组合数学

邵嘉裕 著

TONGJI
DAXUE
CHUBANSHE

同济大学出版社

组 合 数 学

邵 嘉 裕 著

同济大学出版社

本书介绍了组合数学的三个主要方面：组合计数理论、组合矩阵论和组合设计的基本内容、方法和技巧。主要包括组合计数理论中的发生函数、容斥原理，Möbius 反演原理和 Pólya 计数定理；组合矩阵论中的 Hall 定理与相异代表元系，非负矩阵和(0,1)矩阵；组合设计中的平衡不完全区组设计，对称设计等内容。

本书力求叙述清楚、由浅入深，便于阅读或自学。可作为高等学校组合数学、图论及计算机科学等有关专业的高年级课程和研究生课程的教材及具有一定高等代数基础的初学者的自学读本。也可供从事这方面工作的教学、科研和技术人员参考。书中每章后面都附有一定数量的习题，供读者作为练习和进一步思考的材料。

责任编辑 许纪森
封面设计 陈益平

组 合 数 学

邵嘉裕著

同济大学出版社出版

(上海四平路 1239 号)

新华书店上海发行所发行

同济大学印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 11.75 字数 340千字

1991 年 12 月第 1 版 1991 年 12 月第 1 次印刷

印数：1—3000 定价：5.60元

ISBN 7-5608-0877-8/O.85

前　言

组合数学主要研究某组离散对象满足一定条件的安排（或组态）的存在性、构造及计数等问题。简言之，这是一门研究安排的数学特征的学科。例如中学数学里学习的排列、组合问题及其推广——重复排列和重复组合问题，划分问题（§1.3），更列问题（§3.2），指派问题（§6.1），分放问题（§5.5），染色问题（§5.5），Euler 36 军官问题（§8.1），Kirkman 女生问题（§8.2）以及幻方问题等都是这种安排问题的例子。

从大的方面来说，组合数学属于离散数学的范畴。大千世界包罗万象，但归根结蒂是由事物——“事情”和“物体”两方面组成的。研究事情之理的称“事理科学”，研究物体之理的称“物理科学”。由于物体的本质是运动和变化，因此与物理科学相联系的数学是以研究变量、极限、微分积分等为基础发展起来的连续数学。而与事理科学相联系的数学则是不涉及极限和微积分概念的离散数学。组合数学研究的是具有离散特征的各种对象的安排问题，因此它是整个离散数学的一个重要组成部分。

人们对组合数学问题的兴趣可以追溯到很早的年代，例如4000多年前我国古代出现的《河图》、《洛书》中就已给出了三阶幻方问题的解答。历史上组合数学的发展与数论及概率计算有密切的联系。有些问题最初是以数学游戏的形式出现，后来在实际背景的刺激下获得了新的生命力和发展。近年来，随着生产技术和社会管理事业的不断发展，越来越多的事理问题成为了迫切需要研究的课题。而电子计算机技术的日益发展，又为一些大型事理问题的研究和解决提供了现实的可能性。因此，作为为许多离散安排问题提供数学模型和研究方法的组合数学也获得了极大的发展。目前，组合数学不仅已成为数学中的一个重要分支，而且还是计算机科学、管理科学及许多其他学科中的一些分支的数学基

础。

组合数学包含着十分丰富的内容。按其所研究问题的类型划分，可以分为组合计数理论、组合设计、组合矩阵论、组合优化等几个方面。组合计数理论主要研究满足一定条件的安排方式的数目及其计算问题，这是组合数学中一个最基本的研究方向。组合设计研究满足某些特定要求的组态（子集系）的存在性和构造问题。组合矩阵论主要研究矩阵的组合性质，即矩阵的那些仅与零元素分布有关，而与非零元素的具体非零数值无关的那些性质。它可以作为许多组合对象（如相异代表元系、二分图、有向图、区组设计等）的一种代数表示。组合优化则是在所考虑的安排具有某种最优化标准时，研究寻求和构造最优安排的问题。由于组合优化内容的相对独立性（它常被看作是运筹学的一个重要分支，且与图论有密切联系），一般组合数学著作中均较少论及。

本书主要介绍了组合计数理论（一至五章），组合矩阵论（第六、七章）和组合设计（第八、九章）这三个方面的基本内容、方法和技巧。由于篇幅和作者水平所限，对这三方面内容的介绍也还是很初步的，许多深入和有意义的内容都还未涉及，有待今后这些方面的专著进行介绍和论述。

阅读本书不需要任何组合数学的预备知识，但我们假定读者已熟练掌握矩阵运算并具备抽象代数的一些基本知识。其中第二章需要环与同构的概念；并稍许用到一些解析函数的初等性质；第四章涉及到模的概念；第五章的大部分内容都与群有关；第七章需要一点图论初步知识；而第八、九章则要求对有限域有一定的了解。

本书各章后面均附有一定数量的难易程度适中的习题，可供教学时选用或作为自学者练习和进一步思考的材料。书中排小字的部分（目录中有 * 的部分）表示略为深入且基本上不需在后面其他章节中用到的内容，可以在第一次阅读时跳过。

作者是在他的导师 R.A. Brualdi 教授指导下开始学习组合数学的。在编写本书时，不少章节中的内容都受到 Brualdi 教授

讲课内容的启发，作者在此向 Brualdi 教授表示深切的谢意。在本书写作过程中，作者得到了魏万迪教授、李乔教授，朱烈教授和沈灏教授等的热情鼓励和帮助。魏万迪教授在他的著作《组合论》下册尚未出版之时就向作者提供了该书的油印稿，朱烈教授向作者提供了他与苏州大学数学系主编的《组合设计讲义》，李乔教授与沈灏教授分别在组合矩阵论和组合设计方面同作者进行了大量有益的讨论。作者在此谨向上述诸位同志表示衷心的感谢。同济大学应用数学系为本书的写作提供了许多方便，为作者完成此书创造了良好的条件。

由于作者水平所限，书中错误和不妥之处难免，恳请广大读者批评指正。

邵嘉裕

1988 年 1 月　于上海

目　录

第一章　排列、组合和二项式系数

组合计数理论主要研究某组对象满足一定条件的安排的个数及其计算问题。本书一至五章都属于这一方面的内容，主要介绍组合数学中最常见、最重要的一些计数原理、计数方法和计数公式。

本章先考虑排列、组合计数问题的一个最直接的推广——重复排列与重复组合计数问题，以及划分问题、二项式系数的一些基本性质及其他与之有关的一些问题。

§1.1　重复排列

我们假定读者已熟知如下两个基本的排列、组合计数公式：

1．n 元集中取 r 个不同元作成的排列个数为

$$P(n,r)=n(n-1)\cdots(n+r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}. \tag{1.1}$$

2．n 元集中取 r 个不同元的组合个数为

$$\binom{n}{r}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}, \tag{1.2}$$

其中数 $\binom{n}{r}$ 称为二项式系数。

现在如果取出的元素允许重复，则相应的排列数及组合数就不同了。例如在 $\{a,b,c\}$ 三元集中取两个，则：

1．元素允许重复的排列有 9 个(不允许重复的排列仅 6 个)：

$$aa,ab,ac,ba,bb,bc,ca,cb,cc.$$

2．元素允许重复的组合有 6 个(不允许重复的组合仅 3 个)：

$$\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,a\},\{b,b\},\{c,c\}.$$

元素允许重复的排列及组合称为是重复排列及重复组合。本节我们先考虑重复排列的计数公式。

在有限集S的一个确定的重复排列(或重复组合)中，S中任一元a出现的次数称为是a在该重复排列(或重复组合)中的**重复度**。根据对各元的重复度及排列方式的要求，重复排列计数问题可以分为如下几种类型：

I. 重复度无限制的重复排列计数；

II. 重复度确定的重复排列计数；

III. 各元的重复度分别限定于非负整数集合N_0的某些特定子集的重复排列计数；

IV. 圆周上的重复排列计数。

V. 一般图上的重复排列计数。

其中III将在§2.6中用指数型发生函数的方法来求解。IV将在§4.2中用经典Möbius反演公式来求解。而V则将在§5.6中用Pólya计数定理来求解。本节先考虑I、II两类及与之有关的其他一些问题。

定理1.1.1 n元集中取r个的(重复度无限制的)重复排列的个数是n^r。

证 因重复度无限制，故r个位置中任一位置均有n种选择元素的方式，总共排列方式数即为$\underbrace{n\cdot n\cdots n}_{r\text{个}}=n^r$。 □

定义1.1.1 n元集合$S=\{s_1,\cdots,s_n\}$的各元$s_1\cdots,s_n$的重复度依次为$a_1,\cdots a_n$的重复排列称为是S的一个$(a_1,\cdots,a_n)$-重复排列。

定理1.1.2 设a_1，…，a_n为非负整数。则n元集合$S=\{s_1,\cdots,s_n\}$的$(a_1,\cdots,a_n)$—重复排列的个数为

$$\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)!}{a_1!a_2!\cdots a_n!}. \tag{1.3}$$

证 记$r=\sum_{i=1}^{n}a_i$。若假定把取出的r个元视为两两不同，所能作成的排列(称为“r元序列”)个数本应为$r!$。今每个r元序列若进行重复元内部的重新排列，则将对应于同一个重复排列。

而重复元内部的重新排列方式数为 $a_1!a_2!\cdots a_n!$，故每 $a_1!a_2!\cdots a_n!$ 个 r 元序列对应于同一个重复排列，于是所求之$(a_1,\cdots,a_n)$-重复排列个数应为 $\frac{r!}{a_1!a_2!\cdots a_n!}$. □

数 $\frac{(a_1+a_2+\cdots a_n)!}{a_1a_2!\cdots a_n!}$ 称为多项式系数。它是下面定理 1.1.3 中将给出的多项式定理展开式中的一般项系数。特别当 $n=2$ 时，它就是二项式系数 $\binom{a_1+a_2}{a_1}$.

例 1 一个含 $(n+1)$ 条自左向右的横道路，$(m+1)$ 条自下向上竖道路的矩形有向道路区如图 1-1 所示。则从左下角 A 点到右上角 B 点的有向道路条数是 $\frac{(m+n)!}{m!n!}$.

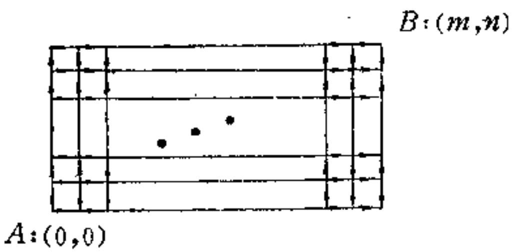

图 1-1

解 如图 1-1 示，任一横道路被 $(m+1)$ 条竖道路分为 m 个"横段"，同理任一竖道路被分为 n 个"竖段"。从 A 出发的一条有向路终止于 B 的充要条件是它(以任意次序)走过了 m 个横段和 n 个竖段。故 A 到 B 的一条有向路等价于 m 个"横"和 n 个"竖"(按先后次序) 所作成的一个重复排列，也即集合 $S=\{$横、竖$\}$的一个(m,n)-重复排列。于是路数 = 集合 S 的(m,n)-重复排列数 $=\frac{(m+n)!}{m!n!}$.

容易将例1中的结论推广到高维的情形。即在 k 维欧几里得空间的类似有向道路区中从原点到点 $(m_1,\cdots,m_k)$ 的有向道路的条数是 $\dfrac{(m_1+\cdots+m_k)!}{m_1!m_2!\cdots m_k!}$。

利用定理1.1.2可证二项式定理的一个推广——多项式定理。

定理 1.1.3 （多项式定理）

$$(x_1+\cdots+x_n)^r=\sum_{a_1+\cdots+a_n=r}\frac{r!}{a_1!a_2!\cdots a_n!}x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}. \quad (1.4)$$

证 直接按多项式乘法分配律乘出，(1.4)式左端可化为 r 个因子中每个因子各任取一项的乘积之和：

$$(x_1+\cdots+x_n)^r=\sum_{1\leq i_1,i_2,\cdots,i_r\leq n}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_r} \quad (1.5)$$

式中下标序列 $(i_1,\cdots,i_r)$ 取遍集合 $\{1,\cdots,n\}$ 的所有 r 元重复排列。把(1.5)式右端的一般项 $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_r}$ 写成单项式形式 $x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n}$（其中 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=r$）时，易见有：$x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_r}=x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n}$ 成立当且仅当相应的排列 $(i_1,\cdots,i_r)$ 是集 $\{1,\cdots,n\}$ 的一个 $(a_1,\cdots,a_n)$-重复排列。于是(1.5)式右端等于 $x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n}$ 的项的个数即为集 $\{1,\cdots,n\}$ 的 $(a_1,\cdots,a_n)$-重复排列个数 $\dfrac{r!}{a_1!a_2!\cdots a_n!}$。把这些同类项合并后即得(1.4)式。 □

在(1.4)式中取 $n=2, x_1=a, x_2=b$，即得著名的二项式定理：

$$(a+b)^r=\sum_{i+j=r}\frac{r!}{i!j!}a^ib^j=\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}a^ib^{r-i}. \quad (1.6)$$

又在(1.4)式中取 $x_1=\cdots=x_n=1$，可得下式：

$$n^r=\sum_{a_1+\cdots+a_n=r}\frac{r!}{a_1!\cdots a_n!}. \quad (1.7)$$

此式的组合意义是：n 元集中取 r 个的所有重复排列的个数 n^r 等于重复度之和为 r 的各种 $(a_1,\cdots,a_n)$-重复排列个数之总和。

§1.2 重复组合

类似于重复排列的情形，重复组合问题也可分为重复度无限制、重复度给定和重复度一般性地限制于非负整数集合 N_0 的某些子集等几种类型。在重复度给定时，显然相应的重复组合恰有一个，故其计数问题是平凡的。本节考虑重复度无限制的重复组合问题，而重复度有限制的重复组合则将在 §2.5 中用发生函数的方法来处理。

引理 1.2.1 n 元集中允许重复地取 r 个元的重复组合个数 $f(n,r)$ 等于如下不定方程的非负整数解的个数：

$$x_1+\cdots+x_n=r. \tag{2.1}$$

证 类似于重复排列情形时的(1.7)式，将全部 r 元重复组合的个数按其重复度序列分类相加，可得

$$f(n,r)=\sum_{a_1+\cdots+a_n=r}C(a_1,\cdots,a_n)$$

其中 $C(a_1,\cdots,a_n)=(a_1,\cdots,a_n)$-重复组合个数 $=1$，于是有

$$f(n,r)=\sum_{a_1+\cdots+a_n=r}1, \tag{2.2}$$

即 $f(n,r)=(2.2)$式右端和式之项数 = 不定方程(2.1)的非负整数解个数。 □

引理 1.2.2 不定方程(2.1)的正整数解的个数是 $\binom{r-1}{n-1}$。

证 将 r 个球排在一直线上，中间共有 $r-1$ 个空档。不定方程(2.1)的一个正整数解相当于将这 r 个球切割（设每一刀都切在某空档上）成有序的非空 n 份的一种分法（其中 x_i 对应于第 i 份的球个数），进一步又相当于在 $r-1$ 个空档中取 $n-1$ 个空档的一种取法。今这样的空档取法数为 $\binom{r-1}{n-1}$，故(2.1)的正整数解个数亦为 $\binom{r-1}{n-1}$。 □

现在我们已可给出重复度无限制的重复组合计数公式。

定理 1.2.1 n 元集合中取 r 个的重复组合个数为

$$f(n,r)=\binom{n+r-1}{r}. \tag{2.3}$$

证 由引理 1.2.1 知 $f(n,r)$ 等于不定方程 (2.1) 的非负整数解个数。对方程(2.1)作未知数代换：$y_i=x_i+1(i=1,\cdots,n)$，则(2.1)成为：

$$y_1+\cdots+y_n=n+r, \tag{2.4}$$

显然不定方程(2.1)的非负整数解数等于(2.4)的正整数解个数。而由引理 1.2.2 知 (2.4) 的正整数解个数为 $\binom{n+r-1}{n-1}$，故得

$$f(n,r)=\binom{n+r-1}{n-1}=\binom{n+r-1}{r}. \qquad \square$$

定理 1.2.1 还有许多其他的证法。在第二章 § 2.5 中，我们将用发生函数方法给出定理 1.2.1 的另一种证明.

注：n 元集合中取 r 个的无重复组合数(二项式系数)

$$\binom{n}{r}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}. \tag{2.5}$$

与 n 元集合中取 r 个的重复组合数

$$f(n,r)=\frac{n(n+1)\cdots(n+r-1)}{r!} \tag{2.6}$$

在形式上十分相似。前者的分子是从 n 开始递减的连续 r 个自然数的乘积，而后者的分子则是从 n 开始递增的连续 r 个自然数之乘积。

例 1 n 个变元$y_1,\cdots,y_n$的 r 次单项式的个数为$\binom{n+r-1}{r}$.

解 任一单项式 $y_1^{t_1}\cdots y_n^{t_n}$ 其次数为 r 的充要条件是 $t_1+\cdots+t_n=r$. 故 r 次单项式个数等于不定方程(2.1)的非负整数解个数 $\binom{n+r-1}{r}$.

下面讨论一个带限制条件(但并非就是对重复度的限制)的组合问题。它可看成是重复组合问题的一种推广。

设 $S=\{1,\cdots,n\}$ 为一有序 n 元集。S 的任一 r 元重复组合

中成员依大小次序排列后可有一个“序列表示”，即表为满足条件

$$1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_r \leqslant n \tag{2.7}$$

的一个正整数递增序列 $(a_1, \cdots a_r)$。若 S 的某一 r 元重复组合 R 其表示序列 $(a_1, \cdots, a_r)$ 又满足如下条件：

$$a_{i+1} - a_i \geqslant k+1 \quad (i = 1, \cdots, r-1)。 \tag{2.8}$$

（条件 (2.8)也可说为：R 的任两个成员之间至少还有 S 的 k 个其他元素），则称 R 为有序 n 元集 S 的一个 k 间隔 r-组合。记 $f_k(n,r)$为有序 n 元集的 k 间隔 r-组合的个数，我们有：

定理 1.2.2

$$f_k(n,r) = \binom{n-k(r-1)}{r}. \tag{2.9}$$

证 令 A 为集合 $S = \{1, \cdots, n\}$ 的所有 k 间隔 r-组合的集合。令 B 为如下不定方程

$$x_1 + x_2 + \cdots x_{r+1} = n-1 \tag{2.10}$$

满足下列条件

$$\begin{cases} x_1 \geqslant 0 \\ x_i \geqslant k+1 \quad (i = 2, \cdots, r) \\ x_{r+1} \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

的非负整数解的集合。定义映射 φ：$A \to B$，使对 A 中任一元素 $R = (a_1, \cdots a_r)$（满足条件(2.7)与(2.8)的序列表示），有

$$\varphi((a_1, \cdots, a_r)) = (b_1, \cdots, b_{r+1}),$$

其中

$$\begin{cases} b_1 = a_1 - 1 \\ b_i = a_i - a_{i-1} \quad (i = 2, \cdots, r) \\ b_{r+1} = n - a_r \end{cases} \tag{2.12}$$

则易见$(b_1, \cdots, b_{r+1}) \in B$。又在(2.12)式中可以反过来将 $(a_1, \cdots, a_r)$解出用$(b_1, \cdots, b_{r+1})$表示，故 φ 是 A 到 B 的一个一一对应，即

$$f_k(n,r) = |A| = |B|. \tag{2.13}$$

另一方面，对不定方程(2.10) 作未知数代换：$y_1 = x_1$，$y_i =$

$x_i-(k+1)$，$(i=2,\cdots,r)$，$y_{r+1}=x_{r+1}$，则得：

$$y_1+y_2+\cdots+y_{r+1}=(n-1)-(r-1)(k+1). \qquad (2.14)$$

于是不定方程(2.10)满足条件(2.11)的非负整数解个数$|B|$等于不定方程(2.14)的非负整数解数。于是有

$$f_k(n,r)=|A|=|B|=\binom{n-1-(r-1)(k+1)+r+1-1}{r}$$

$$=\binom{n-k(r-1)}{r}$$

定理证毕。 □

定理 1.2.2 中研究的带限制条件的组合问题可以看成是无重复组合和重复组合计数公式的一个共同推广：

当 $k=0$ 时条件(2.8)成为无重复组合的条件，由此便得n元集中取r个的无重复组合个数为 $f_0(n,r)=\binom{n}{r}$；

当 $k=-1$ 时，条件(2.8)就成为可重复组合的条件，这样又可得 n 元集中取 r 个的重复组合个数为

$$f(n,r)=f_{-1}(n,r)=\binom{n+r-1}{r}.$$

推论 1.2.1 集合$\{1,\cdots,n\}$的无二数码相邻的 r 元组合数为 $f_1(n,r)=\binom{n-r+1}{r}$.

§1.3 有序划分与无序划分

定义 1.3.1 若集合 S 的非空子集 $A_1,\cdots,A_k$ 满足如下两条件：

(1) $A_i\cap A_j=\phi \quad (i\neq j)$

(2) $\bigcup_{i=1}^{k} A_i=S$

则称这族子集构成 S 的一个划分。当$\{A_1,\cdots,A_k\}$视为无序时称为无序划分，而当$(A_1,\cdots,A_k)$视为有序时则称为有序划分。又当$|A_i|=r_i(i=1,\cdots,k)$时，分别称相应的划分为$\{r_1,\cdots,r_k\}$-无