



国家教师资格考试指导教材

数学学科知识与教学能力

(高级中学)

张景斌 主编

“互联网+”教材



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

国家教师资格考试指导教材
“互联网+”教材

数学学科知识与教学能力

(高级中学)

主 编 张景斌
副主编 张海山 李延林 王瑞霖
参 编 董 武 黎栋材 刘向军
马 萍 王 坤 王芝平
关 健 王立东



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学学科知识与教学能力.高级中学/张景斌主编. —北京: 北京大学出版社, 2017.4
(国家教师资格考试指导教材)

ISBN 978-7-301-28191-8

I. ①数… II. ①张… III. ①中学数学课—教学法—高中—中学教师—资格考试—自学参考资料 IV. ①G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 052585 号

书 名	数学学科知识与教学能力 (高级中学) SHUXUE XUEKE ZHISHI YU JIAOXUE NENGLI (GAOJI ZHONGXUE)
著 作 责 任 者	张景斌 主编
责 任 编 辑	姚成龙 巩佳佳
标 准 书 号	ISBN 978-7-301-28191-8
出 版 发 行	北京大学出版社
地 址	北京市海淀区成府路 205 号 100871
网 址	http://www.pup.cn 新浪微博: @北京大学出版社
电 子 信 箱	zyjy@pup.cn
电 话	邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62754934
印 刷 者	北京溢漾印刷有限公司
经 销 者	新华书店 787 毫米 × 1092 毫米 16 开本 21 印张 462 千字 2017 年 4 月第 1 版 2017 年 4 月第 1 次印刷
定 价	48.00 元

未经许可, 不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有, 侵权必究
举报电话: 010-62752024 电子信箱: fd@pup.pku.edu.cn
图书如有印装质量问题, 请与出版部联系, 电话: 010-62756370

出版前言

中小学教师资格考试(以下简称教师资格考试)是评价申请教师资格的人员是否具备从事教师职业所必需的教育教学基本素质和能力的考试。参加教师资格考试合格是教师职业准入的前提条件。申请幼儿园、小学、初级中学、普通高级中学、中等职业学校教师和中等职业学校实习指导教师资格的人员须分别参加相应类别的教师资格考试。教师资格考试实行全国统一考试。考试坚持育人导向、能力导向、实践导向和专业化导向,坚持科学、公平、安全、规范的原则。

教师资格考试包括笔试和面试两部分。笔试主要考查:申请人从事教师职业所应具备的教育理念、职业道德、法律法规知识、科学文化素养、阅读理解、语言表达、逻辑推理和信息处理等基本能力;教育教学、学生指导和班级管理的基本知识;拟任教学科领域的基本知识,教学设计实施评价的知识和方法,运用所学知识分析和解决教育教学实际问题的能力。

幼儿园教师资格考试笔试科目为“综合素质”“保教知识与能力”两科;小学教师资格考试笔试科目为“综合素质”“教育教学知识与能力”两科;初级中学、普通高级中学教师和中等职业学校文化课教师资格考试笔试科目为“综合素质”“教育知识与能力”“学科知识与教学能力”3科;中等职业学校专业课教师和实习指导教师资格考试笔试科目为“综合素质”“教育知识与能力”“专业知识与教学能力”3科。

为了配合教师资格考试在全国推广后师范院校的课程设置和教学计划的调整,方便师范院校对报名参加教师资格考试的在校学生进行有效指导和系统培训,提高教师资格考试的通过率,方便考生系统复习,提高考试成绩,北京大学出版社组织了全国数十所师范院校的教师及部分中小学、幼儿园一线教师联合编写了这套“国家教师资格考试指导教材”,作为教师资格考试指导课的配套教材使用。

本系列教材充分体现了我国教师职业对综合素质和教育教学能力的要求,以现行考试大纲为编写依据,科学、系统、严谨地阐释大纲对各学段教师考核所要求的知识体系,旨在帮助考生有效备考,提高其自身教育理念、职业道德、科学文化素养以及相关教育教学能力。

本系列教材在编写中着力强调并体现以下特色:

一、教材架构性原则:教材体系清晰完整,知识严谨规范

在编写教材时注意并把握教材的基本属性,即系统性、知识性、科学性和先进性的统一,突出考试标准与考试大纲所要求的知识性和实用性,总体结构、章节布局合理,内容详略得当,繁简适宜,概念、定义、名词等准确、规范。

二、理念先进性原则：反映考试标准、考试大纲所要求的全新教育理念、教育精神、教育方向

本系列教材在观念、内容、文字上鲜明凸显考试标准、考试大纲所传达的时代性、先进性、高度性。针对考生群体学科专业知识已能够基本满足教学需要、科学文化素养已基本达到教育要求的情况，教材特别强调考生群体自身的教育理念、法律意识、组织教育教学的基本知识与能力、教学设计实施及评价的基本方法。

三、基本指导性原则：较为科学地指导考生掌握各学段教育教学的基本素养、基本原理，以及学科专业领域的基本框架、基本知识

本系列教材的重要功能之一是指导考生有效而科学地掌握、运用教师资格考试所要求的教育知识与教学能力，因此，在编写过程中贯彻大纲对于知识、能力“了解、理解、熟练、掌握、运用”等各个层级的要求，在体例设置与内容表达上突出重点，提纲挈领，避免面面俱到式的罗列与堆砌。

四、能力拓展性原则：注重对考生拓展性思维的启发与创造性能力的培养

新的考试标准、考试大纲强调教师要具备“自主发展意识和自我教育的能力”，拓展性思维与创造性能力是自主发展与自我教育的重要构成与体现，教材就此在内容的表达与形式、板块上做出了适当的设置。

五、备考实效性原则：展现便于考生实际学习、备考的学习功能

本系列教材注重把握好素质培养与应试备考之间的平衡，在内容与形式上兼顾教材的考试指导属性，以利考生理顺考试理念、要求，了解考试趋向、动态，熟悉考试内容、方法，掌握考试重点、难点，帮助考生深入学习、有效应考。

六、教材立体化原则：提供多种教学资源，最大限度满足学生学习需要

除了主教材外，我们还精心设计了形成性练习手册、网络学习课程、模拟试卷等。

总之，本系列教材作为教师资格考试指导课教材，突出地体现了权威性、系统性、先进性、实用性和指导性等特色。

本系列教材在编写过程中得到了各参编院校和参编老师的大力支持，在此一并表示感谢。

1. 本系列教材配有由作者提供的教学课件供教师使用，需要者请通过“教师资格考试交流群”(QQ群号：316689173, 581389674, 572532579)索取。

2. 关注“教师资格考试服务网”(微信公众号：jsfw-pup)公众平台，获取最新的考试资讯、权威的考纲解读、全面的考试技巧及复习方法，以及模拟试题，自测练习题等复习资料。



国家教师资格考试指导教材

编委会

学术顾问

- 丁 钢 华东师范大学终身教授,华东师范大学教育高等研究院院长,中国教育学会副会长
陈向明 北京大学教育学院教授,学术委员会主任,基础教育与教师教育研究中心主任

常务编委(按姓名拼音排序)

- 蔡 春 首都师范大学教育学院副院长,教授
陈建华 上海师范大学教育学系主任,教授
傅建明 浙江师范大学教师教育学院教授
葛明贵 安徽师范大学教育科学学院院长,教授
郝文武 陕西师范大学教育学院教授
何兆华 陕西学前师范学院教务处处长,教授
洪 明 福建师范大学教育学院副院长,教授
侯怀银 山西大学教育科学学院院长,教授
胡金平 南京师范大学教育科学学院院长,教授
李松林 四川师范大学教育科学学院院长,教授
刘云杉 北京大学教育学院副院长,教授
龙宝新 陕西师范大学教育学院副院长
卢晓中 华南师范大学教育科学学院院长,教授
孟繁胜 东北师范大学教育学部副部长
瞿亚红 重庆师范大学教育科学学院院长
桑青松 安徽师范大学教育科学学院院长,教授
唐汉卫 山东师范大学教育学院院长,教授
王凤秋 哈尔滨师范大学教育科学学院院长,教授
吴刚平 华东师范大学教育科学学院教授
肖 川 北京师范大学教育学部教授
肖庆伟 闽南师范大学副校长,教授
杨立范 北京大学出版社副总编辑,编审
张景斌 首都师范大学教育学院副院长,教授
钟毅平 湖南师范大学教育科学学院院长,教授
朱德全 西南大学教育学部部长,教授

编委(按姓名拼音排序)

- 蔡勇强 闽南师范大学教育科学学院院长,教授
曹 莹 西安文理学院教育学院副院长,副教授
车广吉 东北师范大学政法学院教授
陈国良 闽南师范大学继续教育学院院长,教授

陈焕章	上海师范大学教育学院副教授
陈 鹏	福建教育学院教务处处长, 副研究员
邓大河	四川幼儿师范高等专科学校副校长, 副教授
邓岳敏	泉州师范学院教育科学学院副教授
冯展极	大庆师范学院外语学院副院长, 教授
何 冰	吉林省国试教育咨询有限公司董事长
何华松	九江职业大学师范学院院长, 教授
何善平	陕西学前师范学院学前教育系主任, 教授
黄 清	闽南师范大学发展规划处处长, 教授
黄 重	宁德职业技术学院人文科学系主任, 副教授
经柏龙	沈阳师范大学教育科学学院教授
鞠玉翠	华东师范大学教育科学学院教授
李宝良	大庆师范学院继续教育学院院长, 教授
廖贵英	九江职业大学学前教育学院院长, 教授
林 钢	北京大学出版社福建省教学服务中心主任
刘俊卿	沈阳师范大学教育科学学院教授
舒志定	湖州师范学院教师教育学院院长, 教授
宋 祥	东北师范大学文学院教授
汪 明	阜阳师范学院教育科学学院院长, 教授
王 蓓	北京师范大学哲学与社会学学院副教授
王俏华	浙江师范大学杭州幼儿师范学院副教授
王 祥	贵州师范学院教育科学学院教授
王永胜	东北师范大学生命科学学院教授
魏继宗	延安大学教育科学学院副院长, 教授
向 华	西安文理学院教育学院教授
谢先国	湖南省中小学教师发展中心科长, 湖南师范大学兼职教授
闫 楨	天水师范学院职业培训学院院长, 教授
杨秀莲	东北师范大学教师教育研究中心主任, 教授
姚成龙	北京大学出版社职业教育编辑部主任
余清臣	北京师范大学教育学部教育基本理论研究院副院长, 副教授
虞伟庚	丽水学院教师教育学院副院长, 教授
查晓虎	安徽师范大学教育科学学院教授
张昌勋	闽江师范高等专科学校副校长, 教授
张锦坤	福建师范大学教育学院院长助理, 副教授
张灵聪	闽南师范大学教育科学学院院长, 教授
张永明	陇南师范高等专科学校教授
郑先如	龙岩学院教育科学学院院长, 教授
郑燕林	东北师范大学计算机科学与技术学院副院长, 教授
仲丽娟	上海交通大学第二附属中学教师发展中心主任, 高级教师
周兴国	安徽师范大学教育科学学院教授
朱成科	渤海大学教师发展学院副院长, 教授
朱晓宏	首都师范大学教育学院教育基本理论研究所副所长, 教授

目 录

第一篇 数学学科基础知识	(1)
第一章 数学分析基础知识	(3)
第一节 函数、极限与函数的连续性	(4)
第二节 导数与微分	(15)
第三节 一元函数积分学	(29)
第二章 高等代数基础知识	(46)
第一节 行列式	(47)
第二节 矩阵	(53)
第三节 线性方程组	(62)
第四节 特征值、特征向量与二次型	(69)
第三章 空间解析几何基础知识	(80)
第一节 向量	(80)
第二节 平面	(83)
第三节 直线	(84)
第四节 曲面方程与空间曲线方程	(86)
第四章 概率论与数理统计基础知识	(90)
第一节 随机事件	(90)
第二节 古典概率	(92)
第三节 离散型随机变量的分布	(94)
第四节 随机变量的数学期望与方差	(95)
第五节 正态分布	(97)
第二篇 高中数学基本知识	(101)
第五章 高中数学基础知识	(103)
第一节 集合	(103)
第二节 常用逻辑用语	(105)
第三节 推理与证明	(107)
第四节 数系的扩充及复数	(109)
第六章 函数与数列	(114)
第一节 函数及函数的性质	(114)
第二节 基本初等函数	(117)
第三节 数列	(122)





第七章	不等式	(128)
第一节	不等式的性质	(128)
第二节	一元二次不等式及其解法	(129)
第三节	基本不等式及几个重要不等式	(131)
第四节	不等式的证明方法	(135)
第五节	简单线性规划	(136)
第八章	向量与立体几何	(141)
第一节	平面向量与空间向量	(141)
第二节	空间几何体	(144)
第三节	空间点、线、面的位置关系	(145)
第九章	平面解析几何	(153)
第一节	直线与方程	(153)
第二节	圆与方程	(155)
第三节	圆锥曲线与方程	(157)
第四节	极坐标与参数方程	(161)
第十章	统计与概率	(168)
第一节	统计	(168)
第二节	概率	(172)
第十一章	数学史选讲	(182)
第一节	数学发展简史	(182)
第二节	社会文明与数学发展	(184)
第三节	数学枝繁叶茂	(188)
第四节	中国现代数学的发展	(190)
第三篇	高中数学课程与教学的理论与实践	(195)
第十二章	高中数学课程	(197)
第一节	高中数学课程的基本理念与目标	(197)
第二节	高中数学课程的框架	(202)
第三节	高中数学课程的内容线索	(203)
第四节	教材编写和校本课程建设	(212)
第十三章	高中数学教学	(218)
第一节	高中数学教学原则	(218)
第二节	高中数学教学方法	(225)
第三节	概念、命题与问题解决教学	(234)
第十四章	数学教学设计	(251)
第一节	数学教学设计的基本理念	(251)
第二节	数学教学设计的主要环节	(253)
第三节	数学教学设计的一般结构	(259)
第十五章	数学教学实施	(262)





第一节	有效数学教学	(262)
第二节	数学教学技能	(267)
第三节	数学课堂生成	(291)
第十六章	数学教学评价	(299)
第一节	学生数学学习评价	(300)
第二节	教师数学教学评价	(311)
后记		(323)



第一篇 数学学科基础知识

第一章 数学分析基础知识

考纲内容

数学学科知识包括大学本科数学专业基础课程和高中课程中的数学知识.

大学本科数学专业基础课程的知识是指: 数学分析、高等代数、解析几何、概率论与数理统计等大学课程中与中学数学密切相关的内容, 包括数列极限、函数极限、连续函数、一元函数微积分、向量及其运算、矩阵与变换等内容及概率论与数理统计的基础知识. 本章属于大学本科数学专业基础课程知识.

其内容要求是: 准确掌握基本概念, 熟练进行运算, 并能够利用这些知识去解决中学数学的问题.

考纲解读

数学分析是大学本科数学专业主要基础课程之一, 考纲要求准确掌握基本概念, 熟练进行运算, 并能够利用这些知识去解决中学数学的问题, 这在考题中均有充分的体现.

准确掌握基本概念, 包括函数定义, 函数的奇偶性、有界性、凹凸性的定义, 数列与函数极限定义, 导数定义, 微分定义, 原函数与不定积分定义, 定积分定义等.

熟练进行运算, 包括求极限、求导数、求微分、求高阶导数、求不定积分、求定积分等.

能够利用数学分析知识去解决中学数学的问题, 包括函数的单调性、凹凸性的判断, 函数极值与最值的求解, 函数作图, 不等式的证明及应用定积分求平面图形的面积与旋转体的体积及曲线的弧长.

数学分析这几部分基本内容的要求及其相互关系是:

(1) 会求导数, 就会求微分, $dy = y' dx$;

(2) 会求导数, 就会求二阶导数, $y'' = (y')'$;

(3) 会求导数, 就会求变上限定积分函数的导数, $\left[\int_a^{g(x)} f(t) dt \right]' = f[g(x)]g'(x)$;

(4) 会求导数, 就会求极限, 对满足洛必达法则条件 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ 不定型有: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} =$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)};$$

(5) 会求极限, 就能判定函数的连续性, $f(x)$ 在 x_0 处连续的充要条件为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$;

(6) 会求导数,就会求函数的单调区间、极值和最值;

(7) 会求二阶导数,就会求函数的凹凸区间和拐点;

(8) 会求不定积分,就会求定积分,牛-莱公式 $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$,

这里 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数;

(9) 会求定积分,就会求平面图形的面积和旋转体的体积及曲线的弧长.

第一节 函数、极限与函数的连续性

一、函数

(一) 函数

1. 定义

设 x 和 y 是两个变量, D 是实数集 $\mathbf{R}$ 的某个非空子集, 若对于 D 中的每一个值 x , 变量 y 按照一定的法则有一个确定的值 $y \in \mathbf{R}$ 与之对应, 称变量 y 为变量 x 的函数, 记作 $y = f(x)$, 数集 D 称为函数的定义域, y 的范围 $\{f(x) | x \in D\} \subseteq \mathbf{R}$ 称为函数的值域.

2. 函数的两要素

定义域和对应规则是构成函数的两要素.

3. 函数的表示法

函数通常有三种表示方法: 解析法、图像法和列表法.

4. 分段函数

分段函数是在函数定义域的不同部分用不同的解析式表示的函数.

5. 隐函数

隐函数是由方程 $F(x, y) = 0$ 确定的 y 是 x 的函数 $y = y(x)$.

6. 函数的基本性质

(1) 奇偶性. 设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于坐标原点对称, 对任意给定 $x \in D$, 若 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数; 若 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数.

(2) 单调性. 任意给定 $x_1 < x_2 \in D$, 若 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 为单调增函数; 若 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 为单调减函数.

(3) 周期性. 若存在数 $T > 0$, 使得对于任意的 $x \in D$ 都有 $f(x+T) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为周期函数. 使 $f(x+T) = f(x)$ 成立的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期.

(4) 有界性. 对于任意的 $x \in D$, 如果存在 $M > 0$, 使 $|f(x)| \leq M$ 成立, 则称 $f(x)$ 为有界函数.

7. 反函数

设函数 $f: D_f \rightarrow R_f$ 为一一映射, 其中 D_f 为函数 f 的定义域, R_f 为函数 f 的值域, 则称逆映射 $f^{-1}: R_f \rightarrow D_f$ 为函数 f 的反函数, 记为 $y = f^{-1}(x)$.



8. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f , 函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_φ , 值域为 R_φ , 当 $D_f \cap R_\varphi \neq \emptyset$ 时, 记 $D=\{x|u=\varphi(x), x \in D_\varphi, u \in D_f\} \subseteq D_\varphi$. 对于任意 $x \in D$, 有 $u=\varphi(x) \in R_\varphi \cap D_f$ 与之对应, 进而有 $y=f(u)$ 与之对应, 这样通过 u 得到了以 x 为自变量, y 为因变量的函数, 称为由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 构成的复合函数, 记作 $y=f[\varphi(x)]$.

(二) 初等函数

1. 基本初等函数(5类)

- (1) 幂函数: $y=x^\mu$;
- (2) 指数函数: $y=a^x$ ($a>0, a \neq 1$);
- (3) 对数函数: $y=\log_a x$ ($a>0, a \neq 1$);
- (4) 三角函数: 正余弦, 正余切, 正余割;
- (5) 反三角函数: $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$.

2. 初等函数

常数和基本初等函数的有限次四则运算和复合.

(三) 例题

例 1 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 则函数 $g(x)=f\left(x+\frac{1}{3}\right)+f\left(x-\frac{1}{3}\right)$ 的定义域为().

- A. $[0, 1]$ B. $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ C. $\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$ D. $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$

解: 由 $\begin{cases} 0 \leq x+\frac{1}{3} \leq 1, \\ 0 \leq x-\frac{1}{3} \leq 1, \end{cases}$ 得 $g(x)$ 的定义域为 $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$.

或用排除法: 由 $g(1)$ 无意义, 排除 A 和 D; 由 $g\left(\frac{1}{3}\right)$ 有意义, 排除 C. 答案为 B.

例 2 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 有定义, 则下列函数为奇函数的是().

- A. $y=f(x)+f(-x)$ B. $y=x[f(x)-f(-x)]$
C. $y=x^3 f(x^2)$ D. $y=f(-x)f(x)$

解: $y=x^3 f(x^2)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, $y(-x)=(-x)^3 f[(-x)^2]= -x^3 f(x^2)= -y(x)$. 答案为 C.

例 3 已知函数 $f(x)$ 的最小正周期是 2, $g(x)$ 的最小正周期是 3. 则函数 $h(x)=f(x)+g(x)$ 的最小正周期是().

- A. 2 B. 3 C. 5 D. 6

解: 2 和 3 的最小公倍数是 6. 答案为 D.

例 4 下列函数中, 单调增区间为 $(-\infty, 0]$ 的是().

- A. $y=-\frac{1}{x}$ B. $y=-(x-1)$ C. $y=x^2-2$ D. $y=-|x|$

解: 画图可知答案为 D.





例 5 函数 $f(x)=x^2-2ax+a$ 在区间 $(-\infty, 1)$ 内有最小值, 则 a 的取值范围是().

- A. $a < 1$ B. $a \leq 1$ C. $a > 1$ D. $a \geq 1$

解: $y=x^2-2ax+a$ 的对称轴方程为 $x=a$ 且在区间 $(-\infty, 1)$ 内有最小值, 则 $a < 1$. 答案为 A.

例 6 已知函数 $f(x)=2^x+1$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$, 则 $f^{-1}(x) < 0$ 的解集是().

- A. $(-\infty, 2)$ B. $(1, 2)$ C. $(2, +\infty)$ D. $(-\infty, 1)$

解: 反函数为 $y=\log_2(x-1)$, $\log_2(x-1) < 0 \Rightarrow 0 < x-1 < 1 \Rightarrow 1 < x < 2$. 答案为 B.

例 7 求函数 $y=\sqrt{(x-1)(x-3)}+\sqrt{x-1}+\frac{x}{\ln(x-3)^2}$ 的定义域.

解: 由 $\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ (x-1)(x-3) \geq 0, \\ (x-3)^2 \neq 0, \\ (x-3)^2 \neq 1 \end{cases}$ 得函数的定义域为 $\{1\} \cup (3, 4) \cup (4, +\infty)$.

例 8 讨论函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性.

解: 因为对任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$, $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 都有定义, 且

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\ln \frac{-x^2+(1+x^2)}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x), \text{ 所以 } f(x)$$

$=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 是奇函数.

或因为 $f(x)+f(-x)=\ln 1=0 \Rightarrow f(-x)=-f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 是奇函数.

例 9 设 $f(x^3)+2f\left(\frac{1}{x^3}\right)=3x, x \neq 0$, 求 $f(x)$ 的表达式.

解: 根据 $f(x^3)+2f\left(\frac{1}{x^3}\right)=3x, x \neq 0$ 得 $f\left(\frac{1}{x^3}\right)+2f(x^3)=3 \frac{1}{x}, x \neq 0$, 解方程组

$$\begin{cases} f(x^3)+2f\left(\frac{1}{x^3}\right)=3x, \\ f\left(\frac{1}{x^3}\right)+2f(x^3)=3 \frac{1}{x} \end{cases}$$

得 $f(x^3)=\frac{2}{x}-x$, 令 $x^3=t$ 得 $f(t)=\frac{2}{\sqrt[3]{t}}-\sqrt[3]{t}$, 所以 $f(x)=\frac{2}{\sqrt[3]{x}}-\sqrt[3]{x}$.

例 10 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+f(x+2)=0$, 且在 $[0, 2]$ 上有 $f(x)=e^x+x^2-1$, 求 $f(x)$ 在 $[-2, 0]$ 上的表达式.

解: 因为 $x \in [-2, 0]$ 时, $x+2 \in [0, 2]$, 且 $f(x+2)=e^{x+2}+(x+2)^2-1$, 又因为 $f(x)+f(x+2)=0$, 所以 $f(x)=-f(x+2)=-e^{x+2}-(x+2)^2+1$.

链接阅读

阿基米德(前 287—前 212), 生于西西里岛(今属意大利)的叙拉古. 阿基米德把数学研究和力学、机械学紧密结合起来, 用数学研究力学和其他实际问题. 他运用穷举法解决了几何图形的面积、体积、曲线弧长等大量计算问题, 这些方法是微积分的先导.



二、极限

(一) 数列的极限

1. 数列定义

自变量取正整数的函数称为数列. 记为 $x_n = f(n)$ 或 $\{x_n\}$, x_n 通常称为通项或一般项.

2. 数列的极限

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists$ 正整数 N , 当 $n > N$ 时, $|x_n - A| < \epsilon$.

即: n 无限增大时, x_n 无限趋近于某个确定的常数 A .

3. 数列极限的四则运算

设数列 $\{x_n\}$ 、 $\{y_n\}$ 极限存在, 则

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} k x_n = k \lim_{n \rightarrow \infty} x_n;$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}, \text{ 其中 } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0.$$

4. 收敛数列的性质

(1) 极限的唯一性.

若数列 $\{x_n\}$ 极限存在, 则其极限必唯一.

(2) 收敛数列的有界性.

若数列 $\{x_n\}$ 极限存在, 则 $\{x_n\}$ 必有界.

(3) 保号性.

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A > 0$, 则当 n 相当大时, 有 $x_n > 0$;

若 $x_n > 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 则 $A \geq 0$.

(4) 单调性.

若 $x_n < y_n (n > N)$, 又 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$, 则 $A \leq B$.

5. 判定数列极限存在的两个常用准则

(1) 单调有界定理.

单调有界的数列必有极限.

(2) 夹逼定理.

如果数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 满足下列条件:

$$y_n \leq x_n \leq z_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$$

那么数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$.

(二) 函数极限

1. 函数极限的定义

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, $|f(x) - A| < \epsilon$.

