6\times10^{-19}\text{m/s}$$

$$\approx2.2\times10^6\text{m/s}.$$

这是一个极高的速率,几乎是真空光速的百分之一,无怪乎,在原子世界中考量电子运动行为,有时要计较相对论效应.

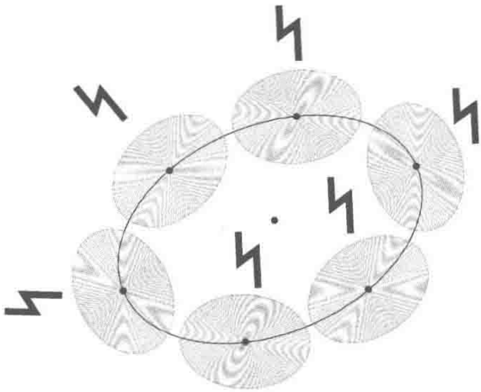
(2)其运行周期为

$$T=\frac{2\pi r_0}{v}\approx\frac{2\times3.14\times5.3\times10^{-11}}{2.2\times10^6}\text{s}\approx151\text{as}.$$

在电子运行一周过程中,若要抓拍到其运行图像,如图,有 6 个取样点即抓拍 6 次是必要的,与此匹配的超短光脉冲的闪光时间 τ,按以

上计算结果，应当满足

$$\tau \leqslant \tau_0 \approx \frac{T}{6} \approx 24\text{as}.$$



习题 1.2 图

1.3　库仑力与谐振动

如本题图(a)所示，有两个位置固定的点电荷(Q,Q)，相距 $2a$，其中点置放一个自由点电荷 q，兹考量 q 在中点即平衡点 O 处的稳定性问题.

(1) 若 q 离开 O 处沿 x 轴有一微位移 x，即 $x \ll a$，它是否受到一个线性回复力 $F(x) \propto (-x)$？如是，求出相应谐振动的角频率 ω_x.

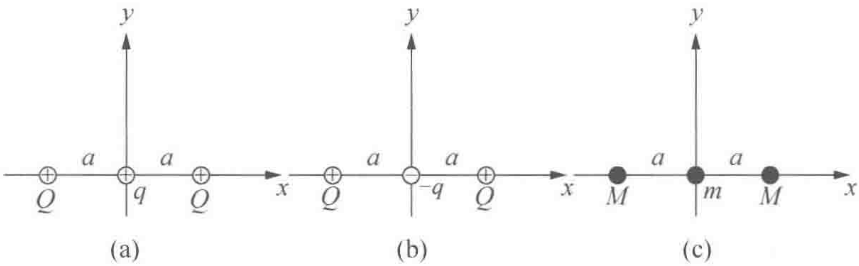
若 q 沿 y 轴有一微偏移 y，即 $y \ll a$，它是否受到一个线性回复力 $F(y) \propto (-y)$？如否，则表明，相对 y 方向的运动而言，中点是个非稳定平衡位置.

(2) 若将 q 换为$(-q)$，即与(Q,Q)异号，如本题图(b)，试分两个正交方向讨论牛顿引力 $F(x)$，$F(y)$的性质；如果它们系线性回复力，给出相应谐振动的角频率 ω_y 或 ω_x.

(3) 若将电量换为质量，如本题图(c)，试分别两个正交方向讨论牛顿引力 $F(x)$，$F(y)$的性质；如果它们系线性回复力，给出相应谐振动的角频率 ω_y 或 ω_x.

联想：电世界有两种符号的电量，而质量世界仅有一种符号的惯性质量即正质量；同号电荷相斥、异号电荷相吸，而同号质量却相

吸.这般联想亦蛮有意思,至少表明电世界更为丰富多彩.



习题 1.3 图

解　由力学关于一维弹簧振子动力学方程的求解中,我们获得一个重要见识:当一质点 m 离开其平衡位置,沿某一方向设为 x 轴作一位移 x 时,若受到一个线性回复力 $F(x)=-kx$ 作用,则该质点必作简谐振动 $x(t)=A_0\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$,其角频率

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}.\quad \text{（它与初条件无关,故也称它为本征角频率）}$$

(1) 针对图(a)情形,让 q 从中点向右位移 x,则右端 Q 施于 q 的排斥力 $F_1(x)$向左,左端 Q 施予 q 的排斥力 $F_2(x)$向右,且 F_1 值大于 F_2 值,故合力 F 向左,它是一回复力.兹作以下定量考察以审视它是否为一个线性回复力,

$$\begin{aligned}F(x)&=F_1(x)+F_2(x)=-k_e\,\frac{Qq}{(a-x)^2}+k_e\,\frac{Qq}{(a+x)^2}\\&=-k_eQq\,\frac{4ax}{(a^2-x^2)^2},\end{aligned}$$

可见,$F(x)$系一个非线性的回复力.如果限制位移值 $x\ll a$,才有

$$F(x)\approx-\frac{4k_eQq}{a^3}x=-kx,\quad k\equiv\frac{4k_eQq}{a^3},$$

这是一个线性回复力.换言之,处于中点邻近的点电荷(q,m)在(Q,Q)库仑场中沿 x 轴可能出现微振动,其角频率

$$\omega_x=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{4k_eQq}{ma^3}}.\quad (\mathrm{rad/s})$$

若 q 沿 y 轴作一位移 y,此时两端(Q,Q)施予 q 的合力沿 y 轴向上,使 q 加速离开平衡位置 O.虽然当 $y\ll a$,这合力 $F(y)$可能是一个

线性力,即 $F(y)=+k'y$;它却不是一个回复力,算式中未出现“$-$”号.

(2) 仿照上述分析方法和定量推演,若将 q 换为 $(-q)$,我们得到的结论是:

沿 x 轴方向位移,且 $x\ll a$ 时,$F(x)=kx$,线性但非回复力;

沿 y 轴方向位移,且 $y\ll a$ 时,$F(y)=-k'x$,线性回复力;

相应的谐振动角频率 $\omega_y=\sqrt{\dfrac{k'}{m}}=\sqrt{\dfrac{2k_eQq}{ma^3}}$.

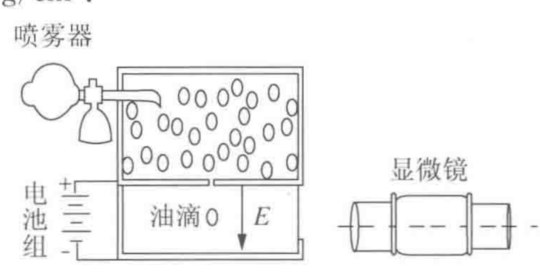
(3) 对于图(c)显示的质点组及其相联系的牛顿引力,不难看出此场景与图(b)显示的情形类似,故只要将(2)所得结果作如下相应物理量的替换,$(k_e,Q,q)\rightarrow(G,M,m)$,便可得到本小题的解答,即,沿轴向运动,且 $x\ll a$ 范围内,质点受力 $F(x)=+kx$,中点 O 系非稳定平衡位置;沿横向即 y 轴运动,且 $y\ll a$ 范围内,质点受力 $F(y)=-k'y$,中点 O 系稳定平衡位置,质点 m 可能作微振动,其角频率为

$$\omega_y=\sqrt{\frac{k'}{m}}=\sqrt{\frac{2GM}{a^3}}.\quad (G\text{ 为万有引力常量})$$

由本题引发的联想:惯性质量总是正值,而电量可有正负两种符号,故电荷世界的运动现象要比纯质量世界的更为丰富多彩.

1.4 密立根实验

电子所带的电荷量(基元电荷 $-e$)最先是由密立根通过油滴实验测出的. 密立根设计的实验装置如本题图所示. 一个很小的带电油滴在电场 $\boldsymbol{E}$ 内. 调节 $\boldsymbol{E}$,使作用在油滴上的电场力与油滴所受的重力平衡. 如果油滴的半径为 1.64×10^{-4} cm,在平衡时,$E=1.92\times10^5$ N/C,求油滴上的电荷,已知油的密度为 0.851 g/cm^3.



习题 1.4 图

解 带电油滴受到两个力,重力

$$F_g=mg=\frac{4}{3}\pi r^3\rho g,$$

电场力 $$F_e=qE;$$

由两力平衡方程 $F_g+F_e=0$,求得此油滴荷电量为

$$q=-\frac{4}{3}\pi r^3\frac{\rho g}{E}=\frac{4\times3.14\times1.64^3\times10^{-18}\times0.851\times10^3\times9.8}{3\times1.92\times10^5}\mathrm{C}$$

$$\approx-8.0\times10^{-19}\mathrm{C}.$$

1.5 基元电荷实验数据

在早期(1911 年)的一连串实验中,密立根在不同时刻观察单个油滴上呈现的电荷,其测量结果(绝对值)如下:

6.568×10^{-19} C	13.13×10^{-19} C	19.71×10^{-19} C
8.204×10^{-19} C	16.48×10^{-19} C	22.89×10^{-19} C
11.50×10^{-19} C	18.08×10^{-19} C	26.13×10^{-19} C

根据这些数据,可以推得基元电荷 e 的数值为多少?

解 这是一个关于实验数据处理的方法和技巧问题. 粗略看这组数据值是跳跃式的. 不妨先将它们按数值从小到大重新排序,尔后依次列出后者与前者的电量差值$\{\Delta q_i\}$,以10^{-19}C 为单位:

1.636 3.296 1.63 3.35 1.60 1.63 3.18 3.24

从这 8 个数据中可以看出,有 4 个数值在 1.6 左右,另有 4 个数值在 3.2 左右,可进一步求出这两组数据各自的平均值:

1.624 3.2665

即后者是前者的 2.011 倍(接近两倍). 再一步将其和除以 3 作为最小电荷量 e 的合理数据(单位:10^{-19}C),

$$e=\frac{3.2665+1.624}{3}\approx1.630.$$

为慎重起见,再将这 e 值作为除数,算出这组电量数据对 e 的倍率 N_i,审视 N_i 是否为整数或十分接近于整数,其结果如下:

4.03	8.06	12.09
5.03	10.11	14.04
7.06	11.09	16.03

从中可见,$\{N_i\}$十分接近整数,故将上述 e 值作为基元电荷是值得人们信赖的.

该值与 2008 年给出的最新数据 $e=1.602\ 176\ 487(40)\times 10^{-19}$C的偏差为 2%,须知它是 100 年前密立根给出的数值. 1923 年诺贝尔物理学奖授予了美国人 R. A. 密立根,以肯定他在电的基本电荷和光电效应方面的伟大贡献.

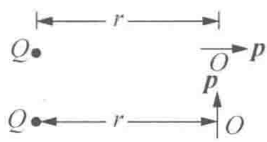
1.6 电偶极子在库仑力场中

把偶极矩为 $\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{l}$ 的电偶极子放在点电荷 Q 的电场内,$\boldsymbol{p}$ 的中心 O 到 Q 的距离为 $r(r\gg l)$. 如图,分别求:

(1) $\boldsymbol{p}/\!/\overrightarrow{QO}$;

(2) $\boldsymbol{p}\perp\overrightarrow{QO}$

时,偶极子所受的力 $\boldsymbol{F}$ 和力矩 $\boldsymbol{M}$.



习题 1.6 图

解 (1) *方法一* 分别考量两极$(-q,q)$所受库仑力$(\boldsymbol{F}_-,\boldsymbol{F}_+)$,再叠加且作近似计算:

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_-+\boldsymbol{F}_+=-k_e\frac{Qq}{\left(r-\frac{l}{2}\right)^2}\hat{\boldsymbol{r}}+k_e\frac{Qq}{\left(r+\frac{l}{2}\right)^2}\hat{\boldsymbol{r}}\approx -k_eQ\frac{2p}{r^3}\hat{\boldsymbol{r}},$$

这是吸引力,当 $Q>0$;反之,当 $Q<0$,这力是排斥力.

方法二 先考量偶极子 $\boldsymbol{p}$ 施予 Q 的电力 $\boldsymbol{F}'=Q\boldsymbol{E}'$,则 $-\boldsymbol{F}'$便是 Q 施予 $\boldsymbol{p}$ 的反作用力

$$\boldsymbol{F}=-\boldsymbol{F}'=-Q\boldsymbol{E}'\approx -Qk_e\frac{2p}{r^3}\hat{\boldsymbol{r}}=-k_eQ\frac{2p}{r^3}\hat{\boldsymbol{r}}.$$

(2) 设 QO 方向为 x 轴,偶极矢量 $\boldsymbol{l}$ 方向为 y 轴. 不难看出,两极$(-q,q)$受力$(\boldsymbol{F}_-,\boldsymbol{F}_+)$,在 x 方向分力互相抵消,即其合力沿 y 方向,数值等于 $\boldsymbol{F}_+$ 投影分量的两倍:

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_{+}+\boldsymbol{F}_{-}=2F_{+y}\boldsymbol{e}_l=2k_e\frac{Qq}{r^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2}\cdot\frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{r^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2}}\boldsymbol{e}_l$$

$$\approx k_eQ\frac{ql}{r^3}\boldsymbol{e}_l=k_eQ\frac{\boldsymbol{p}}{r^3}.$$

对合力无贡献的一对力 F_x,F_{-x},却产生一个力偶矩 $\boldsymbol{M}$,可以选择($-q$)点为参考点来计算此力矩:

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{F}_x=\boldsymbol{l}\times\left(k_e\frac{Qq}{r^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2}\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2}}\hat{\boldsymbol{r}}\right)$$

$$\approx\boldsymbol{l}\times k_e\frac{Qq}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}=q\boldsymbol{l}\times k_e\frac{Q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}\approx\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E},\quad\left(\boldsymbol{E}=k_e\frac{Q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}\right)$$

此力矩 $\boldsymbol{M}$ 使偶极矩转动,其转动方向是驱使 $\boldsymbol{p}$ 顺向外场 $\boldsymbol{E}_{外}$.

进一步说明 关于电偶极子 $\boldsymbol{p}$ 在非均匀电场 $\boldsymbol{E}$ 中的受力 $\boldsymbol{F}$ 和力矩 $\boldsymbol{M}$ 的问题,有两个基本公式值得记取:

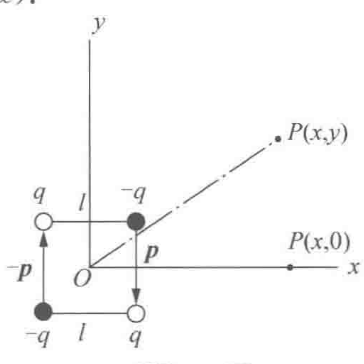
$$\boldsymbol{F}=\nabla(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}),\quad(梯度力)$$

$$\boldsymbol{M}\approx\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E},\quad(使\ \boldsymbol{p}\ 转向\ \boldsymbol{E})$$

据此两式解本题(1),(2),其结果与上述具体分析所得结果是一致的,读者不妨试之.

1.7 电四极子

本题图中所示的是一种电四极子,设 q 和 l 都已知,图中 P 点到电四极子中心 O 的距离为 x($x\gg l$),$\overrightarrow{OP}$与正方形的一对边平行,求 P 点的电场强度 $\boldsymbol{E}(x)$.



习题 1.7 图

解 电四极子可以被看为由两个电偶极子组成，两者偶极矩方向相反，$\boldsymbol{p}$ 与 $-\boldsymbol{p}$，且其位置相对平移 l，$l\ll x,y$. 故可借用单个电偶极子场强公式，再应用叠加原理，而求得电四极子的场强 $\boldsymbol{E}(x)$. 对于本题，

$$\boldsymbol{p}\rightarrow\boldsymbol{E}_{+}(x)=k_e\frac{p}{r^3}\hat{\boldsymbol{y}}=k_e\frac{p}{\left(x-\frac{l}{2}\right)^3}\hat{\boldsymbol{y}},$$

$$-\boldsymbol{p}\rightarrow\boldsymbol{E}_{-}(x)=-k_e\frac{p}{\left(x+\frac{l}{2}\right)^3}\hat{\boldsymbol{y}};$$

合场强

$$\boldsymbol{E}(x)=\boldsymbol{E}_{+}(x)+\boldsymbol{E}_{-}(x)=k_e p\left[\frac{1}{\left(x-\frac{l}{2}\right)^3}-\frac{1}{\left(x+\frac{l}{2}\right)^3}\right]\hat{\boldsymbol{y}}.$$

在 $l\ll x$ 远场区域，上式中括号内的近似结果为

$$[\cdots]=\frac{\left(x+\frac{l}{2}\right)^3-\left(x-\frac{l}{2}\right)^3}{\left(x^2-\frac{l^2}{4}\right)^3}\approx\frac{3x^2l}{x^6}=\frac{3l}{x^4},$$

最终得到电四极子在 x 轴上远场分布为

$$\boldsymbol{E}(x)=k_e\frac{3pl}{x^4}\hat{\boldsymbol{y}}=k_e\frac{3ql^2}{x^4}\hat{\boldsymbol{y}}.$$

该结果有两点值得关注. $E(x)\propto ql^2$，故 ql^2 可作为表征电四极子体系电性的特征量，据此可定义出一个电四极矩 $p'\equiv pl=ql^2$，其系数并非一定为 1；$E(x)\propto\frac{1}{x^4}$，其随距离增加而减弱的程度，比偶极子的更甚.

进一步说明 对于任意场点 $P(x,y)$，采用电偶极子电场的直角坐标表示来求电四极子电场，较为合适. 即，电四极子被看作上下两个反平行的电偶极子，$\boldsymbol{p}_1$ 与 $\boldsymbol{p}_2=-\boldsymbol{p}_1$，且相对位移 $\Delta y=l$，于是，

$$\boldsymbol{p}_1\rightarrow\boldsymbol{E}_1=(E_{1x},E_{1y}),$$
$$\boldsymbol{p}_2\rightarrow\boldsymbol{E}_2=(E_{2x},E_{2y}),$$

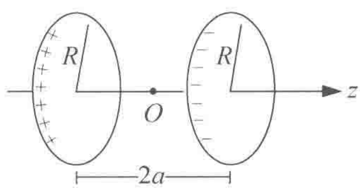
合场强

$$\boldsymbol{E}=(E_x,E_y)=((E_{1x}+E_{2x}),(E_{1y}+E_{2y})).$$

读者不妨演练之. 其结果依然体现出 $E_x(x,y)$ 或 $E_y(x,y)\propto ql^2,\propto\frac{1}{r^4}(r^2=x^2+y^2)$.

1.8 一对共轴异号带电圆环

如本题图(a),一对共轴带电圆环,相距 $2a$,均匀带有异号电量 $(q,-q)$. 兹考察其轴上总电场 $\boldsymbol{E}(z)$ 的均匀性.



习题 1.8 图(a)

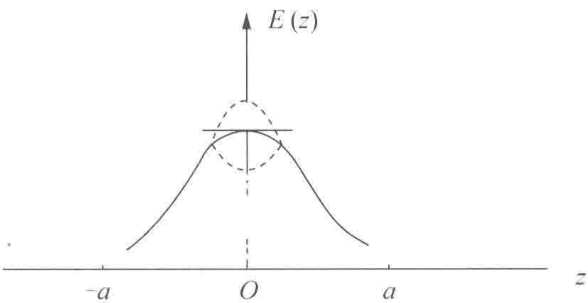
(1) 试给出电场 $\boldsymbol{E}(z)$ 的函数表达式,并粗略而正确地画出 $\boldsymbol{E}(z)$ 曲线.

(2) 由对称性分析可知,电场 $\boldsymbol{E}(z)$ 在 $z=0$ 处为一极值,或极大或极小;为了获得电场在 O 点左右一段区间的最好均匀性,其间距应当恰好,设其为 $2a_0$,以满足二阶导数 $\mathrm{d}^2\boldsymbol{E}/\mathrm{d}z^2=0$. 试求出 a_0 值与圆环半径 R 之关系.

解 (1) 先作对称性分析. 在左右两个电圈之间区段,$z\in(-a,a)$,各自产生的电场 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$ 方向一致,沿 z 轴正向. 故合场强 $E(z)=E_1(z)+E_2(z)$,左右对称,具有偶对称性,即

$$E(z)=E(-z).$$

于是,$E(z)$ 分布曲线在中点 $z=0$ 处出现凹陷或凸头或平头,如图(b)所示. 总之,$\mathrm{d}E/\mathrm{d}z=0$,当 $z=0$.



习题 1.8 图(b)

借助均匀带电(q)圆圈在轴上 $E(z)$ 公式(见书(1.11)式),立马

可以写下左圈和右圈的场强函数式，

$$(q)\to E_1(z)=k_e q(z+a)\cdot\left[(z+a)^2+R^2\right]^{-\frac{3}{2}},$$

$$(-q)\to E_2(z)=-k_e q(z-a)\cdot\left[(z-a)^2+R^2\right]^{-\frac{3}{2}}.$$

合场强 $E(z)=E_1(z)+E_2(z)$.

(2)先对 $E(z)$ 作一阶求导，略写推演中间过程，其结果为

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}z}=k_e q\left[(z+a)^2+R^2\right]^{-\frac{5}{2}}\cdot\left[R^2-2(z+a)^2\right]$$

$$-k_e q\left[(z-a)^2+R^2\right]^{-\frac{5}{2}}\cdot\left[R^2-2(z-a)^2\right],$$

显然，$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}z}=0$，当 $z=0$. 再对上式求导，经整理，得 $E(z)$ 函数的二阶导数，

$$\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}z^2}=k_e q\left[(z+a)^2+R^2\right]^{-\frac{7}{2}}(z+a)\left[-9R^2+6(z+a)^2\right]$$

$$-k_e q\left[(z-a)^2+R^2\right]^{-\frac{7}{2}}(z-a)\left[9R^2-6(z-a)^2\right],$$

为了使 $E(z)$ 曲线在 $z=0$ 处呈现平稳线型，以获得准匀场区，令 $\left.\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}z^2}\right|_{z=0}=0$，即

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}z^2}\right|_{z=0}=k_e q\cdot 2a\left(a^2+R^2\right)^{-\frac{7}{2}}\cdot\left(-9R^2+6a^2\right)=0,$$

可见，其条件是

$$\left(-9R^2+6a^2\right)=0，\text{遂得 } a_0=\frac{3}{\sqrt{6}}R\approx 1.23R.$$

这表示，当这一对共轴异号电圈之间距 $2a_0\approx 2.45R$ 时，可以获得中点附近一局域匀场区，可供电磁测量用.

顺便说明，在磁学部分有一个著名的所谓亥姆霍兹线圈，它由一对共轴同向载流线圈组成；本题这对电圈与它十分类似，其实本题系作者受它的启发而拟就的，姑且称这对电圈为亥姆霍兹电圈.

1.9 一对共轴同号带电圆环

同上题图(a)，一对共轴带电圆环，相距 $2a$，均匀带电设为 (q,q)，兹考量其轴上 O 点左右一段区间电场 $\boldsymbol{E}(z)$ 的线性范围.

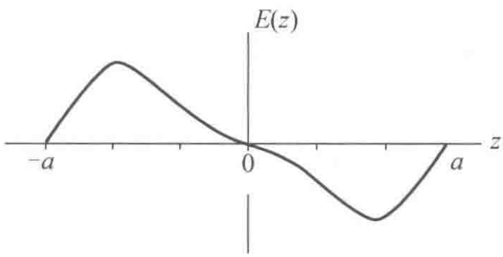
(1) 试给出电场 $\boldsymbol{E}(z)$的函数表达式,并粗略而正确地画出$\boldsymbol{E}(z)$曲线.

(2) 由定性分析可知,$\boldsymbol{E}(z)$在原点 O 为零值,在右侧为负值,在左侧为正值;在 z 值较小时,场强 $\boldsymbol{E}(z)$呈现线性变化,可表示为$\boldsymbol{E}(z)=Kz$. 试求出线性系数 K 作为 a,R,q 的函数式.

解 (1) 设左方电圈的场强为 $E_1(z)$,右方电圈的场强为 $E_2(z)$. 则合场强为 $E(z)=E_1(z)+E_2(z)$. 借助位于原点 O 处的均匀带电圆圈在轴上的场强公式(见书(1.11)式),分别作$(-a)$和 a 的平移,便可立马写出 $E_1(z)$,$E_2(z)$函数式,最终得这一对电圈在轴上的场强,

$$E(z)=k_eq(z+a)((z+a)^2+R^2)^{-\frac{3}{2}}+k_eq(z-a)((z-a)^2+R^2)^{-\frac{3}{2}},$$

显然 $E(z=0)=0$;其可能出现的函数线型之一如图所示.



习题 1.9 图

(2) 为求得 O 点邻近 $E(z)$曲线的斜率,先导出其一阶导数,

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}z}=k_eq\left((z+a)^2+R^2\right)^{-\frac{5}{2}}\cdot\left(R^2-2(z+a)^2\right)$$
$$+k_eq\left((z-a)^2+R^2\right)^{-\frac{5}{2}}\cdot\left(R^2-2(z-a)^2\right),$$

代入 $z=0$,得

$$\left.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}z}\right|_{z=0}=k_eq\frac{2(R^2-2a^2)}{(a^2+R^2)^{\frac{5}{2}}}=K,\ K\equiv k_eq\frac{2(R^2-2a^2)}{(a^2+R^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

于是,$E(z)$函数在原点邻近的线性表现为

$$E(z)=Kz,\text{当 } z\ll a.$$

有意思的是,这线性斜率 K 值可正可负,还可能为零,这取决于电圈间距 $2a$ 与其半径R 的比值,