高等学校教学用書

理論力学

下册　第二分册

E. Л. 尼古拉依著

高等教育出版社

高等学校教学用書

理論力学

下册　第二分册

E. Л. 尼古拉依著
徐芝綸　季文美譯

高等教育出版社

本書係根據蘇聯技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的尼古拉依（Е. Л. Николаи）著"理論力學"（Теоретическая механика）1952年第十六版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定爲高等工業學校教科書。

本書中譯本原擬分上下兩册出版，現因急於供應需要，下册又分兩分册出版。下册第二分册的內容包括"拉格郞日方程式""微幅振動"兩篇及"理論力學發展簡史"。

本書上册由商務印書館出版，下册第一分册起改由本社出版。

理　論　力　学

下册　第二分册

Е. Л. 尼古拉依著

徐芝綸　季文美譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

（北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號）

商務印書館上海廠印刷　新華書店總經售

書號 13010·170　開本 850×1168 1/32　印張 6 1/16　字數 133,000

一九五四年六月上海第一版

一九五七年一月上海第六次印刷

印數 14,001—17,000　定價(8) ¥ 0.74

下册第二分册目錄

第三篇　拉格郎日方程式

第四篇　微幅振動

第三篇　拉格郎日方程式

第二十章　廣義坐標與廣義力

§120　自由度數．廣義坐標

在§55裏，我們曾有機會講到自由度數與廣義坐標的概念。但在那一節裏，只是順便提到這兩個概念。現在，它們將成爲我們注意的中心，並將作爲以後所有一切論證的基礎。

提醒一下：設一個機械系統中所有各點的位置可用某幾個量完全決定（正如同空間一點的位置可用它的三個笛卡兒坐標決定一樣），則這幾個量稱爲該系的廣義坐標。決定該系位置的獨立廣義坐標的數目稱爲自由度數。

現在舉例說明以上所述。

在§55裏曾以曲柄機構（圖196）爲例。這個系的所有各點的位置可完全決定於一個量——曲柄的轉角 φ（當然，假定這機構的所有各構件都是絕對剛固的）。因此，角 φ 就是這個系的廣義坐標。又因爲這個系的所有各點的位置可用一個廣義坐標決定，故曲柄機構是具有一個自由度的系的實例。

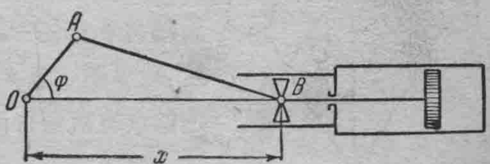

圖 196

我們也可以不選用角 φ 作爲曲柄機構的廣義坐標，而選用任一個其他的量（只要它能決定這機構所有各點的位置），例如十字頭 B 距機軸軸線 O 的距離 x（圖196）。一般必須指出，選擇一個系的廣義坐標，總是具有極大的任意性的。

當然，"兩個"廣義坐標 φ 與 x 的存在毫不影響這一結論：曲柄機構

是具有"一個"自由度的系。再一次強調指出：一個系的"獨立"廣義坐標的數目稱爲自由度數。可是坐標 φ 與 x 顯然不是獨立的；相反地，x 的值可決定於 φ，即，x 是 φ 的函數：

$$x=x(\varphi)。$$

考察三角形 AOB，極易得出以角 φ 表達 x 值的表達式❶

$$x=r\cos\varphi+l\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi},$$

式中 r 是曲柄 OA 的長度，l 是連桿 AB 的長度，而

$$\lambda=\frac{r}{l}。$$

這樣，曲柄機構只有一個獨立坐標，因此也只有一個自由度。用角 φ 可決定機構的位置，故不再需要第二個坐標 x；在這一觀點，x 這個量是多餘的坐標。但以後可見，在某些情形下，引用這種多餘坐標有怎樣的益處。

現在，設有繞鉛直軸轉動的離心調速器(圖 197)。爲了決定這個系所有各點的位置，必須指定兩個量：例如調速器的轉角 φ 和任一斜桿與鉛直線所成的角 α。在這裏，坐標 φ 與 α 是彼此獨立的。因此，離心調速器具有兩個自由度。

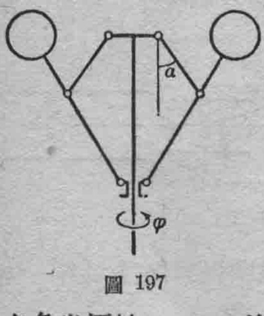

圖 197

假想有由 n 個質點 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 所組成的一個機械系統。設這個系具有 k 個自由度，並用 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ 代表它的獨立廣義坐標。取直角坐標軸 x, y, z，並用 x_i, y_i, z_i 代表點 M_i 的笛卡兒坐標。我們已經知道，這個系的所有各點的位置，因而這些點的笛卡兒坐標的值，可由 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ 完全決定。換句話說，笛卡兒坐標 x_i, y_i, z_i 是廣義坐標 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ 的函數。

❶ 見本書第一册(運動學)，§ 78，例 26。

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \cdots, q_k), \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \cdots, q_k), \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \cdots, q_k)。\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

可是注意,只有在這個系所受的約束不隨時間而變的情形下,關係(1)才成立。在§55裏已經指出,隨着時間變化的約束是可能存在的。現在舉出這種約束的一個例子。設有小物塊 M 掛在細繩 MOA 的一端,細繩穿過靜止的圓環 O(圖198)。物塊 M 將視爲質點,而細繩 MOA 將作爲不會伸長並且沒有重量。其次,假定以常速度 c 抽動細繩的 A 端。於是得一個變長度的數學擺;用 l 代表長度 OM,得

$$l = l_0 - ct, \qquad (2)$$

式中 l_0 代表這擺在瞬時 $t=0$ 的長度,

這例題中的約束(即限制物塊 M 自由運動的條件)是:物塊至固定點 O 的距離應當是 l,而這距離按規律(2)隨着時間變化。這是約束隨着時間變化的一個例子。

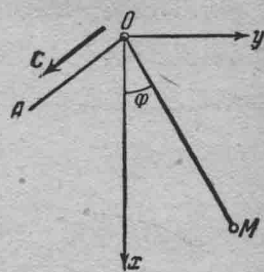

圖 198

在每一瞬時 t,點 M 的位置完全決定於細繩 OM 與鉛直線所成的角 φ。這個變長度的擺具有一個自由度,而角 φ 可取爲廣義坐標。

現在取直角坐標軸 x 與 y,如圖198所示,並用 x 與 y 代表點 M 對於這兩個軸的坐標。得

$$x = l\cos\varphi,$$
$$y = l\sin\varphi,$$

或

$$x = (l_0 - ct)\cos\varphi,$$
$$y = (l_0 - ct)\sin\varphi。$$

顯然,在這情形下,笛卡兒坐標不僅是廣義坐標 φ 的函數,而且也是時間 t 的函數。

一般地說，設物系所受的約束有些是隨時間而變的，則這系的所有各點的笛卡兒坐標將不僅是廣義坐標的函數，而且是時間的函數；在這情形下，代替方程式(1)的是

$$\left.\begin{aligned} x_i&=x_i(q_1,q_2,\cdots,q_k,t),\\ y_i&=y_i(q_1,q_2,\cdots,q_k,t),\\ z_i&=z_i(q_1,q_2,\cdots,q_k,t)。\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

仿照菠爾茨曼，我們將不隨時間而變的約束稱爲不變約束，以區別於變約束，卽隨時間而變的約束。

所以，設某一個系的約束都是不變約束，則這個系的所有各點的笛卡兒坐標以式(1)與廣義坐標相關連；設某一個系的約束有些是變約束，則須以方程式(3)代替方程式(1)。

§ 121 廣義力

拉格郎日引用了系的廣義坐標這概念作爲他的解析力學[1]的基礎。隨着這一概念，廣義力的概念也在拉格郎日力學裏起着重要的作用。每一個廣義坐標都有一個與之對應的廣義力。

設有機械系統，由 n 個質點 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ (圖 199) 所組成。假定這系統具有 k 個自由度，並用 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ 代表彼此獨立的廣義坐標。作用於系統內各點的力令各爲 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_n$。現在來說明，如何可以算出對應於坐標 q_1 的廣義力。

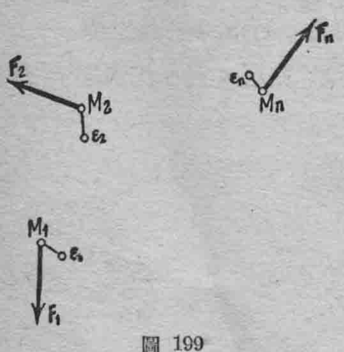

圖 199

爲計算這廣義力，進行如下。給坐標 q_1 一個微小的增量 δq_1，但保持其餘的坐標不變。坐標 q_1 的這個微小改變將引起系的所有各點的微小位移 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$。注意，因爲位移 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$

[1] 拉格郎日著：解析力學(由法文譯爲俄文，共兩卷)，1950 年版。

是系的約束所容許的(這些約束容許與坐標 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ 的改變相對應的任何位移),所以位移 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 的總體是系的虛位移之一。

現在來計算力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_n$ 因位移 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 而作的功的和

$$\sum F_i\, \varepsilon_i \cos(\boldsymbol{F}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_i),$$

並使這功的和等於某一個因子 Q_1 與廣義坐標的增量 δq_1 的乘積，亦卽令

$$\sum F_i\, \varepsilon_i \cos(\boldsymbol{F}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_i) = Q_1\, \delta q_1 。$$

這個等式所決定的量 Q_1 卽稱爲對應於坐標 q_1 的廣義力。

同樣地進行,可求出對應於其他坐標 $q_2, \cdots, q_k$ 的廣義力 $Q_2, \cdots, Q_k$。重複一遍：爲求出對應於任一個坐標 q_i 的廣義力 Q_i，必須給這坐標一個微小增量 δq_i(其餘的坐標保持不變),並計算所有各力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_n$ 因作用點有位移而作的功的和；將這些功的和除以 δq_i，卽得所求的廣義力。

根據以上所述,可以說：所謂對應於坐標 q_i 的廣義力,就是這樣的一個量，它和增量 δq_i 的乘積就等於作用於系的各力因位移(對應於增量 δq_i)而作的功。

不要以爲這樣求得的廣義力一定具有“力”的因次,卽一定是按字面上的意義來講的“力”。由於乘積 $Q_i\, \delta q_i$ 應該具有功的因次，很容易斷定：設 q_i 是某一個長度，則 Q_i 具有力的因次。但是，設 q_i 是某一個角,則 Q_i 應該具有“力乘以長度”的因次,卽力矩的因次；設 q_i 是一個體積,則 Q_i 應該具有“力除以面積”的因次,卽應力的因次,餘類推。

這樣,在拉格郞日的“解析力學”裏,每一個廣義坐標都有一個與之對應的廣義力。廣義力的數目等於系的廣義坐標的數目。

在 § 51 和 § 52 裏已經說過,作用於一個機械系統的所有各力總可以按兩種方式分爲兩組．或分爲外力與內力，或分爲主動力與約束反力。不言而喻,廣義力亦可按此分組：一方面可分爲廣義外力與廣義內力,另一方面可分爲廣義主動力與廣義約束反力。

現在要着重地指出:設一個系的約束是理想約束,則廣義約束反力都等於零。

事實上,爲求出對應於坐標 q_i 的廣義反力,必須計算當這個系有了對應於坐標增量 δq_i 的位移時約束反力所作的功的和。前面已經指出,這位移一定是該系的虛位移之一。而我們又知道,理想約束的反力因任何虛位移而作的功的和等於零。由此可見,我們所留意的廣義反力一定等於零。這簡單的註解說明:用廣義坐標法解答某一問題,應當將作用於系的力分爲主動力與約束反力而不應分爲外力與內力。設所處理的是理想約束,——而我們知道,將摩擦力計入主動力之內,就總可以把約束看作是理想的,——則當求廣義力時,約束反力自然不在計算之列。拉格郎日法的極大優點卽在於此。

§122 廣義力計算例題

現在舉例說明廣義力的求法。

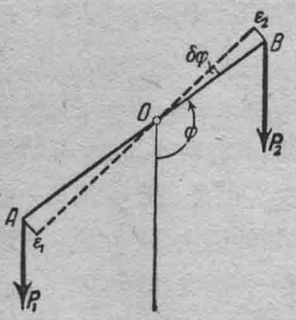

圖 200

例 15. 槓桿 AB,可繞軸 O 轉動,兩端各受有鉛直力 $\boldsymbol{P}_1$ 與 $\boldsymbol{P}_2$; $OA=a$, $OB=b$。取槓桿與鉛直線所成的角 φ 爲廣義坐標 (圖 200),求對應於這角的廣義力。

解 該系具有"一個"自由度;角 φ 可取爲該系的廣義坐標。

爲求出對應於角 φ 的廣義力(稱它爲 Q),給角 φ 一個增量 $\delta\varphi$。槓桿轉過一個角 $\delta\varphi$;力 $\boldsymbol{P}_1$ 與 $\boldsymbol{P}_2$ 的作用點各得到對應的微小位移 $\varepsilon_1=a\,\delta\varphi$ 與 $\varepsilon_2=b\,\delta\varphi$,方向垂直於直線 AB。求出力 $\boldsymbol{P}_1$ 與 $\boldsymbol{P}_2$ 因位移 ε_1 與 ε_2 而作的功的和,並令這功的和等於 $Q\,\delta\varphi$,得

$$P_1\varepsilon_1 \sin\varphi - P_2\varepsilon_2 \sin\varphi = Q\,\delta\varphi,$$

或將 ε_1 與 ε_2 的值代入而得

$$(P_1a - P_2b)\sin\varphi\delta\varphi = Q\,\delta\varphi,$$

由此即得所求的廣義力

$$Q=(P_1a-P_2b)\sin\varphi。$$

可見 Q 就是力 $\boldsymbol{P}_1$ 與 $\boldsymbol{P}_2$ 對於點 O 的矩的和。

例 16. 在離心調速器的圓球的中心 B_1 與 B_2 (圖 201) 各有鉛直力 $\boldsymbol{P}$ (球重)；$A_1B_1=A_2B_2=l$。取角 α (桿 A_1B_1 或 A_2B_2 與鉛直線所成的角) 與角 φ (調速器的轉角) 爲廣義坐標，求對應的廣義力。

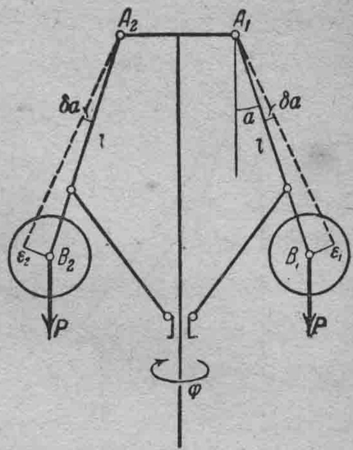

圖 201

解 所求的對應於角 α 與 φ 的廣義力各用 Q_α 與 Q_φ 代表。先求 Q_α。

給角 α 一個增量 $\delta\alpha$ (角 φ 則保持不變)；點 B_1 與 B_2 將各有位移 ε_1 與 ε_2，分別垂直於直線 A_1B_1 與 A_2B_2，並且 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=l\,\delta\alpha$。求出力 $\boldsymbol{P}$ 因位移 ε_1 與 ε_2 而作的功的和，並令這個和等於乘積 $Q_\alpha\,\delta\alpha$，得

$$-P\varepsilon_1\sin\alpha-P\varepsilon_2\sin\alpha=Q_\alpha\,\delta\alpha$$

或

$$-2Pl\sin\alpha\,\delta\alpha=Q_\alpha\,\delta\alpha,$$

由此得

$$Q_\alpha=-2Pl\sin\alpha。$$

其次求廣義力 Q_φ。給角 φ 一個增量 $\delta\varphi$，角 α 保持不變。這就是說，組成機構的各桿的相對位置保持不變，而調速器繞鉛直軸轉過了微小角 $\delta\varphi$。這樣，力 $\boldsymbol{P}$ 並不作任何的功(力的作用點的位移垂直於力的方向)。因此，

$$Q_\varphi\,\delta\varphi=0,$$

由此得

$$Q_\varphi=0。$$

例 17. 長 l_1 的直桿 OA 用鉸鏈掛在固定點 O (圖 202)；另一長 l_2 的直桿 AB 用鉸鏈掛在點 A。在點 A 與 B 各作用有鉛直力 $\boldsymbol{P}_1$ 與 $\boldsymbol{P}_2$。取桿 OA 及 AB 與鉛直線所成的角 φ_1 及 φ_2 爲這個系的廣義坐標，求對應的廣義力。

解 用 Q_1 與 Q_2 代表對應於角 φ_1 與 φ_2 的廣義力。先求力 Q_1。

給角 φ_1 一個增量 $\delta\varphi_1$ (角 φ_2 則保持不變)。桿 OA 繞點 O 轉過了角 $\delta\varphi_1$；點 A 得一個位移，大小等於 $\varepsilon_1=l_1\delta\varphi_1$ 而方向垂直於直線 OA。因角 φ_2 保持不變，故桿 AB 保持平行，即只有平行移動；所以點 B 得一個位移 ε_2，等於並平行於點 A 的位移 ε_1。求出力 $\boldsymbol{P}_1$ 與 $\boldsymbol{P}_2$ 因位移 ε_1 與 ε_2 而作的功的和，得

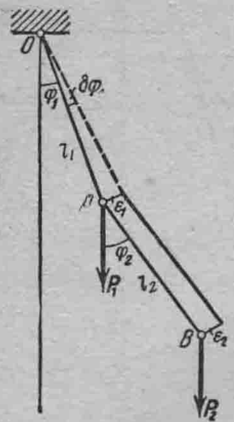

圖 202

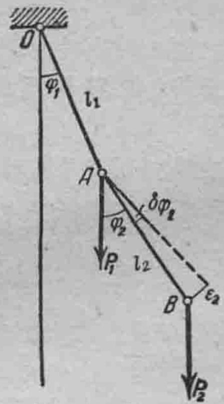

圖 203

$$-P_1\varepsilon_1\sin\varphi_1-P_2\varepsilon_2\sin\varphi_1=Q_1\delta\varphi_1,$$

或令 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=l_1\delta\varphi_1$ 而得

$$-(P_1+P_2)\,l_1\sin\varphi_1\,\delta\varphi_1=Q_1\delta\varphi_1,$$

由此得

$$Q_1=-(P_1+P_2)\,l_1\sin\varphi_1\text{。}$$

再來計算對應於角 φ_2 的廣義力 Q_2。現在,令角 φ_1 保持不變而給角 φ_2 一個增量 $\delta\varphi_2$ (圖 203)。桿 OA 將保持不動,桿 AB 則繞點 A 轉過角 $\delta\varphi_2$。點 A 的位移等於零;點 B 則得一個位移,大小等於 $\varepsilon_2=l_2\delta\varphi_2$ 而方向垂直於直線 AB。因此,力 $\boldsymbol{P}_1$ 的功等於零;計算力 $\boldsymbol{P}_2$ 的功,得

$$-P_2\,\varepsilon_2\sin\varphi_2=Q_2\delta\varphi_2,$$

或

$$-P_2l_2\sin\varphi_2\delta\varphi_2=Q_2\delta\varphi_2,$$

由此得

$$Q_2=-P_2l_2\sin\varphi_2\text{。}$$

§123 廣義力表以力在笛卡兒坐標軸上的投影．有勢的力的情形

以後將須要用到廣義力的表達式,表以各力在笛卡兒坐標軸上的投影。現在來導出這些公式。

設有由 n 個質點 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 所組成的機械系統。假定這系具有 k 個自由度,並用 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ 代表它的獨立廣義坐標。取直角坐

標軸 x, y, z 並用 x_i, y_i, z_i 代表點 M_i 的笛卡兒坐標。在 §120 裏已經看到，笛卡兒坐標 x_i, y_i, z_i 以下列等式與廣義坐標相關聯：

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \cdots, q_k, t), \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \cdots, q_k, t), \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \cdots, q_k, t)。 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

爲了更大的一般性，這裏假定系的約束有些是變約束；我們已經知道，設系的所有一切約束都是不變的（即不隨時間而變），則公式（1）的右邊將不是時間 t 的顯函數。

現在假設系的各點受有力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_n$，而來計算對應於廣義坐標 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ 的廣義力 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_k$。

給坐標 q_1 一個增量 δq_1，其餘的坐標保持不變（注意，在變約束的情形下計算廣義坐標時，時間 t 也必須保持不變），求點 M_i 的對應位移 $\boldsymbol{\varepsilon}_i$。

廣義力 Q_1 可由下列等式求得：

$$Q_1\delta q_1 = \sum F_i \varepsilon_i \cos(\boldsymbol{F}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_i)。 \tag{2}$$

但力 $\boldsymbol{F}_i$ 的功亦可表以已知的公式

$$F_i \varepsilon_i \cos(\boldsymbol{F}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_i) = X_i\delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i, \tag{3}$$

式中 X_i, Y_i, Z_i 是力 $\boldsymbol{F}_i$ 在軸 x, y, z 上的投影，而 $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ 是當點 M_i 發生位移 $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ 時坐標 x_i, y_i, z_i 所得的增量。

坐標 x_i, y_i, z_i 的這些增量極易由公式（1）求得。事實上，據公式（1），坐標 x_i, y_i, z_i 是自變量 $q_1, q_2, \cdots, q_k, t$ 的函數；當自變量 q_1 得到增量 δq_1 而其餘的自變量保持不變時，這些函數將各得到一定的增量 $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$。應用微分學上的已知公式，得

$$\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1}\delta q_1,\quad \delta y_i = \frac{\partial y_i}{\partial q_1}\delta q_1,\quad \delta z_i = \frac{\partial z_i}{\partial q_1}\delta q_1。$$

將增量 $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ 的這些值代入等式（3），再將這樣得到的力 $\boldsymbol{F}_i$ 的功的表達式代入公式（2），得

$$Q_1\delta q_1=\sum\left(X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_1}+Y_i\frac{\partial y_i}{\partial q_1}+Z_i\frac{\partial z_i}{\partial q_1}\right)\delta q_1。$$

在這等式的右邊，δq_1 是所有各加項的公共因子；將這因子移到連加號之前，得

$$Q_1\delta q_1=\delta q_1\sum\left(X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_1}+Y_i\frac{\partial y_i}{\partial q_1}+Z_i\frac{\partial z_i}{\partial q_1}\right);$$

消去兩邊的 δq_1 以後，即得下列公式中的第一式：

$$\left.\begin{aligned}Q_1&=\sum\left(X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_1}+Y_i\frac{\partial y_i}{\partial q_1}+Z_i\frac{\partial z_i}{\partial q_1}\right),\\ Q_2&=\sum\left(X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_2}+Y_i\frac{\partial y_i}{\partial q_2}+Z_i\frac{\partial z_i}{\partial q_2}\right),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ Q_k&=\sum\left(X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k}+Y_i\frac{\partial y_i}{\partial q_k}+Z_i\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right)。\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

上列公式中的其餘各式可與第一式同樣導出。這就是廣義力的表達式，用力 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_n$ 在笛卡兒坐標軸上的投影來表示。

在一個重要的特殊情形下，即當作用力 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_n$ 有勢的時候，以上所導出一般公式（4）可大爲簡化。我們知道（見 § 79），在這情形下，有公式

$$X_i=-\frac{\partial V}{\partial x_i},\quad Y_i=-\frac{\partial V}{\partial y_i},\quad Z_i=-\frac{\partial V}{\partial z_i},$$

其中的

$$V=V(x_1,y_1,z_1,x_2,\cdots,z_n)\qquad(5)$$

是系的對應於力 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_n$ 的勢能。

將上面 X_i,Y_i,Z_i 的表達式代入公式（4）的第一式，得

$$Q_1=-\sum\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial q_1}+\frac{\partial V}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial q_1}+\frac{\partial V}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial q_1}\right)。\qquad(6)$$

另一方面，將笛卡兒坐標的值（1）代入勢能的表達式（5），得

$$V=V(q_1,q_2,\cdots,q_k,t)。$$

必須指出，設系的所有一切約束都是不變約束，則式(1)不包含時間 t，因而勢能的上一表達式也不包含 t；在這情形下，系的勢能將僅是廣義坐標的函數：

$$V=V(q_1,q_2,\cdots,q_k)。$$

現在來求勢能 V 對於廣義坐標 q_1 的偏導數。留意 q_1 是經由笛卡兒坐標 x_i,y_i,z_i 進入 V 的表達式的，並應用複合函數微分的公式，得

$$\frac{\partial V}{\partial q_1}=\sum\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial q_1}+\frac{\partial V}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial q_1}+\frac{\partial V}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial q_1}\right)。$$

將這結果與等式(6)比較，即得下列公式中的第一式：

$$Q_1=-\frac{\partial V}{\partial q_1},\ Q_2=-\frac{\partial V}{\partial q_2},\ \cdots,\ Q_k=-\frac{\partial V}{\partial q_k}。\tag{7}$$

其餘各式可同樣導出。

這些公式的理論價值將在以後說明。現在只提出它們的實用價值：在系的勢能可以很容易求出的情形下，公式(7)提供一個計算廣義力的最便利的方法。

現在用一個簡單的例題說明這些公式的應用：

例 18. 假定例 17 中的力 $\boldsymbol{P}_1$ 與 $\boldsymbol{P}_2$ 是常量，試用公式(7)解答這問題。

解　力 $\boldsymbol{P}_1$ 與 $\boldsymbol{P}_2$ 的大小和方向不變。這樣的力(例如重力)已知是有勢的。取通過點 O 的鉛直線為軸 z (圖 204)；取點 O 以下 l_1+l_2 的一點為 z 的起算點，並取軸 z 朝上。

系的勢能可表以公式

$$V=P_1z_1+P_2z_2。$$

另一方面，

$$z_1=l_1+l_2-l_1\cos\varphi_1,$$

$$z_2=l_1+l_2-l_1\cos\varphi_1-l_2\cos\varphi_2。$$

將 z_1 與 z_2 的這些值代入上面 V 的公式，得系的勢能的表達式，表以廣義坐標：

$$V=(P_1+P_2)(l_1+l_2-l_1\cos\varphi_1)-P_2l_2\cos\varphi_2。$$

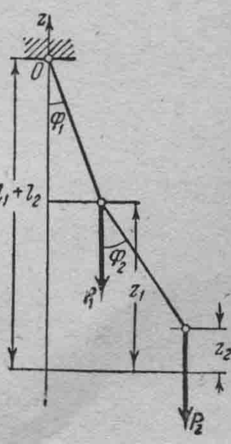

圖 204

現在應用公式(7),得

$$Q_1 = -\frac{\partial V}{\partial \varphi_1},\ Q_2 = -\frac{\partial V}{\partial \varphi_2};$$

由此得 $$Q_1 = -(P_1+P_2)\,l_1 \sin\varphi_1,\ Q_2 = -P_2 l_2 \sin\varphi_2,$$

與 § 122 中所得的結果相符。