

普通物理实验中的 数据处理

龚镇雄



$$S = \sum_{i=1}^n u_i^2 = \min$$

普通物理实验中的数据处理

龚 镇 雄

西北电讯工程学院出版社

1985

内 容 简 介

数据处理是物理实验的一个重要组成部分。本书主要是把分散在普通物理实验中的一些数据处理方法加以归纳、提取,并把有关内容有机地联系起来,从数据处理方法与实验的物理内容结合上加以阐明,书中还简明地介绍了一些有关数据处理的基本知识。为了把传统的数据处理方法与计算机技术结合起来,在书末附录中以较大的篇幅介绍了普通物理实验数据处理的常用计算程序。

本书可作为理工科大中专院校师生的教学参考书,也可供从事自然科学的研究、工程技术和生产人员以及中学物理教师学习参考之用。

普通物理实验中的数据处理

龚镇雄

西北电讯工程学院出版社出版

西北电讯工程学院印刷厂印刷

陕西省新华书店发行·各地新华书店经售

开本 850×1168 $1/32$ 印张 $10\ 28/32$ 字数 271千字

1985年1月第一版 1985年1月第一次印刷 印数 $1-10,000$

统一书号: 15322·15

定价: 2.05元

前 言

数据处理是物理实验的一个重要组成部分，它渗透在每一个实验的全部过程之中。数据处理应用了各种各样的数学方法和数学工具，是实验课教学的一个重要的内容。随着计算器及计算机的普及，总的趋势是对实验数据处理的教学要求越来越高，内容越来越丰富，分量也越来越重。

关于实验的数据处理方法，已经出版了许多专门的论著，有些是从数学理论方面予以系统的论述，有些是专门介绍和讨论某一个学科领域里的物理实验方法和与之直接相关的数据处理方法。多年来，许多同志迫切希望有一本能够密切地与普通物理实验的教学内容相结合、深入浅出、更加联系实际、能供广大从事普通物理实验教学的教师、实验室技术人员以及大专院校学生阅读的有关实验的数据处理方面的参考书。本书介绍了与大学的普通物理实验有关的数据处理问题，即把分散在各个实验中以及涉及到的数据处理方法加以吸取、归纳、提高，把一些有关的内容有机地联系起来，对一些常用的数据处理方法作较系统的阐述，对一些在教学上共同关心的问题进行讨论。书中所有的问题都力求用普通物理实验中或相当于普通物理实验水平的实际例子，并着重从数据处理方法与实验的物理内容相结合上来说明问题。

本书的第一章阐述物理实验中数据处理的地位和作用，强调数据处理的物理内容。第二章扼要介绍概率和统计的初步知识，着重树立概率统计的思想，对一些在一般实验工作中最常用的结论作了推导或说明。第三章至第六章介绍用作图法、逐差法、平均法和回归法处理数据，说明了这些方法的特点、优点和局限，以及在具体处理问题中应注意的问题，着重讨论了一元线性回归及

二元线性回归, 并对特殊条件下的一元线性回归和多项式回归的简便算法作了介绍。以后几章主要是讨论教学中经常遇到的一些实际问题。第七章讨论了测量结果的有效数字问题。第八章介绍了各种曾经遇到过的近似计算方法在实验中的应用。第九章、第十章讨论误差的计算, 以及仪器设计和实验安排中与数据处理有关的问题, 介绍了一些在教学中行之有效的提高计算效率的方法。

本书列举了一百多个实例来说明问题。这些例子除了其本身的内容之外, 还着眼于介绍考虑问题的角度、方法以及解决问题的物理思想。

每章末所附的练习题, 其意义除了巩固该章的重点内容之外, 还纳入了有些没有在例子中讨论的问题。

本书附有线性回归及一些概率统计求值的计算机程序。

本书反映了作者的一些教学思想、实际经验和研究成果。例如, 指出数据处理贯穿实验的始终; 强调数据处理的物理内容; 数据处理的训练对学生思维和分析能力的作用; 指出树立概率统计观点的意义; 对逐差法的系统阐述; 给出自变量等间距变化时一元线性回归简便算法的普遍公式; 以用误差决定有效数字的观点来阐明有关有效数字的全部问题; 用“平均值插入法”和“两倍法”结合佩特斯公式估算标准偏差的方法; 一些近似计算在实验中的应用; 一些计算技巧; 把数据处理与仪器设计联系起来进行仪器设计中的参量选择; 制造了一批能便于迅速得出计算结果的教学实验仪器等。因此, 本书也是教学研究成果的一些反映。

由于本书的内容和材料积累过程是一个一个专题进行的, 因此, 每一章都有相对的独立性, 读者可以根据需要选阅。

本书可以作为普通物理实验课程内容的补充, 也可以作为以后进一步学习或研究虞福春教授所著的《误差和实验数据分析》一书的准备, 还可以作为进一步学习其他误差和数据处理论著的

入门。

本书的酝酿、准备和材料积累过程得到了虞福祚教授，特别是我系普物力学和热学实验室全体同志的关心和支持，其中包括了许多共同的教学经验，也得到了校外许多同志的指导和鼓励。胡昌壁、梁昌洪同志审阅了全书，刘雪林同志审阅了部分书稿，梁昌洪、谢柏青同志以及思红、马庆临同志在提供计算机程序及数据核算方面给予了协助，严隽珏等同志提供了部分数据，在此仅表示衷心的感谢。

由于水平所限，一定会有很多内容没有包括进来，内容的取舍也不一定恰当，有些观点和内容是很不成熟的，缺点和错误在所难免，恳请批评指出，以便修正、充实和提高。

龚镇雄

于北京大学物理系

1984.7

目 录

前言

第一章 绪论——物理实验中的数据处理 1

§ 1.1 数据处理与物理实验 1

§ 1.2 数据处理的物理内容 3

1.2.1 数据处理与实验方法 3

1.2.2 数据处理的物理模式 4

1.2.3 用不同的方法处理同一组数据 5

§ 1.3 数据处理的数学工具 9

1.3.1 普通物理实验中常用的数学工具 9

1.3.2 正确地运用数学方法和计算工具 10

参考资料

练习题

第二章 概率和统计的初步知识 13

§ 2.1 引言 13

§ 2.2 随机变量的分布, 概率密度函数, 分布函数 15

2.2.1 随机样本 15

2.2.2 直方图 16

2.2.3 概率密度函数, 分布函数 17

§ 2.3 几种常见的分布 19

2.3.1 正态分布 19

2.3.2 均匀分布 22

2.3.3 二项式分布 23

2.3.4 泊松分布 24

2.3.5 其他分布 24

§ 2.4 期待值, 方差, 协方差	25
2.4.1 期待值	25
2.4.2 方差	25
2.4.3 协方差	26
2.4.4 期待值和方差的几个运算公式	26
2.4.5 几种常见分布的期待值和方差	27
§ 2.5 样本的平均值和偏差	28
2.5.1 样本的算术平均值, 算术平均值的方差及其标准 误差	28
2.5.2 正态样本测量结果的表示, 绝对误差和相对 误差	29
2.5.3 样本的标准偏差	30
2.5.4 关于误差的取位	32
2.5.5 加权平均值和加权平均值方差的估计	33
2.5.6 对总体参数的最佳估计	36
§ 2.6 t 分布, 置信水平	36
2.6.1 t 分布	36
2.6.2 置信水平, 测量结果的表示	37
§ 2.7 坏值的剔除	41
2.7.1 剔除坏值的基本思想	41
2.7.2 常用的剔除坏值的方法	42
§ 2.8 统计检验简述	45
2.8.1 统计检验的基本思想	45
2.8.2 u 检验	46
2.8.3 t 检验	47
2.8.4 χ^2 分布, χ^2 检验	48
2.8.5 F 分布, F 检验	51
2.8.6 概率统计纸	52
参考资料	
练习题	
附录	
表 I 标准正态分布概率密度函数表	58

表 I 标准正态分布的分布函数 $N(x, 0, 1)$ 数值表	59
表 II t 分布的 t_{α} 数值表	61
表 IV χ^2 分布的 $\chi^2_{\alpha}(v)$ 数值表	63
表 V F 分布表	65

第三章 用作图法处理数据 67

§ 3.1 物理实验中作图的应用	67
§ 3.2 作图法的优点	80
§ 3.3 作图规则	83
§ 3.4 图线的线性化	86
§ 3.5 常用的作图坐标纸, 作图举例	89
§ 3.6 有关用作图法处理数据的几个问题的讨论	94
3.6.1 作图法的局限性	94
3.6.2 关于作图误差问题	95

参考资料

练习题

第四章 用逐差法处理数据 102

§ 4.1 用逐差法处理数据举例	102
§ 4.2 用逐差法处理数据的条件	105
§ 4.3 逐差法在物理实验中的应用	106
4.3.1 验证多项式	106
4.3.2 发现系统误差或实验数据的某些变化规律	109
4.3.3 求物理量的数值	111
§ 4.4 有关用逐差法处理数据的几个问题的讨论	119
4.4.1 用逐差法处理数据的优点	119
4.4.2 逐差法的数学模式及其局限性	119
4.4.3 关于“差值法”	120
4.4.4 用逐差法处理数据时要注意的几个问题	121

练习题

第五章 用平均法处理数据 124

§ 5.1 用平均法处理数据举例 124

§ 5.2 有关用平均法处理数据的几个问题的讨论 126

5.2.1 用平均法处理数据的基本思想 126

5.2.2 平均法的优点及局限 127

练习题

第六章 用回归法处理数据 131

§ 6.1 引言 131

§ 6.2 用最小二乘法进行一元线性回归 133

6.2.1 最小二乘法, 直线的回归方程 133

6.2.2 单个测量值的剩余方差 136

6.2.3 一元线性回归方程系数的偏差 138

6.2.4 相关系数 140

6.2.5 一元线性回归分析举例 145

6.2.6 化曲线为直线的回归 148

§ 6.3 用最小二乘法进行多元线性回归 149

6.3.1 二元线性回归 149

6.3.2 二元线性回归举例 153

6.3.3 多元线性回归 156

6.3.4 多项式回归 157

§ 6.4 自变量等间距变化时一元线性回归的简便

算法 158

6.4.1 求回归方程及相关系数 158

6.4.2 举例 162

§ 6.5 自变量等间距变化时多项式回归的简便算

法 164

6.5.1 求回归方程 164

6.5.2 求回归方程系数的误差 167

§ 6.6 最大似然方法	168
--------------	-----

参考资料

练习题

附录

表 I 正交多项式表 ($n \leq 5, k \leq 9$)	173
-------------------------------------	-----

第七章 测量结果的有效数字 176

§ 7.1 处理有效数字问题的指导思想	176
---------------------	-----

§ 7.2 有效数字和仪器读数	178
-----------------	-----

7.2.1 测量结果的有效数字	178
-----------------	-----

7.2.2 仪器的读数规则	178
---------------	-----

7.2.3 几个与有效数字定义有关的问题	180
----------------------	-----

§ 7.3 有效数字的四则运算规则	180
-------------------	-----

§ 7.4 函数运算的有效数字取位	184
-------------------	-----

练习题

第八章 物理实验及数据处理中的某些近似计算方法 188

§ 8.1 引言	188
----------	-----

§ 8.2 微分在近似计算中的应用	190
-------------------	-----

8.2.1 计算测量值在标准值上下浮动时的测量结果	190
---------------------------	-----

8.2.2 计算某个因素的变化对实验结果的影响	192
-------------------------	-----

8.2.3 在实验中估算某些量的测量所要求的精度	193
--------------------------	-----

8.2.4 在仪器设计或实验安排时估算参量的改变值	193
---------------------------	-----

§ 8.3 积分的近似计算	194
---------------	-----

8.3.1 求积分中值	194
-------------	-----

8.3.2 求积分值的近似值	195
----------------	-----

8.3.3 用作图法求积分近似值	197
------------------	-----

§ 8.4 方程的近似解	198
--------------	-----

8.4.1 代数方程的近似解	198
----------------	-----

8.4.2 微分方程的近似解	198
----------------	-----

§ 8.5 内插法和外推法	199
8.5.1 线性内插	200
8.5.2 线性外推	201
8.5.3 非线性内插, 非线性外推	203
§ 8.6 利用函数在一点附近的展开作近似计算	204
8.6.1 泰勒展开	204
8.6.2 多项式展开	206
§ 8.7 利用一些基本数学公式或常用数值作近似计算	208
8.7.1 利用一些基本公式或特殊的函数数值作近似计算	208
8.7.2 利用一些常数数值作近似计算	209
§ 8.8 估算	210
8.8.1 实验公式理论误差的估算	210
8.8.2 仪器设计中的估算	211
8.8.3 调节程度要求的估计	212
8.8.4 修正值的估算	213
8.8.5 估算实验结果的数量级	213
§ 8.9 图算(诺谟图)	214
§ 8.10 其他近似计算方法	215
参考资料	
练习题	
附录 常用的计算公式和一些数值	222

第九章 误差计算以及误差传递中的一些问题 225

§ 9.1 引言	225
§ 9.2 算术平均值的计算	225
9.2.1 确定计算结果需要保留的位数	226
9.2.2 几种常用的简捷计算平均值的方法	226
§ 9.3 标准偏差的计算方法	228

§ 9.4 标准偏差的近似计算	231
9.4.1 用最大残差估计 S_x	231
9.4.2 用极差估计 S_x	232
9.4.3 用佩特斯(Peters)公式估算 S_x	233
9.4.4 两种求 $\sum_{i=1}^n x_i - \bar{x} $ 的方法: “平均值插入法”及 “两倍法”	234
§ 9.5 误差的传递	236
9.5.1 误差传递的几种方式	236
9.5.2 误差传递系数和分误差	237
9.5.3 误差传递系数及分误差的计算	241
9.5.4 一个要指出的问题	245
§ 9.6 系统误差的传递及计算	246
9.6.1 两种修正系统误差的方法	246
9.6.2 把系统误差归结为直接测量量的误差	250
§ 9.7 误差的估算	252
9.7.1 估算误差的数量级	252
9.7.2 计算误差中的主要项	253
9.7.3 误差计算过程中的取位	254
9.7.4 修正项的误差	255

参考资料

练习题

第十章 实验的设计、安排与数据处理262

§ 10.1 用数据处理方法解决某些不能或不易被直接 测定或计算的物理量的测量	262
10.1.1 测出不能直接测量的物理量	262
10.1.2 求出物理量的等效值	264
10.1.3 测准不易测准的物理量	264
10.1.4 绕过不易测定的物理量	265

§ 10.2 在仪器设计及实验安排时考虑数据处理的 特点, 减小实验的误差·····	266
10.2.1 仪器设计的考虑举例·····	266
10.2.2 实验安排上的考虑举例·····	268
§ 10.3 为运用某些计算方法而进行的仪器设计·····	270
10.3.1 为便于利用微分进行近似计算而作的仪器设计·····	270
10.3.2 为便于利用近似计算公式而作的仪器设计·····	273
10.3.3 为便于利用自变量等间距变化下线性回归的简便算 法而作的仪器设计·····	274
§ 10.4 为便于计算而作的实验安排·····	275
10.4.1 为简化计算公式而选取的参量·····	275
10.4.2 为便于利用自变量等间距变化下多项式回归的简便 算法而选取的参量·····	275

参考资料

练习题

附录 普通物理实验数据处理的常用计算程序·····	279
---------------------------	-----

- 一、平均法
- 二、一元线性回归
- 三、二元线性回归
- 四、多元线性回归
- 五、加权多元线性回归
- 六、正态分布的概率密度
- 七、正态分布的分布函数
- 八、 t 分布的 $t_{\frac{\alpha}{2}}$ 值
- 九、 χ^2 分布的 $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(\nu)$ 值
- 十、 F 分布的 F 值

第一章 绪论——物理实验中的 数据处理

提 要

本章是全书的绪论，指出数据处理不单纯是做完实验以后的数学运算问题，而是从实验设计、测量操作一直到得出结果进行分析等都离不开计算，它贯穿在实验的全过程之中。数据处理方法往往是实验方法的不可分的一部分，它是以一定的物理模型为基础，以一定的物理条件为依据的。在强调数据处理的物理内容的同时，也指出了正确、熟练地运用数学工具的重要性以及在普通物理实验范围内通常应用的数学领域。

§ 1.1 数据处理与物理实验

从物理学发展的历史来看，最初有的是一些定性的观察和试验，而后，出现了定量的实验。到了伽利略时代，把数学与实验方法密切地结合起来，形成了研究物理学的科学的方法，这“标志着物理学的真正开端”^[1]。在历史上，许多数学方法的发展是与物理学的理论和实验研究密切结合的。现代的物理实验离不开定量的测量和计算，还常常要通过大量的、采用专门方法的数据处理，才能够得出必要的实验结果。因此，数据处理是物理实验中的一个重要的组成部分。

有些初学者认为，数据处理无非是在做完实验以后算个数，作个图，计算一下误差，或上上计算机，最后给出一个结果而已。实际上，实验的数据处理所涉及的问题远不止于此，数据处理问题贯穿在整个物理实验的全过程之中。在实验之前，就要根据对实验结果精确度的要求去选择实验方案和实验方法，去考虑实验

的理论应近似到哪一级及对环境条件要求保证到什么程度,还有由此考虑选用或设计仪器等等。要考虑在这些设计条件下实验能否得出预期的结果。要分析每一个因素可能造成对实验结果的影响以及是否需要作出修正。要计算“信噪比”是否足够大以致讯号能足以提取出来。要调整各测量量的误差分配以得出最佳的仪器选择和测量方案等等。实际上这就是一次先期的以设计值或估计值进行的数据计算和处理。

在实验进行过程中,要考虑仪器调节和实验条件保证的程度怎样才是恰当的,既不过于粗略以致影响实验结果,又不作不必要的苛求以致影响操作的效率。例如用摆测周期时摆角应不大于多少,实验中的参量如何选择或测量如何安排以求得误差最小的方案。又例如用混合法测定比热容时,两个相互混合的热学系统的初温及热容量的选择,电桥桥臂的选择怎样可以达到高的灵敏度。再有,如何随时分析和判断测得的数据是否合理等等。这些,也都需要分析和计算,特别是适时的估算。

实验操作结束以后,当然首先要经过数据处理得出结果,给出误差范围,并从数据分析中去发现误差或寻找、发现规律性,然后回过头来再去调整实验的设计和安排,等等^{[2] [3] [4] [5]}。

由上所述也可以看到,数据处理的能力对于培养和提高实验能力的各个方面——如设计实验的能力,实验的动手和操作能力,处理和分析实验结果的能力,以及在实验中进行观察、思考的能力等都有着直接的密切的关系。^[6]它是一个很重要的基础。因此,在普通物理实验课程中对学生进行的数据处理方面的训练,不仅是使学生掌握一些具体的处理数据的方法,还要着眼于提高整个的实验能力。

由于计算机及计算器的普及,有可能也有必要大大提高对学生的数据处理训练要求,提高他们的数据处理和计算能力。这也是当前国内外提高实验课程的教学水平的一个普遍着力的重要方面。

§ 1.2 数据处理的物理内容

数据处理当然要运用数学工具，这是必要的基础。但是，物理实验中的数据处理首先是一个物理问题。

1.2.1 数据处理与实验方法

数据处理往往是实验方法的一个不可分的组成部分。

我们常用的检验或验证物理定律或公式的方法之一是作图法或最小二乘法。例如，举一个最简单的例子：用作图法验证单摆周期公式

$$T = 2\pi\sqrt{l/g} . \quad (1.1)$$

式(1.1)中 T 是单摆的周期， l 是摆长， g 是重力加速度。我们作 T^2-l 图，如果满足：(1) 是一条直线，(2) 直线过原点，(3) 直线的斜率是 $4\pi^2/g$ ，这里 g 是已知的当地的重力加速度数值，则认为公式(1.1)被实验所验证。用最小二乘法也可以求出 T^2 与 l 的线性相关系数，由此作出在多大程度上可以认定是线性的结论；由截距及其误差可以判断是否通过原点；由一次项的系数(斜率)及其误差可以判断实验与理论是否相符。

常用的还有用逐差法检验理论公式。如果把对应于等距变化的物理量 x 的函数值 y 进行一次逐差得到常量，则函数是线性的；如果二次逐差得到常量，则函数是 x 的二次幂的；如果三次逐差得到常量，则函数是 x 的三次幂的等。

作图法和逐差法还是测定物理量的方法。如著名的爱因斯坦光电方程给出发射光电子的最大动能 $E_{\max}$ 与频率 ν 的关系，即

$$E_{\max} = h\nu - E, \quad (1.2)$$

密立根就是利用这个公式于1916年首先给出用作图法求得的普朗克常数 $h = 6.57 \times 10^{-27} \text{erg} \cdot \text{s}$ 的数值的。还有，如在气轨上用作图外推法测定瞬时速度，可以得到不可能直接测得的时间间隔趋