

航空陀螺仪原理

南京航空学院航空陀螺仪原理编写组

国防工业出版社

内 容 简 介

本书内容包括陀螺仪基本理论及基本类型陀螺仪的原理与误差。全书分四篇共十一章。在说明陀螺仪基本特性及其动力学问题的基础上,比较系统地阐述了航空上应用的陀螺地平仪、航向陀螺仪和速率陀螺仪等常规陀螺仪的原理与误差,并且比较系统地阐述了惯性导航系统中应用的挠性陀螺仪和静电陀螺仪等新型陀螺仪的原理与误差。本书主要作为航空陀螺及惯性导航专业的教材使用,此外也可供从事陀螺仪及惯性导航方面工作的工程技术人员参考。

航空陀螺仪原理

南京航空学院航空陀螺仪原理编写组

*

国防工业出版社 出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经营

国防工业出版社印刷厂印装

*

787×1092¹/₁₆ 印张 20⁵/₈ 480千字

1981年6月第一版 1981年6月第一次印刷 印数: 0,001—1,800册

统一书号: 15034·2204 定价: 2.15元

目 录

第一篇 陀螺仪基础理论

第一章 陀螺仪的力学基础	1
§ 1-1 陀螺仪及其基本组成	1
§ 1-2 哥氏加速度	5
§ 1-3 转动惯量	8
§ 1-4 角动量	13
§ 1-5 角动量定理及欧拉动力学方程式	19
§ 1-6 研究陀螺仪运动的参考坐标系	23
§ 1-7 陀螺仪运动表示方法及坐标变换	29
第二章 陀螺仪的基本特性	33
§ 2-1 陀螺仪的运动现象	33
§ 2-2 两自由度陀螺仪的进动性	35
§ 2-3 两自由度陀螺仪的稳定性	41
§ 2-4 单自由度陀螺仪的基本特性	46
第三章 两自由度陀螺仪的动力学	48
§ 3-1 两自由度陀螺仪的运动方程式	48
§ 3-2 两自由度陀螺仪运动的基本分析	56
§ 3-3 两自由度陀螺仪的漂移分析	65
§ 3-4 两自由度陀螺仪的方块图及传递函数	78
第四章 单自由度陀螺仪的动力学	82
§ 4-1 单自由度陀螺仪的运动方程式	82
§ 4-2 单自由度陀螺仪运动的基本分析	86
§ 4-3 单自由度陀螺仪的漂移分析	91
§ 4-4 单自由度陀螺仪的方块图及传递函数	94

第二篇 两自由度陀螺仪的应用

第五章 陀螺地平仪	97
§ 5-1 陀螺地平仪的用途、基本原理和结构组成	97
§ 5-2 陀螺地平仪的典型修正装置及其修正原理	103
§ 5-3 陀螺地平仪的修正规律与修正误差	109
§ 5-4 陀螺地平仪的加速度误差	121
§ 5-5 陀螺地平仪的盘旋误差	126
§ 5-6 带有随动环装置的陀螺地平仪	133
§ 5-7 陀螺地平仪的主要参数选择问题	136
第六章 航向陀螺仪	140

§ 6-1	航向陀螺仪的用途、基本原理和结构组成	140
§ 6-2	航向陀螺仪的水平修正装置及其修正原理	144
§ 6-3	航向陀螺仪的方位稳定误差	147
§ 6-4	航向陀螺仪的支架误差	156
§ 6-5	航向陀螺仪的主要参数选择问题	160
§ 6-6	陀螺磁罗盘的基本原理	162
§ 6-7	陀螺罗经的基本原理	172
第七章	全姿态组合陀螺仪	182
§ 7-1	全姿态组合陀螺仪的用途及其结构方案	182
§ 7-2	航向姿态系统的基本工作原理	186

第三篇 单自由度陀螺仪的应用

第八章	速率陀螺仪	191
§ 8-1	速率陀螺仪的用途、作用原理和结构组成	191
§ 8-2	速率陀螺仪的动态过程	195
§ 8-3	速率陀螺仪的稳态误差	199
§ 8-4	简谐输入时速率陀螺仪的误差特性	204
§ 8-5	速率陀螺仪的主要参数选择问题	208
第九章	积分陀螺仪	213
§ 9-1	积分陀螺仪的作用原理与结构组成	213
§ 9-2	常值输入时积分陀螺仪的过渡过程及误差分析	215
§ 9-3	简谐输入时积分陀螺仪的误差特性	221
§ 9-4	积分陀螺仪的应用	224
§ 9-5	积分陀螺仪的主要参数选择问题	227

第四篇 挠性陀螺仪与静电陀螺仪

第十章	挠性陀螺仪	231
§ 10-1	挠性陀螺仪的基本原理	231
§ 10-2	动力调谐式挠性陀螺仪的结构与工作原理	235
§ 10-3	动力调谐式挠性陀螺仪的运动方程式	243
§ 10-4	动力调谐式挠性陀螺仪的运动分析	249
§ 10-5	动力调谐式挠性陀螺仪的漂移分析	256
§ 10-6	动力调谐式挠性陀螺仪的挠性接头	265
§ 10-7	挠性陀螺仪的特点及其应用	270
第十一章	静电陀螺仪	275
§ 11-1	静电陀螺仪的基本原理及其特点	275
§ 11-2	静电陀螺仪的结构组成	277
§ 11-3	球面电极对球形转子的静电吸力计算	283
§ 11-4	静电陀螺仪的支承作用原理	289
§ 11-5	静电陀螺仪的角度读取原理	298
§ 11-6	静电陀螺仪的运动方程式	306
§ 11-7	静电陀螺仪运动的基本分析	308
§ 11-8	影响静电陀螺仪漂移误差的因素	318

第一篇 陀螺仪基础理论

第一章 陀螺仪的力学基础

§ 1-1 陀螺仪及其基本组成

一、陀螺仪

工程上实际应用的陀螺仪，其核心是一个绕自转轴作高速旋转的转子。转子一般采用高比重金属材料例如不锈钢、黄铜或钨镍铜合金等，做成空心圆柱体(见图 1-1)或实心圆柱体；较为特殊的则采用铝或铍做成空心或实心球体。通常由陀螺电动机驱动，也有用其



图1-1 空心圆柱形陀螺转子

它驱动方法例如高压气体驱动，使转子绕自转轴高速旋转。磁滞陀螺电动机（见图 1-2）驱动时转子的转速一般为每分钟 24000 转，异步陀螺电动机（见图 1-3）驱动时则略低于该数值。陀螺转子的基本要素是其绕自转轴具有一定的角动量，以便得到所需的陀螺特性。

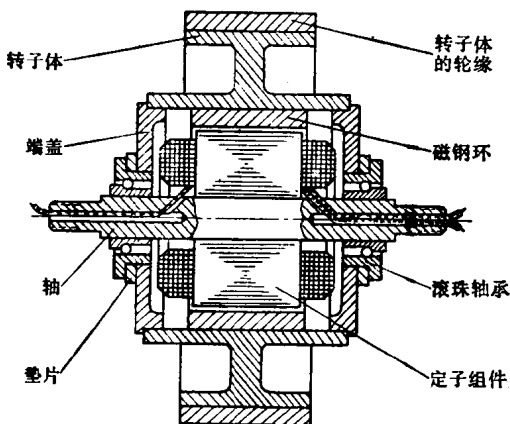


图1-2 磁滞陀螺电动机的结构

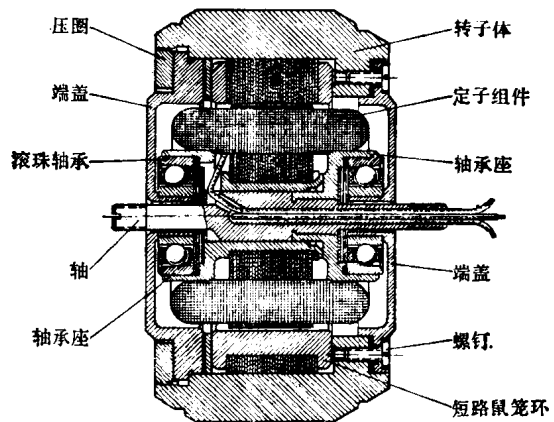


图1-3 异步陀螺电动机的结构

为了测量飞机或其它航行体的姿态和航向及其变化，必须把转子安装在环架上或支承上，使转子相对基座具有两个或三个转动自由度。该装置总体便构成陀螺仪。陀螺仪也常

简称为陀螺。

按照转子所具有转动自由度的数目，可分为三自由度陀螺仪和二自由度陀螺仪。若不计转子自转的转动自由度，则分为两自由度陀螺仪和单自由度陀螺仪。后者实际上是按照自转轴所具有转动自由度的数目来分类的。因转子的高速自转运动是产生角动量所需要的，故不计转子自转的转动自由度，即按自转轴所具有的转动自由度来分类时，陀螺仪自由度的数目恰好与它可用于测量的测量轴的数目相一致。本教材采用的是这种分类。

广义来说，陀螺仪是泛指测量运动物体相对惯性空间旋转的装置。由此，根据近代物理学为基础做成的这类测量装置，无论它基于何种特性原理，也无论其是否具有角动量效应，均定名为陀螺仪。例如，应用激光原理做成的测量转动角速度的装置，就叫做激光陀螺仪；应用各种基本粒子的陀螺磁效应做成的测量转角或角速度的装置，就叫做粒子陀螺仪，等等。但本教材仅是研究由刚体转子组成的陀螺仪，对于超出刚体转子范畴的陀螺仪，可参阅有关的陀螺技术书刊。

陀螺仪的主要功能是测量航行体的姿态角、航向角和角速度。它不仅是飞机驾驶和领航的重要仪器，也是飞机与导弹的自动控制系统和惯性导航系统中的关键部件，而且在航天和航海中也获得广泛的应用。

二、两自由度陀螺仪的基本组成

两自由度陀螺仪或称两自由度陀螺，是指自转轴具有两个转动自由度的陀螺仪。其基本组成如图 1-4 所示。由内环和外环组成的环架装置使陀螺自转轴获得两个转动自由度。

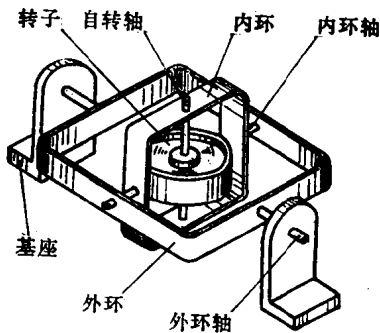


图1-4 两自由度陀螺仪的基本组成

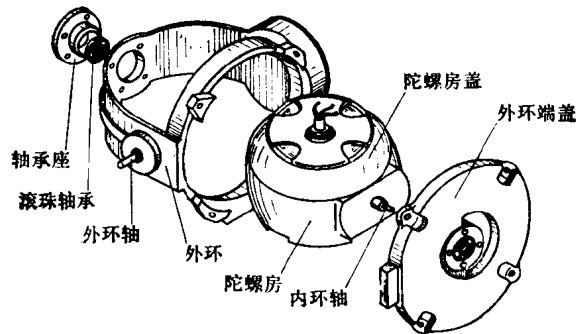


图1-5 常见的内、外环结构形状

陀螺转子借助自转轴上的一对轴承安装于内环中，内环借助内环轴上的一对轴承安装于外环中，外环借助外环轴上的一对轴承安装于基座或仪表壳体中。自转轴线与内环轴线垂直且相交，内环轴线与外环轴线垂直且相交；这三根轴线相交于一点时，该交点称为环架支点。陀螺转子由电动或气动等驱动绕自转轴高速旋转，转子连同内环可绕内环轴转动，转子连同内环和外环又可绕外环轴转动。对转子而言，具有绕自转轴、内环轴和外环轴这三个轴转动的自由度。而对自转轴而言，具有绕内环轴和外环轴这两个轴转动的自由度。也就是说，由相互正交的内、外环轴给陀螺自转轴提供了两个转动自由度。

在实际的陀螺仪中，内环和外环的材料一般采用铝合金或钢；采用钛合金可使环架的比重小且刚度大。其形状除了做成框形以外，还常做成如图 1-5 所示的结构，图示形状的内环俗称陀螺房。

常规陀螺仪环架轴上的支承一般采用滚珠轴承，但滚珠轴承的摩擦力矩限制了陀螺仪

精度的进一步提高。在惯性导航系统中应用的高精度陀螺仪，环架轴上的支承采用宝石轴承，内环则做成空心球形密封浮子（见图 1-6），并且用液体将外环和内环组合件悬浮起来，这种液浮支承的办法可以消除环架轴上支承的摩擦力矩。

应当指出，采用内、外环所组成的环架装置，并不是使陀螺获得转动自由度的唯一方法。惯性导航系统中为了提高陀螺仪的工作精度，还采用了各种无环架的支承方法。主要有以下几种：

动压气浮支承（见图 1-7） 转子上有一内圆球面，与表壳固连的轴上有一外圆球面，构成球面支承。两个球面的间隙仅几微米。当转子由磁滞电动机驱动绕自转轴高速旋转时，带动球面间隙内的气体运动而形成动压。如果转子相对支承中心位移时，则间隙变小，一侧的气体动压增大，而间隙变大，另一侧气体动压减小，使转子回到中心位置，从而起到支承转子的作用。该球面支承还允许转子绕垂直于自转轴的两个正交轴方向转动，因此自转轴具有两个转动自由度。

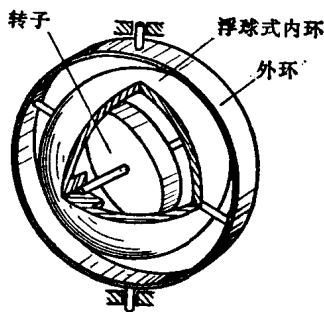


图1-6 液浮支承的两自由度陀螺仪

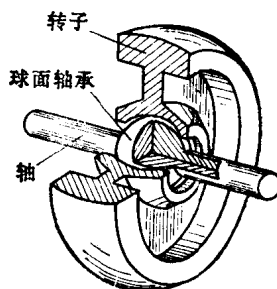


图1-7 动压气浮支承的两自由度陀螺仪

挠性支承（见图 1-8） 转子借助挠性接头与驱动轴相连。挠性接头是一种无摩擦的弹性支承，有细轴颈式与动力调谐式两种。挠性接头一方面传递磁滞电动机的转矩而带动转子绕自转轴高速旋转，另一方面又允许转子绕垂直于自转轴的两个正交轴方向转动很“柔软”，因此自转轴具有两个转动自由度。

静电支承（见图 1-9） 转子由铝或铍做成空心或实心球体，放置在超高真空的陶瓷球腔内。球腔壁上一般有三对电极，转子与电极的间隙仅几十微米。当电极接通高电压时，电极与转子之间形成很强的静电场；由于静电感应作用，电极对转子产生吸力。如果转子

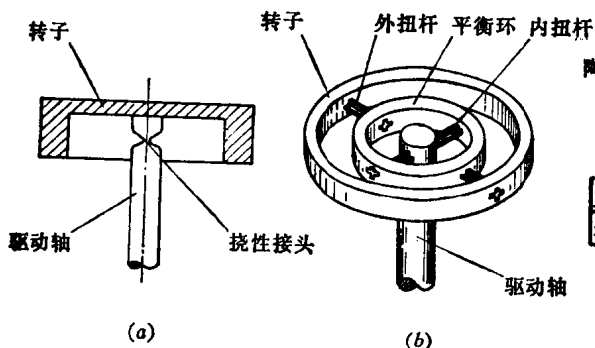


图1-8 挠性支承的两自由度陀螺仪
(a) 一细轴颈式；(b) 一动力调谐式。

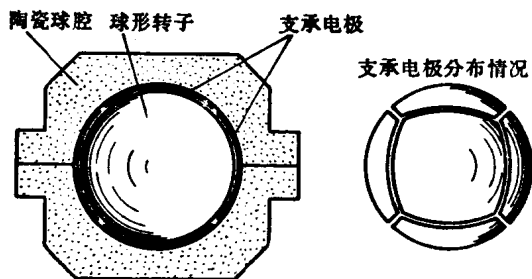


图1-9 静电支承的两自由度陀螺仪

相对球腔中心位移时，则调节间隙变小一端电极上的控制电压减小，从而静电吸力减小，同时调节间隙变大一端电极上的控制电压增大，从而静电吸力增大，使转子回到中心位置。静电支承的转子除了可绕自转轴高速旋转外，还可绕垂直于自转轴的两个正交轴方向转动，因此自转轴具有两个转动自由度。

上述三种支承方法都没有环架装置，也就消除了环架轴上支承的摩擦，可是自转轴都具有两个转动自由度，从而构成了两自由度陀螺仪。但要注意，在动压气浮支承和挠性支承的情况下，自转轴的转角范围受到限制，只适合于小角度工作；而在静电支承的情况下，自转轴的转角范围则不受限制，可适合于大角度工作。

三、单自由度陀螺仪的基本组成

单自由度陀螺仪或称单自由度陀螺，是指自转轴具有一个转动自由度的陀螺仪。其基本组成如图 1-10 所示。同两自由度陀螺仪相比，它只有内环而无外环。

陀螺转子借助自转轴上的一对轴承安装于内环中，内环借助内环轴上的一对轴承安装于基座或仪表壳体中。对转子而言，具有绕自转轴和内环轴这两个轴转动的自由度。对自转轴而言，具有绕内环轴转动的自由度。也就是说，由内环轴给陀螺自转轴提供了一个转动自由度。

在实际的陀螺仪中，内环的形状除了做成框形以外，同样常做成陀螺房式的结构。为了消除内环轴上支承的摩擦以提高陀螺仪的工作精度，可采用液浮支承或静压气浮支承的办法（分别见图 1-11 和图 1-12），即把内环做成圆筒形密封浮子，并且用液体或高压气体将内环组合件悬浮起来。

在航空上，两自由度陀螺仪广泛用来做成测量飞机姿态和航向的仪表，例如陀螺地平仪、航向陀螺仪和全姿态组合陀螺仪等；单自由度陀螺仪广泛用来做成测量飞机角速度的仪表，例如速率陀螺仪和陀螺转弯仪等。高精度的两自由度及单自由度陀螺仪，则用作惯导陀螺稳定平台和捷联式惯导系统的敏感元件。

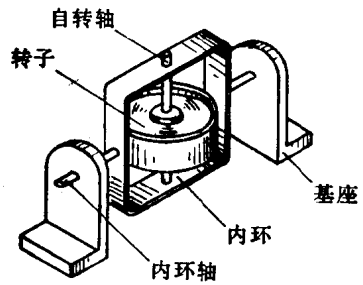


图1-10 单自由度陀螺仪的基本组成

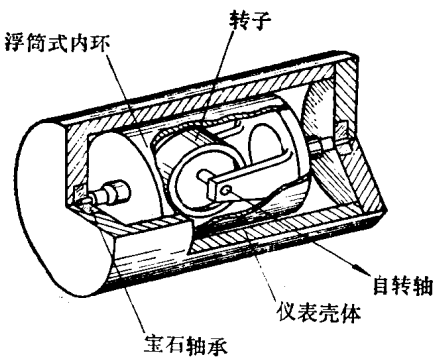


图1-11 液浮支承的单自由度陀螺仪

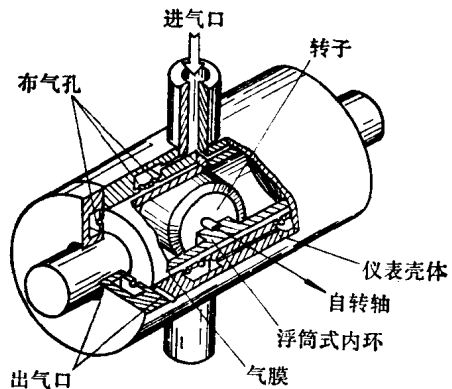


图1-12 静压气浮支承的单自由度陀螺仪

附带说明一点，在陀螺技术书刊中，上述关于陀螺仪自由度的两种分类均有采用，我们应该注意它们之间的对应关系。另外，关于环和轴的名称也很多，这里所说的环又叫平衡环或框架，内环又叫内平衡环或内框架，外环又叫外平衡环或外框架，自转轴又叫转子

轴，内环轴又叫内平衡环轴或内框架轴，外环轴又叫外平衡环轴或外框架轴，由内、外环所组成的环架又叫万向支架，环架支点又叫万向支点。

§ 1-2 哥氏加速度

一、哥氏加速度

陀螺仪中转子相对基座的转动，可看成是由转子相对环架的转动和环架相对基座的转动二者合成的。前者是相对运动，后者是牵连运动，并且该牵连运动为转动。

在牵连运动为转动的情况下，刚体内质点的加速度除了相对加速度和牵连加速度以外，还有一项附加加速度，这项附加加速度称为哥氏（哥里奥利斯）加速度。此时动点的绝对加速度 \bar{a} ，应等于相对加速度 \bar{a}_r 、牵连加速度 \bar{a}_e 与哥氏加速度 \bar{a}_c 三者的矢量和，即有如下关系：

$$\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_c \quad (1-1)$$

为了便于理解哥氏加速度的物理本质，以图 1-13 所示的小球运动为例。设小球以速度 \bar{U} ，在细杆上作匀速移动，细杆又带动小球以角速度 ω 绕固定轴作匀角速转动。小球的相对速度就是它在细杆上的移动速度。小球的牵连速度就是细杆上与小球相重合的那个点的速度；在这里细杆绕定轴转动使牵连点具有切向速度，即为小球的牵连速度。

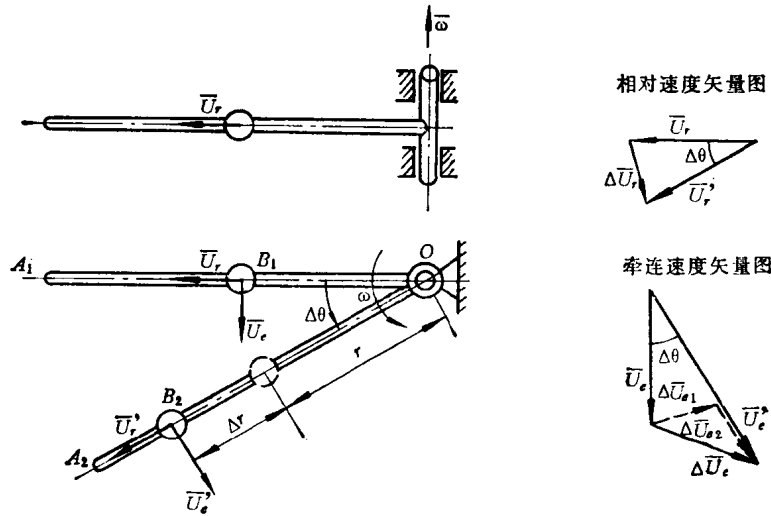


图1-13 牵连运动为转动时小球的速度变化

设瞬时 t ，细杆处于 OA_1 位置，小球在细杆上处于 B_1 位置。这时小球的相对速度用 \bar{U}_r 表示，其大小为 U_r ，方向沿 OA_1 ；小球的牵连速度用 \bar{U}_e 表示，其大小为 $U_e = \omega r$ ，方向与 OA_1 垂直。

经过 Δt 时间，细杆转动了 $\Delta\theta = \omega\Delta t$ 角度，处于 OA_2 位置；小球在细杆上移动了 $\Delta r = U_r\Delta t$ 距离，处于 B_2 位置。这时小球的相对速度用 \bar{U}'_r 表示，因小球在细杆上作匀速移动，故相对速度的大小仍然不变即 $U'_r = U_r$ ，但因细杆的牵连转动带动小球一起转动，故相对速度的方向改变成沿 OA_2 方向。小球的牵连速度用 \bar{U}'_e 表示，因小球的相对运动使得与小球相重合的牵连点改变到 B_2 位置，故牵连速度的大小改变成 $U'_e = \omega(r + \Delta r)$ ，又因细杆的牵连转动，故牵连速度的方向改变成与 OA_2 垂直了。

可见, 经过 Δt 时间, 小球的相对速度和牵连速度都有变化。在速度矢量图中 (见图 1-13), 相对速度变化量 $\Delta \bar{U}$, 表示了相对速度方向的变化, 牵连速度变化量 $\Delta \bar{U}_e$ 表示了牵连速度大小和方向的变化。将 $\Delta \bar{U}_e$ 分解为两个分量:

$$\Delta \bar{U}_e = \Delta \bar{U}_{e1} + \Delta \bar{U}_{e2}$$

式中 $\Delta \bar{U}_{e1}$ 表示了牵连速度方向的变化, $\Delta \bar{U}_{e2}$ 表示了牵连速度大小的变化。

我们知道, 要使速度的大小或方向发生变化, 必然要有加速度存在。下面来分析引起相对速度和牵连速度发生上述变化的加速度。

1. 使相对速度方向改变的加速度 从相对速度矢量图可得速度增量 $\Delta \bar{U}_r$ 的大小为:

$$\Delta U_r = 2U_r \sin \frac{\Delta \theta}{2} = 2U_r \sin \frac{\omega \Delta t}{2}$$

用 Δt 除以等式两边并求极限值, 得到加速度如下:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta U_r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2U_r \sin \frac{\omega \Delta t}{2}}{\Delta t} = \omega U_r$$

该加速度的方向可由 $\Delta t \rightarrow 0$ (即 $\Delta \theta \rightarrow 0$) 时 $\Delta \bar{U}_r$ 的极限方向看出, 它是垂直于 $\bar{\omega}$ 和 \bar{U}_r 所组成的平面。

这就是由细杆牵连转动的影响使小球相对速度方向改变的加速度。如果细杆没有牵连转动, 则小球相对速度的方向不会改变, 这项加速度是不存在的。

2. 使牵连速度方向改变的加速度 从牵连速度矢量图可得速度增量 $\Delta \bar{U}_{e1}$ 的大小为:

$$\Delta U_{e1} = 2U_{e1} \sin \frac{\Delta \theta}{2} = 2r\omega \sin \frac{\omega \Delta t}{2}$$

用 Δt 除以等式两边并求极限值, 得到加速度如下:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta U_{e1}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2r\omega \sin \frac{\omega \Delta t}{2}}{\Delta t} = r\omega^2$$

该加速度的方向可由 $\Delta t \rightarrow 0$ (即 $\Delta \theta \rightarrow 0$) 时 $\Delta \bar{U}_{e1}$ 的极限方向看出, 它是指向转动轴线的。

显而易见, 这项向心加速度就是小球的牵连加速度。它与小球的相对运动无关, 即使相对速度为零, 这项加速度也仍然存在。

3. 使牵连速度大小改变的加速度 从牵连速度矢量图可得速度增量 $\Delta \bar{U}_{e2}$ 的大小为:

$$\Delta U_{e2} = \omega(r + \Delta r) - \omega r = \omega \Delta r = \omega U_r \Delta t$$

用 Δt 除以等式两边并求极限值, 得到加速度如下:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta U_{e2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega U_r \Delta t}{\Delta t} = \omega U_r$$

该加速度的方向可由 $\Delta t \rightarrow 0$ (即 $\Delta \theta \rightarrow 0$) 时 $\Delta \bar{U}_{e2}$ 的极限方向看出, 它是垂直于 $\bar{\omega}$ 和 \bar{U}_r 所组成的平面。

这就是由小球相对运动的影响使小球牵连速度大小改变的加速度。如果小球没有相对运动, 则小球牵连速度的大小不会改变, 这项加速度是不存在的。

在上述三项加速度中, 第二项是一般的牵连加速度, 没有什么特殊之点; 第一项和第

三项都是由相对运动与牵连转动的相互影响而出现的附加加速度，也就是哥氏加速度。从物理本质上看，它是与一般的相对加速度或牵连加速度不同的。

综合第一项和第三项加速度，可得哥氏加速度的大小为：

$$a_g = 2\omega U, \quad (1-2)$$

而哥氏加速度的方向如图 1-14 所示。哥氏加速度 \vec{a}_g 垂直于牵连角速度 $\vec{\omega}$ 与相对速度 \vec{U} 所组成的平面，从 $\vec{\omega}$ 沿最短途径握向 \vec{U} 的右手旋进方向即为 \vec{a}_g 的方向。

上面所分析的是 $\vec{\omega}$ 与 \vec{U} 相垂直的情况。在 $\vec{\omega}$ 与 \vec{U} 成任意夹角的一般情况下，哥氏加速度的大小则为：

$$a_g = 2\omega U \sin(\widehat{\vec{\omega}, \vec{U}}) \quad (1-3)$$

而方向仍按右手旋进规则确定。

容易看出，当相对速度 \vec{U} 与牵连角速度 $\vec{\omega}$ 相平行时，牵连转动不会使相对速度的方向发生改变，相对运动也不会使牵连速度的大小发生改变，因此这种情况下哥氏加速度是等于零的。

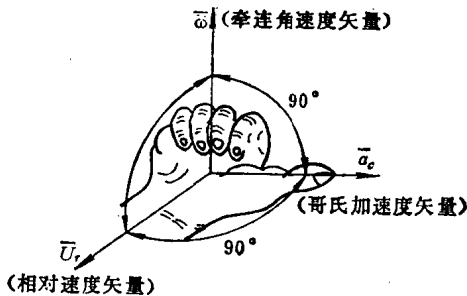


图1-14 哥氏加速度的方向

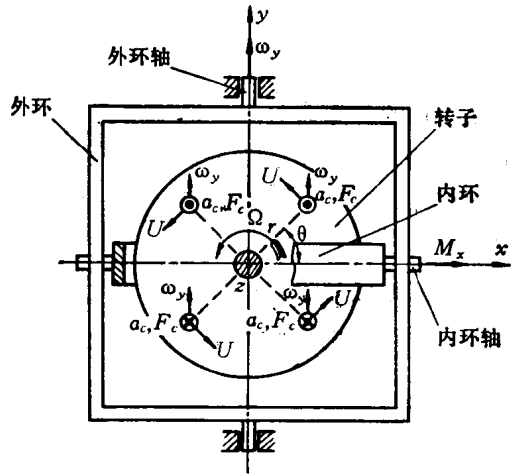


图1-15 陀螺转子内质点的哥氏加速度方向

二、陀螺转子内质点的加速度

现在来分析陀螺仪运动时转子内质点的加速度。参看图 1-15 (该图是从自转轴 z 的正向俯视陀螺仪)，设转子绕自转轴 z 的正向以角速度 Ω 相对内环转动，转子又连同内、外环绕外环轴 y 的正向以角速度 ω_y 相对基座转动。也就是说，转子内的质点都参与了这个相对运动和牵连运动，并且该牵连运动为定轴转动。这时转子内的质点具有以下加速度：

1. 相对加速度 转子内的质点都参与了绕自转轴的相对运动，各质点就有相对加速度。设转子绕自转轴以匀角速转动，则各质点相对速度的大小并不会改变，因而没有切向加速度；但各质点相对速度的方向却发生改变，表明存在向心加速度。所以，当转子绕自转轴匀角速转动时，转子内质点的相对加速度为向心加速度，其方向垂直于自转轴 z 并指向 z ，而大小是：

$$a_r = r\Omega^2$$

2. 牵连加速度 转子内的质点都参与了绕外环轴的牵连转动，各质点就有牵连加速度。设转子连同环架绕外环轴以匀角速转动，则各质点牵连速度的大小并不会改变，因而

没有切向加速度；但各质点牵连速度的方向却发生改变，表明存在向心加速度。所以，当转子绕外环轴匀角速转动时，转子内质点的牵连加速度都为向心加速度，其方向垂直于外环轴 y 并指向 y ，而大小是：

$$a_e = r\omega_y^2 \cos \theta$$

3. 哥氏加速度 由于相对运动与牵连转动的相互影响，转子内各质点存在哥氏加速度。参看图 1-15，各质点相对速度的大小为 $U_r = r\Omega$ ，方向沿切线方向；各质点牵连角速度的大小均为 ω_y ，方向均沿外环轴线方向。根据式(1-3)，得到转子内质点的哥氏加速度大小是：

$$a_g = 2\omega_y \Omega r \sin \theta \quad (1-4)$$

其方向按上述右手旋进规则确定。在第一和第二象限中，哥氏加速度方向垂直于转子的旋转平面且矢端朝上（图中用 \odot 表示）；在第三和第四象限中，哥氏加速度方向也垂直于转子的旋转平面但矢端朝下（图中用 \otimes 表示）。

从式(1-4)看出，转子内质点哥氏加速度的大小与该质点的位置有关，它是按角度 θ 成正弦变化，并按半径 r 成比例变化。图 1-16 表示了各质点哥氏加速度的分布规律，图中是取转子上的一个薄圆片，若取任意一个薄圆片，其分布规律都与此相同。

上面是以转子绕外环轴转动的情况来分析。如果转子绕内环轴转动，同样可按类似方法来分析，这里不再赘述。

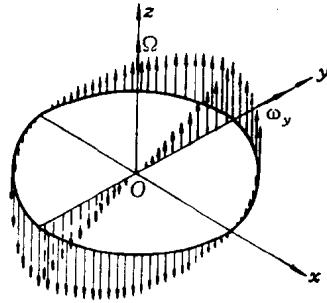


图1-16 转子内各质点哥氏加速度的分布规律

§ 1-3 转动惯量

一、转动惯量的定义和表达式

刚体内各质点的质量与其到某轴的距离平方之乘积的总和，称为刚体对该轴的转动惯量或惯性矩。此定义用式子表述就是：

$$J_l = \sum m_i r_i^2 \quad (1-5)$$

式中 J_l ——刚体对轴 l 的转动惯量；

Σ ——总和符号；

m_i ——刚体内任意质点的质量；

r_i ——该质点到轴 l 的距离。

质量是物体移动时惯性大小的量度，转动惯量则是物体转动时惯性大小的量度。物体的转动惯量愈大，愈不容易起动，一旦起动后也不容易停转，某些机器上的飞轮、陀螺转子等便是实例。

转动惯量的大小取决于物体质量的大小及质量分布的情况。几何形状相同的物体，材料比重较大即质量较大的，转动惯量也较大。质量相同而几何形状不同的物体，质量分布离转轴较远的，转动惯量也较大。一般来说，同一个物体对不同轴的质量分布情况不相同，所以它对不同轴的转动惯量也不相同；由于这个缘故，转动惯量一般应指明是对哪一个轴

而言的。

现在来看刚体对任意轴的转动惯量的表达式。见图 1-17 所示，在刚体内取任意一点 O ，直角坐标系 $Oxyz$ 与刚体固连， l 为过 O 点的任意轴，并与 x 、 y 、 z 各轴分别成 α 、 β 、 γ 夹角。

设刚体内任意一点 P 的质量为 m_i ，该质点到轴 l 的距离为 $PQ=r_i$ ，则刚体对任意轴 l 的转动惯量 J_l 同样是表示成：

$$J_l = \sum m_i r_i^2$$

此表达式可进一步推演。首先，由图中 $\triangle OPQ$ 得：

$$r_i^2 = OP^2 - OQ^2$$

用 x_i 、 y_i 、 z_i 代表点 P 的坐标，就有：

$$OP^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$$

注意到 OQ 是 OP 在轴 l 上的投影，而 OP 则等于 x_i 、 y_i 、 z_i 的几何和。根据投影定理，即几何和的投影等于各分量的投影之和，将 OP 以及 x_i 、 y_i 、 z_i 投影到轴 l 上，并注意 x_i 、 y_i 、 z_i 与轴 l 的夹角分别等于 α 、 β 、 γ ，可得：

$$OQ = x_i \cos \alpha + y_i \cos \beta + z_i \cos \gamma$$

把 OP 及 OQ 的关系代入到 r_i 的表达式中，可得：

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - (x_i \cos \alpha + y_i \cos \beta + z_i \cos \gamma)^2$$

此式可以稍加改变。由于 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ ，故可写成：

$$r_i^2 = (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) - (x_i \cos \alpha + y_i \cos \beta + z_i \cos \gamma)^2$$

再把上述关系代入到 J_l 的表达式中，则得：

$$J_l = \cos^2 \alpha \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) + \cos^2 \beta \sum m_i (z_i^2 + x_i^2) + \cos^2 \gamma \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) \\ - 2 \cos \beta \cos \gamma \sum m_i y_i z_i - 2 \cos \gamma \cos \alpha \sum m_i z_i x_i - 2 \cos \alpha \cos \beta \sum m_i x_i y_i \quad (1-6)$$

不难看出，式(1-6)中的前三项分别为刚体对 x 、 y 、 z 各轴的转动惯量。而式(1-6)中的后三项分别为刚体对 y 和 z 轴、 z 和 x 轴、 x 和 y 轴的惯量积。我们引用记号：

$$J_x \text{ 代表刚体对 } x \text{ 轴的转动惯量, } J_x = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2);$$

$$J_y \text{ 代表刚体对 } y \text{ 轴的转动惯量, } J_y = \sum m_i (z_i^2 + x_i^2);$$

$$J_z \text{ 代表刚体对 } z \text{ 轴的转动惯量, } J_z = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2);$$

$$J_{yz} \text{ 代表刚体对 } y \text{ 和 } z \text{ 轴的惯量积, } J_{yz} = \sum m_i y_i z_i;$$

$$J_{zx} \text{ 代表刚体对 } z \text{ 和 } x \text{ 轴的惯量积, } J_{zx} = \sum m_i z_i x_i;$$

$$J_{xy} \text{ 代表刚体对 } x \text{ 和 } y \text{ 轴的惯量积, } J_{xy} = \sum m_i x_i y_i.$$

这样，可将刚体对任意轴 l 的转动惯量 J_l 表达如下：

$$J_l = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma \\ - 2 J_{yz} \cos \beta \cos \gamma - J_{zx} \cos \gamma \cos \alpha - J_{xy} \cos \alpha \cos \beta \quad (1-7)$$

这个结果表明：刚体对任意轴的转动惯量，可以用刚体对各坐标轴的转动惯量、惯量积以及该任意轴的方向余弦来表示。只要这些参数已知，便可确定出刚体对任意轴的转动惯量。

由此可知，转动惯量 J_l 的数值与刚体本身的特性以及该轴相对刚体的位置有关。如果轴 l 相对刚体的位置取得不同，相应的夹角 α 、 β 、 γ 都发生变化，即方向余弦 $\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$ 、

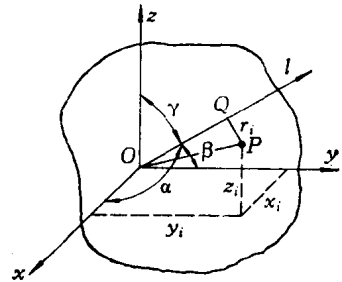


图1-17 过坐标原点的任意轴 l

$\cos\gamma$ 都发生变化, 因此转动惯量 J_l 的数值也要发生变化。

那末, 当轴 l 相对刚体改变位置时, 转动惯量 J_l 值怎样变化呢? 见图 1-18 所示, 在轴 l 上取一点 M , 令 M 点的矢径长度 $OM = d$, 并设 M 点的坐标为 (x, y, z) , 则可得到下列几何关系:

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{x}{d} \\ \cos\beta &= \frac{y}{d} \\ \cos\gamma &= \frac{z}{d}\end{aligned}\quad (1-8)$$

这就是说, 用 M 点的坐标值 x, y, z 和 M 点的矢径长度 d , 可以表达轴 l 的方向余弦。所以, 当夹角 α, β, γ 变化时, 就可以用 M 点坐标值 x, y, z 的相应变化来表达了。

如果选定 M 点的矢径长度 d 与刚体转动惯量 J_l 的平方根成反比, 即

$$d = \frac{1}{\sqrt{J_l}} \quad (1-9)$$

并将式(1-9)代入式(1-8)后再代入式(1-7)中, 则可得到如下方程式:

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{yz} yz - 2J_{zx} zx - 2J_{xy} xy = 1 \quad (1-10)$$

这个三元二次方程式描绘了一个空间的椭球面(见图 1-18)。因式中不包含有 x, y 和 z 的一次项, 故椭球的中心就是坐标原点 O 。该椭球反映了刚体对所有通过 O 点的轴的转动惯量分布情况, 因而叫做惯性椭球。

从几何学知道, 任何椭球都具有三个相互垂直的主轴。惯性椭球也有三个相互垂直的主轴, 叫做刚体的惯性主轴。若将坐标系 $Oxyz$ 的三个坐标轴选取得与刚体的三个惯性主轴重合, 即选取得与惯性椭球的三个主轴重合, 则惯性椭球方程式简化成为:

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 = 1 \quad (1-11)$$

显然, 这样选取坐标系时, 刚体对各坐标轴的惯量积均为零, 从而计算刚体对各坐标轴的转动惯量也较为简便了。

对于几何形状不规则的刚体, 确定其惯性主轴的方向是相当复杂的。但若刚体具有对称形状, 则可借助下述定理来确定:

1. 若刚体具有对称轴, 则对称轴是刚体的惯性主轴, 刚体对该轴的惯量积为零。
2. 若刚体具有对称平面, 则垂直于该对称平面的任意轴均为刚体的惯性主轴, 刚体对这些轴的惯量积均为零。

二、陀螺转子的转动惯量

在陀螺仪中, 转子的转动惯量是一个很重要的参数。陀螺转子角动量的大小, 取决于转子对自转轴转动惯量的大小以及转子自转角速度的大小。为在有限的仪表体积内使转子获得较大的转动惯量, 陀螺电动机的结构与一般电动机不同, 其定子在内而转子在外, 即所谓“内定子、外转子”结构(见图 1-2 和图 1-3)。这样, 转子大体上呈空心圆柱体形

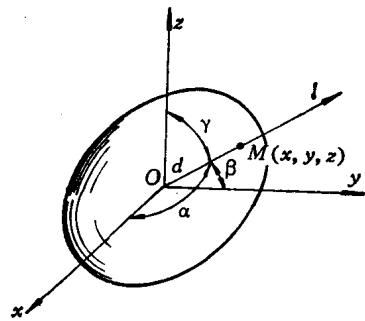


图 1-18 刚体的惯性椭球

状，以使质量分布离自转轴远些。而且，转子一般采用比重较大的金属材料，例如不锈钢、黄铜或高比重合金等做成，使其具有较大的质量。

因转子的形状对于自转轴是对称的，故自转轴是转子的惯性主轴。因包含自转轴的任意平面都是转子的对称平面，故垂直于自转轴的任意轴均是转子的惯性主轴。在转子赤道平面内的任意赤道轴（例如图 1-20 中的 x 轴或 y 轴）都是垂直于自转轴的，可见任意赤道轴也均是转子的惯性主轴。因此，我们在计算转子对自转轴或对赤道轴的转动惯量时，是不必考虑惯量积项的。

现以空心圆柱体形状的转子为例。设空心圆柱形转子的外半径为 R ，内半径为 r ，高度为 h ，材料的比重为 μ （质量密度为 ρ ）。下面计算该转子对自转轴和对赤道轴的转动惯量。

1. 计算转子对自转轴的转动惯量 如图 1-19 所示，在转子上取一个薄壁圆筒，它的半径为 x ，厚度为 dx ，高度为 h ，可得其体积为：

$$dV = 2\pi h x dx$$

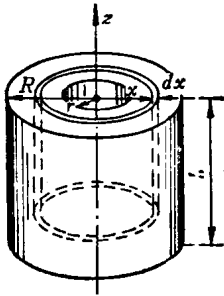


图1-19 在转子上取一薄壁圆筒

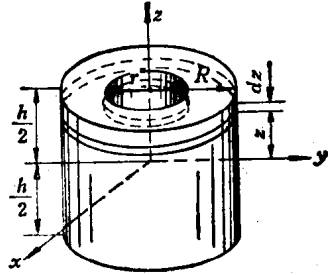


图1-20 在转子上取一圆环形薄片

该薄壁圆筒的质量为：

$$dm = \rho dV = 2\pi \rho h x dx$$

该薄壁圆筒对自转轴 z 的转动惯量为：

$$dJ_z = x^2 dm = 2\pi \rho h x^3 dx$$

整个转子对自转轴 z 的转动惯量可由积分得到：

$$J_z = 2\pi \rho h \int_r^R x^3 dx = \frac{\pi}{2} (R^4 - r^4) h \rho \quad (1-12)$$

如果考虑质量密度与比重的关系是 $\rho = \mu/g$ （其中 g 代表重力加速度），则得：

$$J_z = \frac{\pi}{2} (R^4 - r^4) h \frac{\mu}{g} \quad (1-13)$$

2. 计算转子对赤道轴的转动惯量 如图 1-20 所示，在转子上取一圆环形薄片，它的外半径为 R ，内半径为 r ，厚度为 dz ，可得体积为：

$$dV = \pi (R^2 - r^2) dz$$

该圆环形薄片的质量为：

$$dm = \rho dV = \pi \rho (R^2 - r^2) dz$$

应用转动惯量的平行轴定理和正交轴定理，可得该圆环形薄片对赤道轴 x 或 y 的转动惯

量为

$$dJ_e = \frac{1}{2} dJ_x + z^2 dm$$

其中圆环形薄片对 z 轴的转动惯量 dJ_x 可直接应用式 (1-12) 计算, 即有:

$$dJ_x = \frac{\pi}{2} \rho (R^4 - r^4) dz$$

把 dJ_x 和 dm 的关系都代入 dJ_e 的表达式中, 可得:

$$dJ_e = \frac{\pi}{4} \rho (R^4 - r^4) dz + \pi \rho (R^2 - r^2) z^2 dz$$

整个转子对赤道轴 x 或 y 的转动惯量可由积分得到:

$$\begin{aligned} J_e &= \frac{\pi}{4} \rho (R^4 - r^4) \int_{-h/2}^{h/2} dz + \pi \rho (R^2 - r^2) \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz \\ &= \frac{\pi}{12} [3(R^4 - r^4) + (R^2 - r^2)h^2] h \rho \end{aligned} \quad (1-14)$$

如果采用比重来表示, 则得:

$$J_e = \frac{\pi}{12} [3(R^4 - r^4) + (R^2 - r^2)h^2] h \frac{\mu}{g} \quad (1-15)$$

容易看出, 转子对于所有赤道轴的质量分布情况都是相同的, 因而它对所有赤道轴的转动惯量也都是相等的。

在计算转子的转动惯量时, 长度 (例如上述计算式中的 R 、 r 和 h) 的单位常用厘米, 材料比重 μ 的单位常用克(重)/厘米³, 重力加速度 g 的单位常用厘米/秒², 由此计算出转动惯量的单位是克(重)·厘米·秒²。若采用含有质量密度 ρ 的计算式, 当 ρ 的单位以克(质)/厘米³ 代入时, 则所计算出转动惯量的单位是克(质)·厘米²。这里采用的单位是克(重)·厘米·秒², 并将其中表示重量克的(重)省略而成为克·厘米·秒²。

转子对自转轴的转动惯量常简称极转动惯量, 对赤道轴的转动惯量常简称赤道转动惯量。对于空心圆柱形转子, 根据式(1-13)与式(1-15), 可得赤道转动惯量 J_e 与极转动惯量 J_x 两者之比:

$$\frac{J_e}{J_x} = \frac{1}{6} \left[3 + \frac{\left(\frac{h}{R}\right)^2}{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2} \right] \quad (1-16)$$

在航空陀螺仪的实际结构中, 通常 $h/R \approx 1$, $r/R \approx 0.5 \sim 0.8$, 从上式得 $J_e/J_x \approx 0.6 \sim 0.63$ 。可见在一般情况下, 转子的赤道转动惯量要比极转动惯量小, 但两者又相差不多即两者是具有同一个数量级的。

应当看到, 实际陀螺转子的几何形状往往比较复杂。例如, 磁滞陀螺电动机驱动的转子一般是由转子体、磁钢环和端盖等部分组成 (见图1-2), 异步陀螺电动机驱动的转子一般是由转子体、短路鼠笼环和端盖等部分组成 (见图1-3), 而且转子体本身的几何形状也不是简单的空心圆柱体。因此, 在计算转动惯量时, 首先应划分成形状简单的几个部分 (每个部分的材料应相同), 分别计算出每个部分的转动惯量, 然后再把它们相加, 便可得到整个转子的转动惯量。

三、陀螺组合件的转动惯量

从以后的分析中将会看到,陀螺组合件的转动惯量对两自由度陀螺仪的运动有些影响,特别是它对单自由度陀螺仪的运动有着明显的影响。我们为了研究陀螺仪的某些运动问题,还需要确定出陀螺组合件的转动惯量。

陀螺内环组合件包括:内环,安装于内环中的陀螺电动机的定子和转子,安装在内环上的力矩器、信号器以及其它零部件。内环组合件对内环轴的转动惯量,应当包括所有这些零部件对内环轴的转动惯量。

内环的形状若是简单的方框形、圆筒形或空心球形,则较便于计算;若是做成陀螺房结构,则计算较复杂。

陀螺转子的赤道轴若与内环轴共线,则它对内环轴的转动惯量就等于对赤道轴的转动惯量;若两轴不共线,则应借助转动惯量的平行轴定理求出。这个转动惯量与转子的自转无关,因为转子对任意赤道轴的转动惯量均是相等的。至于安装在内环上的其它零部件对内环轴的转动惯量,则应根据不同情况分别计算。

陀螺外环组合件包括:外环,安装于外环中的内环组合件,安装在外环上的力矩器、信号器以及其它零部件。外环组合件对外环轴的转动惯量,应当包括所有这些零部件对外环轴的转动惯量。

外环的形状若是简单的方框形或圆环形,则较便于计算;若是做成如图 1-5 所示的形状或其它不规则的形状,则计算较复杂。

应该注意,内环组合件可绕内环轴相对外环转动,当它相对外环的位置不同时,它对于外环轴的质量分布情况也不相同。所以,内环组合件对外环轴的转动惯量,将因其本身相对外环的转动而改变;只有在相对转角不大时,才可认为是一个不变的常量。至于安装在外环上的其它零部件对外环轴的转动惯量,也应根据不同情况分别计算。

总括来看,计算陀螺组合件的转动惯量要比计算陀螺转子的转动惯量复杂得多,也只能得到一个近似结果作为陀螺仪设计或分析时的参考。对于已有的陀螺仪结构,除了通过计算来确定转动惯量之外,还可采用比较测量法来实际测出转动惯量。这种比较测量法原理可参看有关的力学参考书。

在表 1-1 中,给出了几种典型几何形状物体的转动惯量计算式,以作计算时参考。

§ 1-4 角 动 量

一、角动量的定义和表达式

对于绕定轴转动的刚体(见图 1-21),刚体内各质点的动量与其到轴的距离之乘积的总和,也即刚体内各质点的动量对轴之矩的总和,称为刚体对该轴的角动量或动量矩。此定义用式子表述就是:

$$H_l = \sum r_i m_i U_i \quad (1-17)$$

式中 H_l ——刚体对轴 l 的角动量;

Σ ——总和符号;

m_i ——刚体内任意质点的质量;

r_i ——该质点到轴 l 的距离;