

离散系统理论

数字控制系统的分析与综合

李友善 著

国防工业出版社

51.3
161

离散系统理论

(数字控制系统的分析与综合)

李友善 著

21811/6

国防工业出版社

内 容 简 介

本书是以哈尔滨工业大学自动控制专业为研究生讲授《离散系统理论》课的教材为基础整理、充实而写成的。它着重阐述控制概念,强调理论与实践相结合原则,向读者介绍分析与综合数字控制系统的基础理论与基本方法。全书共分五章,其内容包括:采样过程与信号保持的概念;线性数字控制系统的Z变换分析方法;分析线性数字控制系统的状态转移方法;分析各种常见非线性数字控制系统的变增益法以及数字控制系统的有限拍无纹波综合方法等问题。

本书可供从事控制工程和计算机控制工程的工程技术人员、科研和设计人员参考,也可作为自动控制专业研究生及本科高年级学生参考书。

离散系统理论 (数字控制系统的分析与综合)

李友善 著

*

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

787×10921¹/₃₂ 印张 7¹/₁₆ 156千字

1985年9月第一版 1985年9月第一次印刷 印数: 0,001—5,630册

统一书号: 15034·2856 定价: 1.65元

前 言

近年来,随着数字计算机,特别是微型计算机在控制系统中的广泛应用,数字控制系统已是屡见不鲜的了。基于工程上的需求,作为分析与综合数字控制系统的基础理论——离散系统理论的发展是十分迅速的。因此,深入研究离散系统理论,掌握分析与综合数字控制系统的基础理论与基本方法,对于从事控制工程,特别是从事计算机控制工程的同志来说,已经提到日程上来了。

本书是著者基于多年为自动控制专业研究生讲授《离散系统理论》课的讲稿,经整理、充实而写就的。它主要向读者介绍分析与综合数字控制系统的基础理论与基本方法。着重阐述控制概念,强调理论与实践相结合原则,试图帮助读者打好分析与综合带有数字计算机的闭环控制系统——数字控制系统的理论基础,掌握分析与综合这类极有发展前途的控制系统的基本方法。

学习本书,读者需具有古典控制理论及现代控制理论的基本概念与基本知识,以及作为数学工具的线性代数知识。在学习过程中,希望读者在深入掌握理论的基础上,能从工程应用角度提高分析与综合数字控制系统的能力。

本书的基本内容承蒙北京轻工学院夏德黔教授的审阅,在此谨致衷心谢意。

由于著者学识水平有限,书中不当之处,敬请读者不吝赐教。

著者

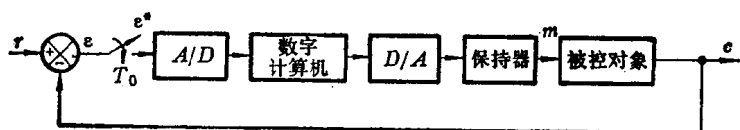
目 录

第一章 采样与保持	1
§1 采样过程	1
§2 采样周期的选取	5
§3 信号保持	8
第二章 线性数字控制系统的 Z 变换分析	13
§1 Z 变换	13
§2 脉冲传递函数	27
§3 线性数字控制系统的 Z 变换分析	32
§4 线性数字控制系统的稳定性分析	35
第三章 线性数字控制系统的状态空间分析	39
§1 线性数字控制系统的状态空间描述	39
§2 线性数字控制系统状态方程的递推解	50
§3 线性数字控制系统状态空间分析举例	54
§4 多速采样线性数字控制系统分析	84
§5 有限宽度采样线性数字控制系统分析	91
第四章 非线性数字控制系统的状态空间分析	99
§1 应用变增益法分析非线性数字控制系统	99
§2 在一个采样周期中具有多个连续状态转移矩阵的非线性数字控制系统分析	125
§3 非线性特性位于被控对象输出侧时非线性数字控制系统分析	136
第五章 数字控制系统的有限拍无纹波综合	155
§1 有限拍无纹波性能指标	155
§2 线性数字控制系统的有限拍无纹波综合	157
§3 数字控制器的实现问题	180
§4 非线性数字控制系统的有限拍无纹波综合	186
§5 线性数字控制系统有限拍无纹波综合举例	203
参考文献	221
后记	222

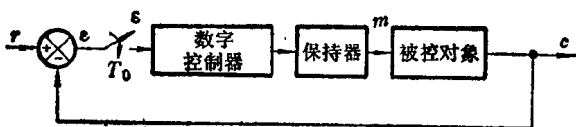
第一章 采样与保持

§1 采样过程

数字控制系统是一种以数字计算机为控制器去控制具有连续工作状态的被控对象的闭环控制系统。因此，数字控制系统包括工作于离散状态下的数字计算机和工作于连续状态下的被控对象两大部分。数字控制系统的方框图如图 1-1 所示。从图 1-1 (a) 看到，数字控制系统首先对连续的偏差信号 $\varepsilon(t)$ 进行采样，其次通过模拟-数字转换器 (A/D) 把采样脉冲变成数字信号送给计算机，再次，数字计算机根据这些数字信息按预定的控制规律进行运算，最后通过数字-模拟转换器 (D/A) 及保持器把运算结果转换成模拟量



(a)



(b)

 对连续信号进行采样的采样开关

图 1-1 数字控制系统方框图

$m(t)$ 去控制具有连续工作状态的被控对象, 以使被控制量 $c(t)$ 满足预定的要求。图 1-1(b) 是图 1-1(a) 的简化。其中数字控制器在一般情况下, 由转换器 A/D 、数字计算机及转换器 D/A 组成。

采样开关经一定时间 T_0 重复闭合, 每次闭合时间为 h , 且有 $h < T_0$, 其中 T_0 称为采样周期。采样周期的倒数

$$f_s = \frac{1}{T_0} \quad (1-1)$$

称为采样频率, 而

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_0} \quad (1-2)$$

称为采样角频率。连续时间函数经采样开关采样后变成重复周期等于采样周期 T_0 的时间序列, 如图 1-2(a) 所示。采样时间序列也称采样脉冲序列。这种脉冲序列是在时间上离散, 而在幅值上连续的信号, 属于离散模拟信号, 用在相应连续时间函数上打 * 号来表示, 如图 1-2(a) 中的 $e_s^*(t)$ 。将连续时间函数通过采样开关的采样而变成脉冲序列的过程, 称为采样过程。

为了对数字控制系统进行定量的分析, 需要导出描述采样过程的数学表达式。图 1-2(a) 所示的实际脉冲序列 $e_s^*(t)$, 可通过下列数学表达式来描述, 即

$$e_s^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT_0 + \Delta t), \quad 0 < \Delta t \leq h \quad (1-3)$$

在实际应用中, 图 1-2(a) 所示实际脉冲的持续时间 h 通常远远小于采样周期 T_0 。因此, 图 1-2(a) 所示实际脉冲序列可近似通过图 1-2(b) 所示平顶脉冲序列 $\bar{e}^*(t)$ 表示。基于脉冲强度概念, 平顶脉冲序列 $\bar{e}^*(t)$ 可表达为

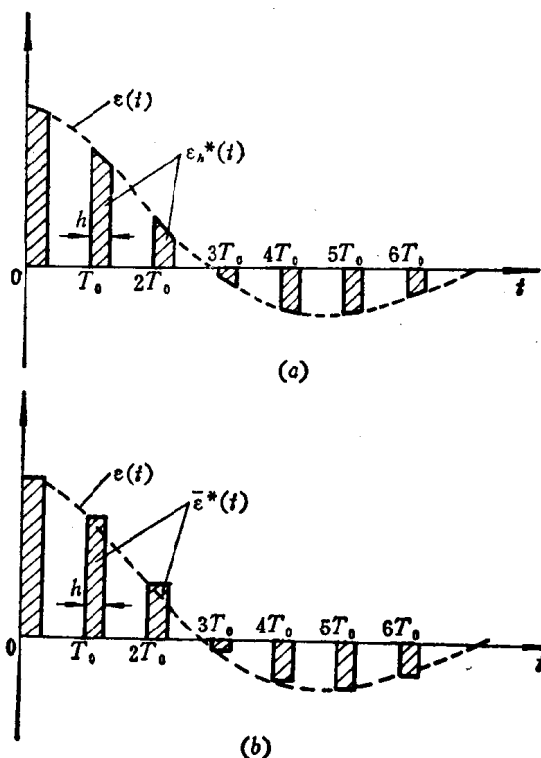


图1-2 采样时间序列

$$\bar{\varepsilon}^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon(nT_0) \cdot \frac{1}{h} \cdot [1(t - nT_0) - 1(t - nT_0 - h)] \quad (1-4)$$

其中 $\frac{1}{h} [1(t - nT_0) - 1(t - nT_0 - h)]$ 表示发生在 nT_0 时刻的单位强度脉冲（即面积等于1的脉冲），而 $\varepsilon(nT_0) \cdot \frac{1}{h} [1(t - nT_0) - 1(t - nT_0 - h)]$ 则表示发生在 nT_0 时

刻上强度为 $\varepsilon(nT_0)$ 的脉冲。当脉冲持续时间 h 远远小于采样周期 T_0 ，同时也远远小于用以描述数字控制系统中具有连续工作状态部分惯性的时间常数时，在实际分析中，可近似认为脉冲持续时间 h 趋于零，从而式 (1-4) 所描述的脉冲序列便可看作是强度为 $\varepsilon(nT_0)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) 宽度为无限小的窄脉冲序列。这种窄脉冲序列可借助于数学上的 δ 函数来描述，即

$$\varepsilon^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon(nT_0) \delta(t - nT_0) \quad (1-5)$$

式中 $\delta(t - nT_0)$ 表示发生在 $t = nT_0$ 时刻的具有单位强度的理想脉冲，即

$$\delta(t - nT_0) = \begin{cases} \infty & (t = nT_0) \\ 0 & (t \neq nT_0) \end{cases} \quad (1-6)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0) dt = 1$$

$\delta(t - nT_0)$ 的作用在于指出脉冲存在的时刻 nT_0 ($n = 0, 1, 2, \dots$)，而脉冲强度则由 nT_0 时刻的连续函数值 $\varepsilon(nT_0)$ 来确定。

式 (1-5) 表示的便是通过理想脉冲序列描述的采样过程的数学表达式。理想脉冲序列示于图 1-3。

从物理意义上来看，式 (1-5) 描述的采样过程可以理解为脉冲调制过程。在这里，采样开关起着理想脉冲发生器的作用，通过它将连续函数调制成图 1-3 所示的理想脉冲序列。

但需强调指出，将采样开关视为理想脉冲发生器是近似的、有条件的。就是说采样持续时间 h 应远远小于采样周期

T_0 及远远小于描述系统连续部分惯性的时间常数。上述条件在实际的控制系统中通常总可得到满足。

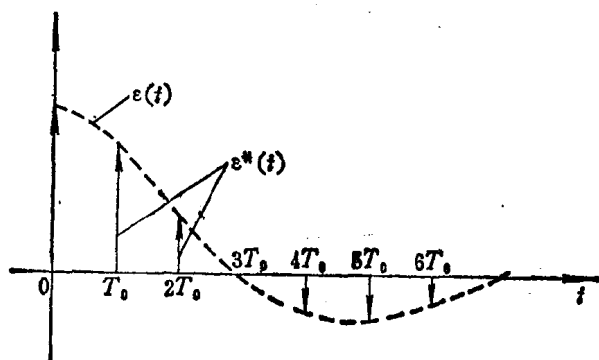


图1-3 理想脉冲序列

§ 2 采样周期的选取

一、采样定理

采样定理也称香农 (Shannon) 定理, 其结论如下:

如果采样角频率 ω_s (或频率 f_s) 大于或等于 $2\omega_m$ (或 $2f_m$), 即

$$\omega_s \geq 2\omega_m \quad (1-7)$$

式中 ω_m (或 f_m) 是连续信号频谱的上限频率 (见图 1-4), 那么经采样得到的脉冲序列便能无失真地再恢复到原连续信号。

从物理意义上来理解采样定理那就是, 如果选择这样一个采样频率, 使得对连续信号所含的最高频率来说, 能做到在其一个周期内采样两次以上, 那么在经采样获得的脉冲序列中就包含了连续信号的全部信息。反之, 如果采样次数太少 (采样周期太长), 那就做不到无失真地再现原连续信号。

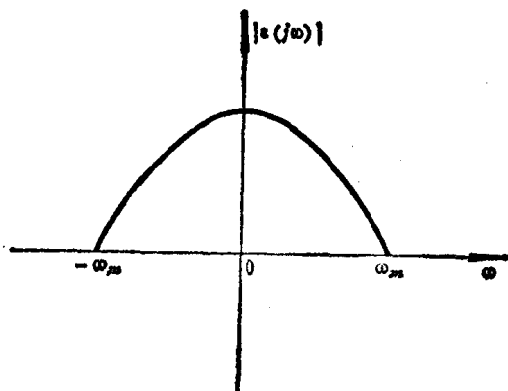


图1-4 连续信号频谱

应当指出，采样定理只是给出了一个选择采样周期 T_s 或采样频率 $f_s(\omega_s)$ 的指导原则，它给出的是由采样脉冲序列无失真地再现原连续信号所允许的最大采样周期，或最低采样频率（即采样频率的下限）。在控制工程实践中，一般总是取 $\omega_s > 2\omega_m$ ，而不取恰好等于 $2\omega_m$ 的情形。

二、采样周期的选取

采样周期 T_s 是数字控制系统设计的一个关键因素，必须给予充分注意。

采样定理只给出选取采样周期的基本原则，而并未给出解决实际问题的条件公式。显然，采样周期 T_s 选得越小，也就是采样频率 ω_s 选得越高，对系统控制过程的信息了解便越多，控制效果越好。但需注意，采样周期 T_s 选得过短，将增加不必要的计算负担，而 T_s 选得过长又会给控制过程带来较大的误差，降低系统的动态性能，甚至有可能导致整个控制系统的不稳定。那么，究竟应该如何选取采样周期 T_s ？

在多数的工业生产过程控制中，一般微型计算机所能提

供的运算速度,对于采样周期的选择来说,回旋余地较大。工程实践证明,采样周期 T_0 根据表 1-1 给出的参考数据选取时,可以得到满意的控制效果。

表1-1 采样周期 T_0 的参考数据

控制过程	采样周期(秒)
流 量	1
压 力	5
液 面	5
温 度	20
成 分	20

对于随动系统,采样周期的选取在很大程度上取决于系统的性能指标。在一般情况下,控制系统的闭环频率特性具有低通滤波器特性。当随动系统输入信号的频率高于闭环幅频特性的谐振频率 ω_r 时,信号通过系统将会很快地衰减。而在随动系统中,一般可近似认为,开环幅频特性的剪切频率 ω_c 与闭环幅频特性的谐振频率 ω_r 相当接近,即 $\omega_c \approx \omega_r$ 。这就是说,通过随动系统的控制信号的最高频率分量为 ω_c ,超过 ω_c 的分量通过系统时将被大大地衰减掉。根据工程实践经验,随动系统的采样频率 ω_s 可选取为

$$\omega_s \approx 10\omega_c \quad (1-8)$$

考虑到

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_s} \quad (1-9)$$

采样周期 T_0 按式(1-8)选取时,与剪切频率 ω_c 的关系为

$$T_0 = \frac{\pi}{5} \cdot \frac{1}{\omega_c} \quad (1-10)$$

从时域性能指标来看,采样周期 T_0 通过单位阶跃响应的

上升时间 t_r 及调整时间 t_s 可按如下的经验关系式选取, 即

$$T_0 = \frac{1}{10} t_r \quad (1-11)$$

及

$$T_0 = \frac{1}{40} t_s \quad (1-12)$$

§ 3 信号保持

信号保持是指将离散信号——脉冲序列转换成(或恢复到)连续信号的转换过程。用于这种转换过程的元件称为保持器。

从数学意义来说, 保持器的任务是解决各采样时刻之间的插值问题。我们知道, 在采样时刻上, 连续信号的函数值与脉冲序列的脉冲强度相等。以 nT_0 时刻的信号 $\varepsilon(t)$ 为例, 那就是

$$\varepsilon(t)|_{t=nT_0} = \varepsilon(nT_0) = \varepsilon^*(nT_0) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

以及对于采样时刻 $(n+1)T_0$ 来说, 则有

$$\varepsilon(t)|_{t=(n+1)T_0} = \varepsilon[(n+1)T_0] = \varepsilon^*[(n+1)T_0]$$

然而在由脉冲序列 $\varepsilon^*(t)$ 向连续信号 $\varepsilon(t)$ 转换过程中, 对于处在 nT_0 与 $(n+1)T_0$ 相邻采样时刻之间的任意时刻 $nT_0 + \tau$ ($0 < \tau < T_0$) 上的连续信号 $\varepsilon(t)|_{t=nT_0+\tau}$ 的值究竟有多大? 它和 $\varepsilon(nT_0)$ 的关系将是怎样的? 这些就是保持器要回答的问题。

一、零阶保持器

实际上, 保持器是具有外推功能的元件。也就是说, 保持器在现时刻(如 $nT_0 + \tau$) 的输出信号取决于过去时刻(如 nT_0) 离散信号的外推。在数字控制系统中, 应用最广泛

的是具有常值外推功能的保持器，或称零阶保持器，用符号 H_0 来表示。也就是说，对于零阶保持器，有下式成立，即

$$\varepsilon(nT_0 + \tau) = a_0 \quad (1-13)$$

式中 a_0 为常值， τ 的变化范围是 $0 \leq \tau < T_0$ ，显然，在 $\tau = 0$ 时，上式也成立。这时有

$$\varepsilon(nT_0) = a_0 \quad (1-14)$$

由式 (1-13) 及 (1-14) 得到

$$\varepsilon(nT_0 + \tau) = \varepsilon(nT_0), \quad 0 \leq \tau < T_0 \quad (1-15)$$

式 (1-15) 说明，零阶保持器是一种按常值规律外推的保持器。它把前一个采样时刻 nT_0 的采样值 $\varepsilon(nT_0)$ 不增不减地保持到下一个采样时刻 $(n+1)T_0$ 到来之前的一瞬间。当下一个采样时刻 $(n+1)T_0$ 到来时，应以 $\varepsilon[(n+1)T_0]$ 为常值继续外推。也就是说，任何一个采样时刻的采样值只能作为常值保持到下一个相邻的采样时刻到来之前，其保持时间显然是一个采样周期 T_0 。零阶保持器的输出信号 $\varepsilon_H(t)$ 如图 1-5 所示。

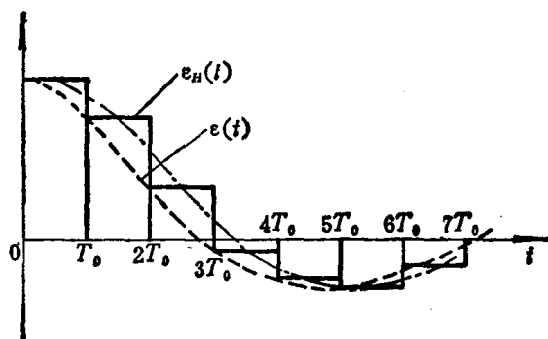


图1-5 零阶保持器的输出曲线

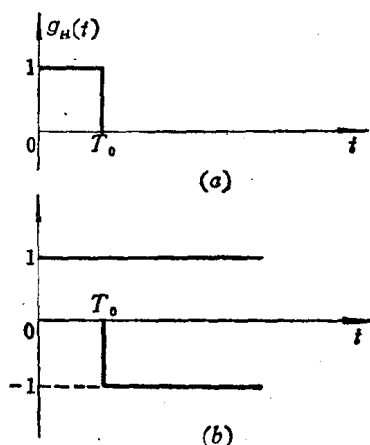


图1-6 零阶保持器的时域特性

零阶保持器的时域特性 $g_H(t)$ 如图 1-6 (a) 所示。它是高度为 1 宽度为 T_0 的方脉冲。高度等于 1，说明采样值经过保持器既不放大，也不衰减；宽度等于 T_0 ，说明零阶保持器对采样值只能不增不减地保持一个采样周期。由图 1-6 (b) 求得零阶保持器的传递函数 $G_H(s)$ 为

$$G_H(s) = \frac{1 - e^{-T_0 s}}{s} \quad (1-16)$$

由式 (1-16) 求得零阶保持器的频率特性为

$$G_H(j\omega) = T_0 \frac{\sin \frac{\omega T_0}{2}}{\frac{\omega T_0}{2}} \cdot e^{-j \frac{T_0}{2} \omega} \quad (1-17)$$

从图 1-5 看到，经由零阶保持器转换得到的连续信号具有阶梯形状，它并不等于采样前的连续信号 $\varepsilon(t)$ 。平均地看，由零阶保持器转换得到的连续信号（图 1-5 中点虚线），

在时间上要迟后于采样前的连续信号。式 (1-17) 表明, 这个迟后时间等于采样周期的一半, 即 $T_0/2$ 。

零阶保持器相对其它类型的保持器具有实现容易及迟后时间小的优点, 是在数字控制系统中应用最广泛的一种保持器。

二、一阶保持器

一阶保持器是一种基于两个采样值 $\varepsilon(nT_0)$ 与 $\varepsilon[(n+1)T_0]$ 按线性外推规律保持脉冲序列 $\varepsilon^*(t)$ 的保持器。线性外推函数的斜率为 $\{\varepsilon(nT_0) - \varepsilon[(n-1)T_0]\}/T_0$, 而外推函数值为

$$\varepsilon(nT_0 + \tau) = \varepsilon(nT_0) + \frac{\varepsilon(nT_0) - \varepsilon[(n-1)T_0]}{T_0} \cdot \tau \quad (1-18)$$

式中 $\tau = t - nT_0$;
 $nT_0 \leq t \leq (n+1)T_0$

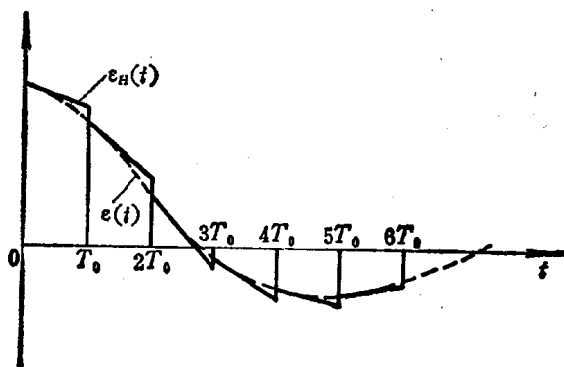


图1-7 一阶保持器的输出曲线

基于线性外推规律得到的一阶保持器的输出信号 $\varepsilon_H(t)$ 示于图 1-7。根据输出信号 $\varepsilon_H(t)$ 可求取一阶保持器的时域

特性 $g_H(t)$ ，并由时域特性 $g_H(t)$ 求得相应的频率特性为

$$G_H(j\omega) = T_0 \sqrt{1 + (T_0\omega)^2} \left(\frac{\sin \frac{\omega T_0}{2}}{\frac{\omega T_0}{2}} \right)^2 \cdot e^{-j(\omega T_0 - \tan^{-1} \omega T_0)} \quad (1-19)$$

从式 (1-19) 可见，一阶保持器的迟后相移较零阶保持器的为大，其平均相移约等于零阶保持器平均相移的两倍。由于这个原因，数字控制系统一般极少采用一阶保持器，更不用高阶保持器，而普遍采用零阶保持器。