2004年上海大学博士学位论文 44

凸体及星体的不等式与极值问题

作 者：李小燕
专 业：运筹学与控制论
导 师：冷岗松

上海大学出版社
·上 海·

2004年上海大学博士学位论文

凸体及星体的不等式与极值问题

作　者：李小燕
专　业：运筹学与控制论
导　师：冷岗松

上海大学出版社
·上　海·

Shanghai University Doctoral Dissertation (2004)

Inequalities and Extremum Problems for Convex Bodies and Star Bodies

Candidate: Li Xiao-yan

Major: Operations Research and Control Theory

Supervisor: Prof. Leng Gang-song

Shanghai University Press

• Shanghai •

上 海 大 学

本论文经答辩委员会全体成员审查，确认符合上海大学博士学位论文质量要求。

答辩委员会名单：

主任	**曾振柄**	教授，华东师范大学	200062
委员	**肖建斌**	教授，杭州电子科技大学	310018
	郭兴明	教授，上海大学	200444
	盛万成	教授，上海大学	200444
	王汉兴	教授，上海大学	200444
导师	**冷岗松**	教授，上海大学	200444

评阅人名单：

张景中	教授，广州大学软件研究所	510405
杨　路	教授，中国科学院成都计算机应用研究所	610016
任德麟	教授，武汉大学数学系	430081

评议人名单：

曾振柄	教授，华东师范大学	200062
宗传明	教授，北京大学	100871
刘培德	教授，武汉大学	430072
李庆国	教授，湖南大学	410082

答辩委员会对论文的评语

李小燕的博士论文隶属于凸体几何的范畴,凸体几何是一个经典的数学分支，它是由Steiner, Brunn, Minkowshi, Alexsandrov, Hadwiger等著名数学家逐渐发展起来的一个学科，其核心问题是研究凸体之间的度量关系，例如Brunn-Minkowski不等式和Alexsandrov-Fenchel不等式等，这一方面在最优化，Tomography等应用学科中具有广泛的应用。由于Bourgain, Gewers, Lindenstrauss, Milman等人将这一经典理论推广到Banch空间从而产生了泛函分析的几何理论，这一新理论已成为数学中的一个活跃领域。李小燕的博士论文以此为选题是十分恰当的，难度较高。

该博士论文对凸几何中的几个重要不等式作了系统的推广，例如，将Petty-Schneider定理从体积推广到了均质积分，将Brunn-Minkowski不等式推广到了极形式，引进了混合Cayley-Menger行列式的概念，这些工作对完备凸几何理论具有重要性，其证明方法具有创新独到之处和较高的难度。李小燕的博士论文结构正确，表述清晰，论文显示作者在所研究的领域有坚实而广博的理论基础，有独立从事科学研究的能力，答辩中能正确回答提问。答辩委员会一致认为，李小燕的博士论文是一篇优秀的博士论文，达到博士学位论文的要求。

答辩委员会表决结果

经无记名投票，答辩委员会全票同意通过论文答辩，并建议授予博士学位。

答辩委员会主席：曾振柄

2004 年 5 月 28 日

摘 要

本文首先介绍凸体几何的发展历史和各主要研究方向的发展概况. 本博士论文是以研究一般凸体、星体以及单形和超平行体等特殊类凸体的度量不等式和极值问题为主要内容, 研究工作分为两个方面.

一方面是利用几何分析的渐近理论、局部理论和积分变换方法研究一般凸体和星体的度量不等式和极值问题, 由第二章和第三章构成.

自从 1964 年 Shephard 提出 Petty-Schneider 问题以来, Petty-Schneider 问题一直是凸体几何中一个热点问题, Petty 、 Schneider 、 Alekandrov 等著名数学家都对这一问题得到了各具特色的结果, 本文第二章首先推广 Petty-Schneider 定理到一般的均质积分情形. 同时, Busemann-Petty 问题是 Petty-Schneider 问题的对偶问题, 也是近年来的一个研究焦点, Ball 在研究 Busemann-Petty 问题时讨论了球和立方体的截面性质, 受 Ball 思想的启发, 本文第二章给出了球的截面的两个新的度量不等式. 关于凸体的 Brunn-Minkowski 不等式是凸体理论的精髓, 混合投影体的 Brunn-Minkowski 不等式也由 Lutwak 所证明, 本文第二章则证明了投影体的极体的 Brunn-Minkowski 型不等式.

星体的对偶 Brunn-Minkowski 理论是上世纪 70 年代产生的

新兴研究领域，第三章我们建立了星体对偶均质积分的两个新型不等式，它们形式上类似于正实数的初等对称函数的 Marcus-Lopes 不等式和 Bergstrom 不等式，也类似于行列式的 Fan Ky 不等式．此外，我们还证明了星体的对偶混合均质积分和对偶混合 $p-$ 均质积分的相关性质，得到了一系列新的不等式．

另一方面是利用外微分和代数的方法研究一些特殊类凸体 (如单形、超平行体等) 的度量不等式和极值性质，这方面的研究工作由第四章、第五章和第六章构成．

凸体的混合体积是凸体的 Brunn-Minkowski 理论的核心，它为几何中的各类度量提供了统一的处理模式，它是有限个凸体体积的连续函数，本文第四章引入凸体混合体积的离散形式：两个有限向量集的混合体积的概念，同时利用外微分为工具证明了向量集的混合体积与由两向量集分别张成的平行体体积之间的一个强有力的不等式； Cayley-Menger 行列式是解决有限点集不等式和嵌入问题的极好工具，本文第四章则定义了两个点集的混合 Cayley-Menger 行列式，获得了混合 Cayley-Menger 行列式与向量集的混合体积以及两个单形体积乘积之间的关系，这个关系式容量大，包含了不少的经典度量关系和近期被发现的新结果；第四章还引入两个单形的混合距离矩阵的概念，证明了它的行列式与两单形的外径的等量关系．在第四章最后，利用我们获得的主要结论简洁地证明了如单形的正弦定理和平行体的 Hadamard 不等式的逆形式等一些著名的结论．

第五章的任务是利用一个分析不等式和杨路 - 张景中质点组

不等式和权变换的方法把关于两个三角形的 Klamkin 不等式推广到高维空间，同时建立一系列的涉及单形的体积、各面面积、任意点到单形的各顶点距离的新的不等式.

第六章我们利用外微分的方法，首次给出了 n 维单形中面的解析表达式，并且证明了单形中面类似于三角形中线的性质，如对于一个给定的单形，存在另一个单形使得它的棱长分别等于给定单形的中面面积的值，一个单形的所有中面有且仅有一个公共点等. 进一步，利用中面的表达式建立了一系列涉及单形的棱长、各面面积、外径、中线长等的新的不等式.

关键词: 凸体，星体，极值，不等式，混合体积，对偶混合体积，均质积分，Brunn-Minkowski 理论，单形

Abstract

The development survey and main research directions of convex geometry are presented in the preface. This Ph.D. dissertation researches the inequalities and extremum properties for convex bodies, star bodies and some specific convex bodies such as simplicies and parallelotopes. The research works of this thesis consists of two parts.

In the first aspect, some inequalities and extremum properties are established by applying the asymptotic theory, local theory and integral transforms. The Petty-Schneider problem has attracted the attentions of those working in convex geometry. Chapter 2 extend Petty-Schneider theorem for projection bodies (zonoids) to quermassintegrals. Two inequalities for sections of centered bodies are given, which are motivated by the so-called hyperplane conjecture for convex bodies. The classical Brunn-Minkowski's inequality is the heart of convex bodies theory. The Brunn-Minkowski's inequality for mixed projection bodies was obtained by Lutwak. We find the Brunn-Minkowski's inequality for the polar of mixed projection bodies. The dual Brunn-Minkowski theory earns its place as an essential tool in geometric tomography. In Chapter 3, the inequalities

about the dual quermassintegrals of star bodies in R^n are established, which are analogue not only to Marcus-Lopes's inequality and Bergstrom's inequality for elementary symmetric functions of positive reals, but also to Fan Ky's inequality for determinant. On the other hand, the dual mixed Quermassintegrals and the dual mixed $p-$ Quermassintegrals are introduced. We generalize the dual Brunn-Minkowski Theory.

The other part of the research works are presented in Chapter 4, Chapter 5 and Chapter 6. We find the inequalities and extremum properties for specific convex bodies such as simplicies and parallelotopes by employing the exterior differential methods and algebraic means. The theory of mixed volumes provides a unified treatment of various important metric quantities in geometry, such as volume, surface area and mean width. Chapter 4 introduce the concept of the mixed volume of two finite vector sets in R^n, which can be regard as the discrete form of mixed volume of two convex bodies. A new and powerful inequality associating with the mixed volume of two finite vector sets is obtained. The Cayley-Menger determinant has proved extraordinarily useful tool in dealing with some inequalities for finite points sets. We introduce the mixed Cayley-Menger determinant and obtain the formula for the product of volume of two simplices which contains a lot of papers on the properties of a pair of triangles (simplices). Meanwhile, the

relation concerning the determinant of mixed distance matrix and the circum-radius of two n−simplices is given. Besides, employing new and simple methods, some well-known results of simplices and Hadamard inequality are reproved. In Chapter 5, by applying an analytic inequality and the moment of inertia inequality in R^n, we generalize the Klamkin's inequality to several dimensions and establish some inequalities for the volume, facet areas and distances between any point of R^n and vertices of an n−simplex. To obtain the analytic expression for the mid-facet area of an n−dimensional simplex, the exterior differential method is applied in Chapter 6. Furthermore, some properties of the mid-facets of a simplex analogous to median lines of a triangle (such as for all mid-facets of a simplex, there exists another simplex such that its edge-lengths equal to these mid-facets area respectively, and all of the mid-facets of a simplex have a common point) are confirmed. In the end, by using the analytic expression, a number of inequalities which combine edge-lengths, circum-radius and median lines with the mid-facet area for a simplex are established.

Keywords: convex bodies, star bodies, extremum, inequalities, mixed volumes, dual mixed volumes, quermassintegrals, Brunn-Minkowski theory, simplicies

目 录

第一章 绪 论

1.1 学科综述

凸体几何是以凸体和星体为主要研究对象的现代几何学的一个重要分支，它是以微分几何、泛函分析、偏微分方程、点集拓扑为基础的现代几何学. 凸体几何可分为组合理论和度量理论，组合理论 [51] 主要研究几何体 (如多胞形) 的组合关系，讨论它们的面数、顶点数、棱数等的数量关系，例如，著名的 Euler 定理：三维凸多胞形的顶点数 f_0 、棱数 f_1 和面数 f_2 存在关系：$f_0 - f_1 + f_2 = 2$. 度量理论主要研究几何体的度量性质，如几何体的构形、体积、表面积、宽度、角度、投影等，其中最富有吸引力的是形形色色的应用广泛的等周不等式 [7,27,102,117].

凸体几何起源于 19 世纪下半叶， H. Brunn 和 H. Minkowski 是两位杰出的奠基者. 20 世纪 30 年代，前苏联著名数学家 A. D. Aleksandrov 以及 T. Bonnesen 和 W. Fenchel 引进凸体的混合表面积测度，使得凸体几何成为一个独立的数学分支. 20 世纪 70 年代， Petty 发现了各种各样新的等周不等式，其中不少结果在许多领域有着广泛的应用. 20 世纪 80 年代，以 Jean Bourgain 和 Vitali Milman 为代表的几何分析学派，用现代泛函分析为工具研

究凸体的度量性质，取得了突破性的进展，使得一些经典的凸体几何难题得以解决，也使得凸体理论的研究空前繁荣，成为现代数学重要的主流方向之一，Bourgain 也因此而得到 Fields 奖. 进入 20 世纪 90 年代后，凸体几何的研究领域迅速扩大，研究对象从凸体扩大到星体. 1996 年 Berkely 数学科研所 (MSRI) 将几何分析列为一个半年项目 (a half-year program), 项目结束后出版了两本书: "Convex Geometric Analysis" 和 "Flavors of Geometry", 这两本书，特别是后者列举了大量关于凸体的等周极值问题的研究结果，其引言中指出这种研究将是近期数学研究的一个十分重要的方面.

凸体几何的度量理论与其它经典的数学分支紧密联系，相互交叉渗透，既有严密的理论基础又具有广泛的应用前景，下面对凸体几何的度量理论中的一些主要研究方向做一个概述.

1) Banach 空间的局部理论，它是凸体几何与泛函分析结合的最引人注目的产物，这被认为是现代国际数学研究的主流方向之一. 此研究方向源于 20 世纪 Adolf Hurwitz 的工作，Hurwitz 于 1901 年发表了关于平面区域等周不等式的 Fourier 级数的证法，并在后继的论文中运用球面调和分析对 3- 维工件的凸体证明了类似的不等式，随后，H. Minkowski 用球面调和分析的方法证明了 3- 维常宽凸体的有趣特征，由此开辟了运用分析和球面调和研究几何的方法，此方法具有很强的生命力，Jean Bourgain 和 Vitali Milman 是该方向的代表人物，他们开创了凸渐近理论的研究领域，在凸体逼近研究中获得了大量深刻的结果 [93,94],