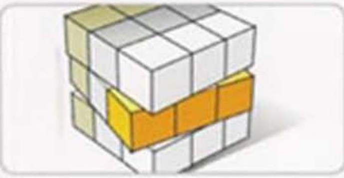
探索数学的奥秘



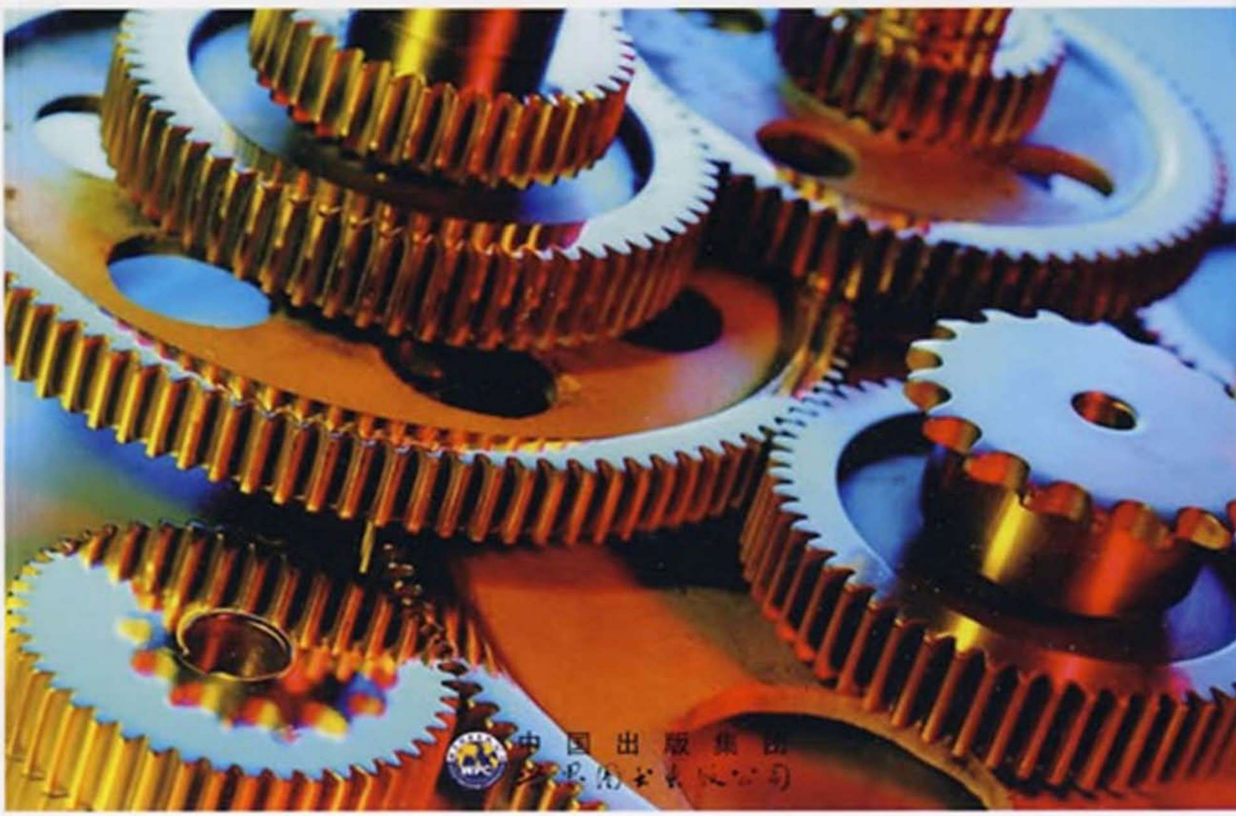
探索学科科学奥秘丛书

TANSUO XUEKE KEXUE AOMI CONGSHU

本丛书编委会◎编

数学就像一颗明珠一样闪烁着人类智慧的光芒，千百年来吸引着无数的数学爱好者，让他们在探索数学的道路上奉献出自己的才华和智慧。

发现每一个新的群体在形式上都是数学的，因为我们不可能有其他的指导。——达尔文



中国出版集团
世界图书出版公司

图书在版编目（CIP）数据

探索数学的奥秘/《探索学科科学奥秘丛书》编委会编．—广州：广东世界图书出版公司，2009．10
（探索学科科学奥秘丛书）
ISBN 978－7－5100－1163－4

Ⅰ．探…　Ⅱ．探…　Ⅲ．数学－青少年读物　Ⅳ．O1－49

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第177857号

探索数学的奥秘

责任编辑：吴怡颖
责任技编：刘上锦　余坤泽
出版发行：广东世界图书出版公司
（广州市新港西路大江冲25号　邮编：510300）
电　　话：（020）84451969　84453623
http：//www.gdst.com.cn
E－mail：pub@gdst.com.cn，edksy@sina.com
经　　销：各地新华书店
印　　刷：北京燕旭开拓印务有限公司
（北京市昌平马池口镇　邮编：102200）
版　　次：2010年4月第1版第2次印刷
开　　本：787mm×1092mm　1/16
印　　张：13
书　　号：ISBN 978－7－5100－1163－4/O·0006
定　　价：25.80元

前　言

数学极富实用意义的内容,包含了深刻的奥妙,发人深思,使人惊讶。数学就像一颗明珠闪烁着人类智慧的光芒,千百年来吸引着无数的数学爱好者,让他们在探索数学的道路上奉献出自己的才华和智慧。数学就像是时刻也离不开的良师益友,因为这门学科有着巨大的实用价值,正如一些数学家所说的那样:“在数学的世界里,甚至还有一些像诗画一样美丽的风景。”加里宁也曾经说过:“数学可以使人们的思想纪律化,能教会人们合理地思维着,无怪乎人们说数学是思想的体操。”

在探索数学的道路上,人们发现了一个又一个的难题,然后又一个一个地将这些难题解决,而这些难题,千奇百巧,琳琅满目,如同一朵朵绚丽无比的花朵,给人们挑战的勇气,刺激着人类的智慧。

在21世纪的今天,数学已经是一门应用范围极广、内容极为丰富、系统极其庞大的学科,是人们认识客观世界的重要工具,也是研究各门学科必不可少的重要工具。

这本书从人类初步了解数学说起,讲述了人们对数学的不断探索。包括了数学悖论,第一次、第二次、第三次数学危机,哥德尔不可判定命题、混沌、NPC理论等非平凡问题;算术、几何、图论当中的有趣问题。如将来数学还会产生悖论与危机吗?尚未解决的数学难题是否为不可判定命题?数学定理为什么要证明?本书集知识性、思想性和趣味性为一体,

说理直观浅显、通俗易懂，充分展示数学之美。读者也会从其中得到不同的乐趣和益处，可以当做休闲娱乐小品随便翻翻，有助于开阔眼界、增长知识、锻炼逻辑思维能力。

数学既古老又新颖，它与我们的日常生活密切关联。在探索中深入问题，在介绍中翻新思路，在评述中展示前人艰难跋涉的足迹，在阅读中体会创造的艰辛。希望读者能通过本书漫步在数学的幽径上，喜欢上数学，在生活之中寻找数学，感受数学的魅力，步入威严而又有趣的数学殿堂。

目　　录

第一章　数学起源

数学的起源始终是数学史研究与学习中饶有兴味的重要课题之一。它引导研究者与学习者去发现人类的这一深邃的心智活动是怎样一步一步地发生和发展，从而回答这个今天我们用以表达宇宙的惊人成就——计算是怎样获得的。由于这段历史发生在史前时期，又以不同的方式和过程独立地发生在文明的几个不同的源头，因此给研究带来很大的困难。迄今为止的许多研究结果虽然仍带有推测性，但不妨碍人们对数学的起源的正确认识。

第一节　数的形成

一、数的形成

数是“数(shǔ)”出来的。这句话确切地反映了数的概念产生的缘由。早期的人类大约也没有数(shǔ)的必要。从现在尚存在原始部落的语言中可以发现，他们甚至不具备表示3以上的数。美国人类学家柯尔(Curr)对澳洲原始部落研究后发现，很少有人会辨别四个东西，无须数(shǔ)数的原因之一，大约是占有物的贫乏。另外，没有物的集合体的概念也是产生不出数(shǔ)数活动的原因。例如，一些原始部落能区分出成

百种不同的树木，并赋予它们各种不同的名称，却不存在“木”这一概括性概念。数是集合的一种性质，没有集合的概念，自然也就难以产生揭示其性质的活动。

大约在距今1万年前，随着地球上冰水消融、气候变化，人类中的一部分开始结束散居的游牧生活，在大河流域定居起来，于是农业社会出现了。农民既靠地又靠天，因此他们十分关心日月的运行和季节的变化。此外，种植和贮藏、土地划分和食粮分配，以及随之而出现的贸易和赋税，等等，都潜在而又强烈地促使数(shǔ)数的必要，为数的概念和记数方法的产生提供了坚实的物质基础。

二、数觉与等数性

正整数的产生是在有史以前，人类起先并没有数的概念，对于物质世界中的数量关系的认识，只有一些模糊的感觉，这种感觉，有人称之为“数觉”。已经证实，有些动物，如许多鸟类也具有“数觉”。由于人类能认识世界，改造世界，在长期实践过程中，形成了数的概念。

在远古时代，原始人为了谋生，最关心的问题是——有没有野兽、鱼和果实，有则可以饱餐一顿，无则只好饿肚子。因此，人类就有了“有”与“无”的认识。进一步认识“有”的结果，引出了“多”与“少”的概念。这就使人类对数量关系从孤立的认识提高到了比较阶段。

在多与少的分辨中，认识“1”与更多的区别又是必然而关键的一步。从孩儿认识“1”的过程可以推测，人们最初对“1”的认识是由于人通常是用一只手拿一件物品产生的。也就是说，它是由一只手与一件物品之间的反复对应，在人的头脑中形成的一种认识。

建立物体集合之间的一一对应关系是数(shǔ)“数”活动的第一步。在这一活动中，不仅可以比较两个集合的元素之间的多或少，更主要的是可以发现相等关系，即所谓的等数性。

尽管集合与映射的概念直到19世纪才出现，但人们对集合间等数性的认识与集合间的一一对应思想却早已有之。因而，人们用所熟悉的东西来表示一个集合的数量特征。例如，数“2”与人体的两只手、两只脚、两只耳朵、两只眼睛等联系在一起。汉语中的“二”与“耳”同音，也即某一个集合中元素的个数与耳朵一样多，这就是利用了等数性。据说，古代印度人常用眼睛代表“二”。

在数的概念形成过程中，对等数性的认识是具有决定意义的。它促使人们使用某种特定的方式利用等数性来反映集合元素的多少。

根据考古资料，远古时代，人们用来表示等数性的方法很多，例如，利用小石子、贝壳、果核、树枝等或者用打绳结或在兽骨和泥板上刻痕的方法。这种计算方法的痕迹至今仍在一些民族中保留着。有时候，为了不丢失这些计算工具，而把贝壳、果核等串在细绳或小棒上，这样记下来的并不是真正的、抽象的数，只是集合的一类性质——数量特征的形式转移。

除了实物计数，人们还利用自己的身体来计数，利用屈指来计数：表示一个物体伸一个指头，表示两个物体伸两个指头，如此下去。直到现在，南美洲的印第安人还是用手指与脚趾合在一起表示数“20”。屈指计数为五进制、十进制等记数制的产生提供可能，当这种可能变成事实时，数的概念连同有效的计数技术也就产生了。

等数性刻画了集合的基数。当人们利用屈指记数时，不自觉地从基数转入了序数。例如，要表示某一集合包含三件事物时，人们可以同时伸出三个手指，这时的手指表示基数。如果要计数，他们就依次屈回或伸出这些手指，这时手指起了序数的作用。

无论是实物计数还是屈指计数都不是最理想的计数方法。实物计数演变为算筹、算盘。屈指计数沿着两个方向发展。

一个方向是探求手指计数的更理想的发展。例如，新几内亚的锡比

勒部族人，利用手指和身体的其他部位，可以一直计数到 27。中国有一种手指计数法，最高可算到 10 万。即使在现代，除了小孩初学计数时仍用手指外，在证券交易所也有用手指计数的。但随着数的语言、符号的产生，教育的普及，屈指计数的技术最终还是被淘汰了。

屈指计数发展的另一个方向是指计数和实物计数相结合，这个方向上创造出了进位制计数方法和完整的数的概念。

第二节　数的语言、符号与记数方法的产生

概念和语言、符号是密切相关的。概念是语言和符号的思想内容，而思想是在语言符号中形成的。数的符号和语言也是形成数的概念的必要条件和表达概念的手段，因而能巩固概念。

一、数的语言

在数的概念形成之前，没有表达数的专门语言，因而只能用“群”、“帮”、“套”、“堆”、“束”来表示“多”的整体性语言。

等数性的发现，产生了相应的语言。例如，在不同的民族，用耳朵、手、翅膀来表示“二”，用“鸵鸟的脚趾”（四趾）来表示“四”，用“手”表示“五”。

早期数的概念并不是抽象的，而是相当具体的。例如，在英国哥伦比亚的辛姆珊族的语言中，不同种类事物的数的词语是不一样的。

根据语言学家的研究，数学语言的结构，几乎都是一致的，人的十个手指都留下了不可磨灭的印迹。在大部分语言中，十以下的数都有各自的名称，十以上的数就用了某种组合原则。当然也有“五进制”的，即五以下的数都有各自的名称，五以上的数就用了组合原则，这起源于习惯用一只手计数的民族。不管各民族的数名如何不一致，它们都是数概念形成

的明证。

二、记录数的符号——数字

数字，即数的符号，是一种文字语言。数字帮助建立了一些不能从简单的观察和直接计算中发现的数的概念。在数的概念形成之后，它则起到了把概念以可见的形式再现的作用。有了数字，给出了抽象数概念的简单的具体化身，它也给出了非常简单地实现各种运算的可能。

数字产生于记数的需要，几乎每一个民族都有过自己的记数符号。

1. 中国早期的记数符号

我国最早的数码是大约在公元前13世纪，是人们在龟甲和兽骨上刻写出来的。这套数码共有13个，其中前4个是象形字，后5个是假借字。如原是“午”字，或原是“人”字，原是“切”字，它们至今仍保留着原来字的地方读音。“”像两人背(bèi)的形状，像肘(zhǒu)的形状，这两字的读音虽已改变，但仍可以发现它们之间的相近关系。

十、百、千、万的倍数，在甲骨文中通常用两个字合在一起来表示，如图1—1所示，读音仍是两个音节。记数方法是采用加法原则，如2656，甲骨文写法是。

图1—1

约在春秋战国时期(公元前770～前221年)，我国出现筹算符号，这

种符号是用算筹摆出来的，算筹样式古书上有记载。1971 年 7 月，陕西省千阳县一座西汉古墓中出土了一批两端整齐、粗细均匀的骨质圆柱形算筹，长度有 13.8 厘米、13.5 厘米和 12.6 厘米 3 种，直径均为 0.3 厘米。若将算筹按如下两种方式摆出两种数码，在图 1—2 中，6，7，8，9 这四个数字符号，在纵式和横式中，都表示 5 与 1，2，3，4 的和。在纵式中以一横(—)表示 5，在横式中以一竖(|)表示 5。

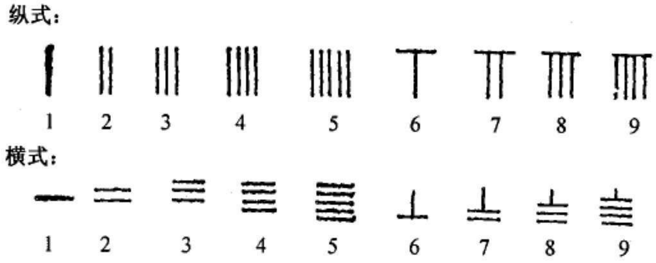


图 1—2

据《孙子算经》记载，算筹记数的方法是："先识其位，一纵十横，百立千僵，千十相望，万百相当。"它首先强调了位的重要性。一个数字符号只有在数目中占据一定的地位，才有其明确的意义，地位不同，值也不同。比如 15，50，7 532，这几个数中的 5，分别表示 5，50，500，这就是地位制的特点。数字在个位、百位上要用纵式，在十位、千位上要用横式，所谓"一纵十横，百立千僵"就是这个意思。而"千十相望，万百相当"，则是说千位数与十位数、万位数与百位数的摆法相同。例如，5431 摆成纵横相间的筹式，就是𝍭𝍣𝍫𝍠；如果都用纵式，则成了𝍤𝍣𝍢𝍠，表示的意义就不清楚了。

13 世纪，我国数学家开始用笔在纸上演算。这时除了将算筹摆成的数码和运算程序摹绘在纸上外，又出现了一套包括零在内的数码，这套数码后演变成暗码，如图 1—3 所示。这套暗码实际上是将筹算符号中的𝍣、𝍤、𝍰三个笔画较多的数改变一下符号的结果，其中前三个数码有时也写作 1，2，3。

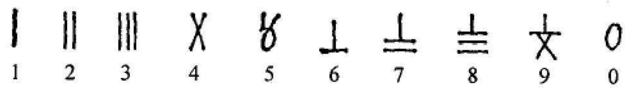


图 1—3

我国普遍采用阿拉伯数码是在 19 世纪末和 20 世纪初。那时，西方和日本的数学著作大量翻译过来，阿拉伯数码的优越性逐渐为人们所认识，如当时一些算术普及读本所说：阿拉伯数码虽然各国读音不同，然而意思和字体却相同，这种字容易写，也适用于笔算，看大势是要通行天下万国的。

2. 巴比伦早期的记数符号

大约在公元前 2500 年，巴比伦人采用了如下一套记数符号，这是用一种截面为楔形的笔在泥板上刻写而成的，因此后人称它为楔形符号。可以看出，上述数学是由两个基本符号(1)和(10)构成的。对于 100 以内的数，采用加法原则，用基本符号的组合表示。如 23 写成；30 写成。一般高位数写在低位数左边。

100 用表示，这又是一个基本符号。表示 100 的倍数时，倍数符号写在表示 100 的符号之前，如 300 应写成；1 000 写成。又是基本符号，如表示 10×1 000，而不是 20×100。

通常巴比伦人采用六十进制记数，有些也采用十进制，有些甚至还将六十进制与十进制混用。由于巴比伦人没有零的符号，因此，他们写出的数的意义比较模糊。比如“2、6、3”即可表示为 $2\times60^2+6\times60+3=7\ 563$，也可表示 $2\times60^3+6\times60^2+3\times60=453\ 780$，还可以表示 $2\times60+6\times60^0+3\times60^{-1}=126\frac{1}{20}$。

巴比伦人的记数法的最大优点是采用位值制，这是许多国家所不及的，我国也在很早采用位值制，但在时间上不及巴比伦。