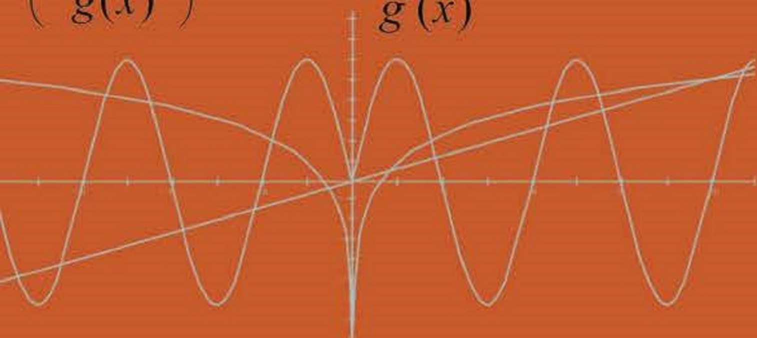
李森茂 编著

高中数学

函数全攻略

Hanshu quangonglüe

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$



$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\mathrm{os}(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

兰州大学出版社

李森茂 编著

高中数学

函数全攻略

Hanshu quangonglüe

兰州大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

函数全攻略 / 李森茂编著. -- 兰州 ：兰州大学出版社，2014.10
ISBN 978-7-311-04585-2

Ⅰ. ①函… Ⅱ. ①李… Ⅲ. ①代数课－高中－教学参考资料 Ⅳ. ①G634.623

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第243008号

责任编辑 张 仁
封面设计 郇 海

书 名 函数全攻略
作 者 李森茂 编著
出版发行 兰州大学出版社 （地址：兰州市天水南路222号 730000）
电 话 0931-8912613（总编办公室） 0931-8617156（营销中心）
0931-8914298（读者服务部）
网 址 http://www.onbook.com.cn
电子信箱 press@lzu.edu.cn
印 刷 兰州德辉印刷有限责任公司
开 本 787 mm×1092 mm 1/16
印 张 13.5
字 数 285千
版 次 2014年10月第1版
印 次 2014年10月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-311-04585-2
定 价 30.80元

前　言

函数是高中数学的基础、核心,是中学生最难学的内容之一。尽管编者在实际教学中采取了适当渗透、螺旋上升的方法,分段而有循环地安排函数知识,但学生的函数概念水平仍然较低。为了使学生提高运用函数解决问题的能力,编者对函数的内容进行了分类、归纳、整理。先对抽象函数的规律性知识进行总结归纳:①常见的抽象函数所对应的具体函数,②抽象函数的对称问题,③抽象函数的周期问题,④自对称与互对称;再系统归纳求函数定义域、值域、解析式、单调性、奇偶性、周期性、对称性、图象及与不等式、方程根的综合;还有,对高考中常见的分段函数及三次函数问题进行系统归纳总结。重要的是函数思想在观察、分析、解决数学问题中所起的基础作用,函数的思想和方法贯穿于高中数学的始终,能否学好函数关乎高中数学学习的成败,决定着初等数学学习成就的高低。从这个意义上说,高中函数的教与学,不只为了学好函数,更是为了学好数学。

笔者一直致力于高中数学一线教学研究工作,具有较为丰富的课堂教学经验和深厚的教研功底,尤其在高考备考指导方面具有较为独特的操作方法。近年来,为了把自己的教学教改成果分享给高中数学的教授者和学习者,在学校领导的大力倡导和支持下,笔者就高中数学的内容,在深入全面挖掘教材内容,科学合理地理解教改核心取向,准确、到位地把握高考全部知识点和高考改革新动向之基础上,经过一番辛苦,《函数全攻略》一书终于与读者见面了。

本书围绕高考热点,结合教学实践,注重方法归类整理,注重实际效果,对函数的教学和学习有指导意义,尤其适合于高考复习。编写过程力求在以下方面取得突破:①思想性:用函数的概念和性质分析、转化问题,实现函数与方程的互相转化,从而达到解决问题的目的。②针对性:针对高考热点,力求把函数重点、难点、焦点一网打尽,全线出击。③方法性:以传授经验为主,把指导方法作为出发点和归宿,力求“授人以渔”。

同仁张苗苗、李调霞、马艳霞、姜倩、李小琴、张博对本书做了大量的校对工作,李霞、姜彩玉、毛海英、赵海军、谢克仁、张翻红、张宝萍等进行了二次校对,在此一并表示感谢。

同时由于本人能力、编写时间所限,本书中难免存在一些疏漏和不足之处,恳请广大读者批评指正。

编　者

2014.9

目　录

第一讲　函数的定义域的求法及应用……001
第二讲　求函数的解析式……007
第三讲　函数值域求法及应用……016
　3.1　求 $y=\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$ 型最值问题……016
　3.2　求绝对值函数的最值问题……022
　3.3　利用判别式法求函数的值域……025
　3.4　求无理型函数的最值……028
　3.5　求三角函数的最值……031
　3.6　用均值不等式求函数的值域……036
　3.7　运用线性规划求最值……044
　3.8　解析几何中的最值问题……050
第四讲　函数的单调性……059
第五讲　函数的奇偶性、对称性、周期性……069
　5.1　函数的奇偶性……069
　5.2　函数的对称性……076
　5.3　函数的奇偶性、对称性和周期性之间的联系……080
第六讲　二次函数……087
　6.1　闭区间上二次函数的最值问题……087
　6.2　二次函数与二次方程及二次不等式的联系……092
第七讲　指数函数和对数函数……101
第八讲　抽象函数……111
第九讲　分段函数……122
第十讲　三次函数……129
第十一讲　函数图象的平移、对称、伸缩与翻折变换……139
第十二讲　函数应用问题……150
部分参考答案与解析……161

第一讲 函数的定义域的求法及应用

约定两个非空数集A和B,如果按照某个确定的对应关系 f ,对于集合A中任何一个数 x ,在集合B中都存在唯一确定的数 $f(x)$与之对应,那么就把对应关系 f 叫做定义在集合A上的函数,记作 $f: A \to B$,或者 $y=f(x), x\in A$. 此时,x 叫做自变量,集合$\{f(x), x\in A\}$叫做函数的值域,集合 A 叫作函数的定义域,即函数中自变量的取值范围,它和函数的值域及对应法则构成函数的三要素. 在三要素中,对应法则是核心,定义域是关键,而值域是受定义域与对应法则共同制约的. 因此,正确求出函数的定义域是一项非常基本的数学能力. 函数的定义域是函数部分的重要概念,定义域的求法本身及对函数知识的应用非常关键. 下面就以例题的形式介绍几种常用的求函数定义域的方法.

一 求具体函数的定义域

例 1 求函数 $y=\log_2\dfrac{2x-1}{3-x}$ 的定义域.

解 对数式的真数大于零.

依题意知:$\dfrac{2x-1}{3-x}>0$,即$(2x-1)(3-x)>0$,解得 $\dfrac{1}{2}<x<3$,

$\therefore$ 函数的定义域为$\{x\mid\dfrac{1}{2}<x<3\}$.

【评注】对数式的真数为 $\dfrac{2x-1}{3-x}$,本来需要考虑分母 $3-x\neq0$,但由于 $\dfrac{2x-1}{3-x}>0$ 已包含 $3-x\neq0$ 的情况,因此不再列出.

例 2 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{3}{1-\sqrt{1-x}}$;　　(2) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$.

解 具体函数的定义域必须结合具体函数对定义域的要求,要全面考虑各个条件.

(1)要使 $y=\dfrac{3}{1-\sqrt{1-x}}$ 有意义,须满足$\begin{cases}1-x\geqslant0\\1-\sqrt{1-x}\neq0\end{cases}$,解得 $x\leqslant1$且$x\neq0$.

$\therefore$ $y=\dfrac{3}{1-\sqrt{1-x}}$ 的定义域为$(-\infty, 0)\cup(0, 1]$.

(2) 要使函数有意义,则 $x+1\neq0$,即 $x\neq-1$. 故该函数的定义域为$\{x\mid x\neq-1\}$.

【评注】在求含分式的函数的定义域时,要注意两点:(1)分式的分母一定不能为0;(2)绝对不能先化简后求函数定义域,如本题,若先约分后求函数的定义域,则会使定义域的范

围扩大，变为所有实数.

例 3 求下列函数的定义域.

(1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-5x+6}}{x-2}$；(2) $y=\sqrt{3x-2}+\dfrac{(x+3)^0}{\sqrt[3]{2x-3}}$.

解 (1)依题意可得，分母不能为零并且该根式必须有意义，则

$\begin{cases}x^2-5x+6\geqslant 0\\x-2\neq 0\end{cases}$，解得 $x\geqslant 3$ 或 $x<2$，

因此函数的定义域为$\{x\mid x\geqslant 3或x<2\}$.

(2)要使函数有意义，则$\begin{cases}3x-2\geqslant 0\\2x-3\neq 0\\x+3\neq 0\end{cases}$，所以原函数的定义域为$\{x\mid x\geqslant \frac{2}{3}且x\neq\frac{3}{2}\}$.

【评注】对待此类有关分式、根式的问题，关注函数的分母与被开方数即可，两者要同时考虑，所求“交集”即为所求的定义域.

二 求抽象函数的定义域

例 4 (1)已知 $f(x)$的定义域为 $[1,2]$，求 $f(2x-1)$的定义域.

(2)已知 $f(2x-1)$的定义域为$[1,2]$，求 $f(x)$的定义域.

(3)已知 $f(x)$的定义域为$[0,1]$，求函数 $y=f(x+a)+f(x-a)$(其中 $0<a<\frac{1}{2}$)的定义域.

解 对于抽象函数的定义域，必须在透彻理解函数 $f(x)$定义域概念的基础上，灵活运用.

(1)$\because f(x)$的定义域为$[1,2]$ $\therefore 1\leqslant x\leqslant 2$ $\therefore 1\leqslant 2x-1\leqslant 2$ $\therefore 1\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$

$\therefore f(2x-1)$的定义域为$[1,\frac{3}{2}]$.

(2)设 $t=2x-1$ $\because f(2x-1)$的定义域为$[1,2]$ $\therefore 1\leqslant x\leqslant 2$ $\therefore 1\leqslant 2x-1\leqslant 3$

即$1\leqslant t\leqslant 3$，$\therefore f(x)$的定义域为$[1,3]$.

(3)$\because f(x)$的定义域为$[0,1]$ $\therefore\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1\\0\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases}$

又$\because 0<a<\frac{1}{2}$，在数轴上观察得$a\leqslant x\leqslant 1-a$，

$\therefore f(x)$的定义域为$[a,1-a]$.

【评注】本题容易被函数 $f(x)$中的 x 和 $f(2x-1)$中的 x 所迷惑，它们的意义是不同的：(1)小题相当于已知 $x\in[1,2]$，求出 $2x-1$ 的范围就是 $f(x)$ 的定义域；(2)小题中函数 $f(2x-1)$的定义域是$[1,2]$，意思是指 x 的取值范围是$(0,1)$，欲求 $f(x)$的定义域只要看 $2x-1$ 在什么范围就行了.

思考：若 $a\in R$，如何求 $f(x)$的定义域？

例 5 (1)已知 $f(x)$的定义域为$[0,2]$，求函数 $f(2x-1)$的定义域.

(2)已知 $f(x)$的定义域为 $[0, 2]$,求 $f(x^2)$的定义域.

(3)已知 $f(2x-1)$的定义域为$(-1, 5]$,求函数 $f(x)$的定义域.

(4)已知 $f(2x-5)$的定义域为$(-1, 5]$,求函数 $f(2-5x)$的定义域.

解 (1)由题意知,$0\leqslant 2x-1\leqslant 2$,得 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$,

故原函数的定义域为$\{x|\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\}$.

(2)由题 $0\leqslant x^2\leqslant 2$,故 $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$,

故原函数的定义域为$\{x|-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}\}$.

(3)由题知$-1<x\leqslant 5$,得$-3<2x-1\leqslant 9$,

故原函数的定义域为$\{x|-3<x\leqslant 9\}$.

(4)由题意知 $-1<x\leqslant 5$,则 $-7<2x-5\leqslant 5$

因此 $-7<2-5x\leqslant 5$,所以 $-\frac{3}{5}\leqslant x<\frac{9}{5}$.

故原函数的定义域为$\{x|-\frac{3}{5}\leqslant x<\frac{9}{5}\}$.

【评注】已知 $f(x)$的定义域为 D,求 $f[g(x)]$的定义域,实质是解不等式 $g(x)\in D$;而已知 $f[g(x)]$定义域为 D,求 $f(x)$定义域,是根据 $x\in D$,求 $g(x)$的取值范围.此时,一定要注意题目中给的条件,不要被它造成的假象所迷惑,尤其分清说的是 x 还是别的.

三 函数定义域在实际问题中的应用

在解决函数实际应用题时,要考虑结合实际问题,挖掘函数的定义域,切不可忽视定义域的条件限制作用.

例 6 用长为 L 的铁丝弯成下部为矩形,上部为半圆形的框架(如图 1-1),若矩形底边长为 $2x$,求此框架的面积 y 与 x 的函数关系式及其定义域.

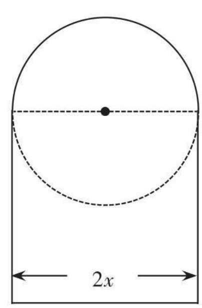


图 1-1

解 $\because$ 半圆的半径为 x

$\therefore$ 矩形的另一边长为 $\frac{L-2x-\pi x}{2}$

$\therefore y=\frac{\pi}{2}x^2+\frac{L-2x-\pi x}{2}\cdot 2x=-(2+\frac{\pi}{2})x^2+L\cdot x$

又 $\because \begin{cases}2x>0\\ \frac{1}{2}(L-2x-\pi x)>0\end{cases}$ $\quad\therefore 0<x<\frac{L}{2+\pi}$

$\therefore$ 函数的定义域为$(0,\frac{L}{2+\pi})$.

【评注】定义域不但要使函数的解析式有意义,还要对实际问题有意义;对于实际问题,即使题目没有明确要求写出定义域,也要注意注明.

例 7 将长为 a 的铁丝折成矩形,求矩形的面积 y 关于一边长 x 的函数解析式,并求函数的定义域.

解 设矩形的一边长为 x,则另一边长为 $\frac{1}{2}(a-2x)$,

于是得矩形面积为 $y=x\cdot\frac{1}{2}(a-2x)=\frac{1}{2}ax-x^2$，由于实际问题的需要，应满足

$$\begin{cases}x>0\\ \frac{1}{2}(a-2x)>0\end{cases},\qquad 解得\ 0<x<\frac{a}{2},$$

故所求的函数解析式为 $y=-x^2+\frac{1}{2}ax,\ x\in(0,\frac{a}{2})$.

【评注】根据实际问题求得函数的解析式后，还要注意问题的实际意义对自变量进行限制，这点要加倍注意. 这类题一般难度不大，但是要细心，考虑要全. 这样，以后再遇到这样的题，就简单了.

总的来说，中学阶段研究的函数都还只是函数领域中比较简单的. 但不要因为这样，就轻视这些问题. 对于每一个确定的函数，其定义域是确定的，为了更明确、更深刻地揭示函数的本质，就产生了求函数定义域的问题. 要全面认识定义域，深刻理解定义域，在寻求函数的定义域时，应当遵守下列规则：

(1)分式的分母不能为零；

(2)偶次方根的被开方数应该为非负数；

(3)通过有限个函数的四则运算得到的新函数，其定义域是这有限个函数的定义域交集(作除法时还要去掉使除式为零的 x 值)；

(4)对于由实际问题建立的函数，其定义域还应该受实际问题的具体条件限制.

达标检测

一、选择题

1. 函数 $y=\sqrt{2-x}+\sqrt{x}$ 的定义域为 ( )

A. $\{x\mid x\leqslant 2\}$　　B. $\{x\mid x\geqslant 0\}$

C. $\{x\mid x\leqslant 0或x\geqslant 2\}$　　D. $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$

2. 已知函数 $f(x)$的定义域为$(-1,\ 0)$，则函数 $f(2x+1)$的定义域为 ( )

A. $(-1,\ 1)$　　B. $(-1,\ -\frac{1}{2})$　　C. $(-1,\ 0)$　　D. $(\frac{1}{2},\ 1)$

3. 已知函数 $f(2x+1)$ 的定义域为$(-2,\frac{1}{2})$，则 $f(x)$ 的定义域为 ( )

A. $(-\frac{3}{2},\frac{1}{4})$　　B. $(-1,\frac{3}{2})$　　C. $(-3,2)$　　D. $(-3,3)$

4. 已知函数 $y=f(x)$的定义域为$[0,4]$，则函数 $y=f(2x)+\ln(x-1)$的定义域为 ( )

A. $[1,2]$　　B. $(1,2]$　　C. $[1,8]$　　D. $(1,8]$

5. 已知函数 $f(3^x)$的定义域为$(0,\ 1)$，求函数 $f(\log_3 x)$的定义域 ( )

A. $(0,\ 1)$　　B. $(3,\ 27)$　　C. $(3,\ 9)$　　D. $(1,\ 9)$

6. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ 的定义域为 M，$g(x)=\ln(1+x)$的定义域为 N，则 $M\cap N$ ( )

A. $\{x\mid x>-1\}$　　B. $\{x\mid x<1\}$

C. $\{x\mid -1<x<1\}$　　D. $\varnothing$

7. 函数 $f(x)=\frac{1}{x}\ln(\sqrt{x^2-3x+2})+\sqrt{-x^2-3x+4}$ 的定义域为 ( )

A. $(-\infty,-4]\cup[2,+\infty)$　　B. $(-4,0)\cup(0,1)$

C. $[-4,0)\cup(0,1]$　　D. $[-4,0)\cup(0,1)$

8. 设 $f(x)=\lg\frac{2+x}{2-x}$,则 $f(\frac{x}{2})+f(\frac{2}{x})$的定义域为 ( )

A. $(-4,0)\cup(0,4)$　　B. $(-4,-1)\cup(1,4)$

C. $(-2,-1)\cup(1,2)$　　D. $(-4,-2)\cup(2,4)$

9. 函数 $f(x)=\frac{3x^2}{\sqrt{1-x}}+\lg(3x+1)$的定义域为 ( )

A. $(-\frac{1}{3},+\infty)$　　B. $(-\frac{1}{3},1)$　　C. $(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$　　D. $(-\infty,\frac{1}{3})$

10. 设函数$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$和$g(x)=\log_{\frac{1}{2}}(2+x-6x^2)$的定义域分别是$M$和$N$,则 $M\cap C_RN$ 等于

( )

A. $[-\frac{1}{2},\frac{2}{3}]$　　B. $(-1,1)$

C. $(-\frac{1}{2},\frac{2}{3})$　　D. $(-1,-\frac{1}{2}]\cup[\frac{2}{3},1)$

11. 设函数 $y=f(x)$的定义域是 $[0,4]$,则函数 $g(x)=\frac{f(4x)}{\ln x}$的定义域是 ( )

A. $[0,1]$　　B. $[0,1)$

C. $(0,1)$　　D. $[0,1)\cup(1,4]$

二、选择题

12. 函数 $f(x)=\frac{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}x+1}}{x-1}$ 的定义域为____________.

13. 函数 $y=\frac{\lg(2\sin x-1)-\sqrt{-\tan x-1}}{\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8})}$ 的定义域为________________.

14. 若函数$y=f(x)$的定义域为$[-1,1]$,则函数$y=f(x+\frac{1}{4})\cdot(x-\frac{1}{4})$的定义域为____________.

15. 已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[a,b]$,则函数 $y=f(x+2)$ 的定义域为____________.

16. 已知函数 $f(x)$的定义域为 $[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$,则函数 $g(x)=f(3x)+f(\frac{x}{3})$的定义域为

____________.

三、解答题

17. 已知 $y=f(\sqrt{x}-1)=x+2\sqrt{x}+2$.

(1)求函数 $f(x)$的表达式;

(2)求函数 $f(x)$的定义域.

18. 求函数 $y=\sqrt{\log_2\frac{1}{\sin x}-1}$ 的定义域.

19. 求函数 $y=\sqrt{2+\log_{\frac{1}{2}}x}+\sqrt{\tan x}$ 的定义域.

20. 求函数 $y=\sqrt{-2\cos^2 x+3\cos x-1}+\lg(36-x^2)$ 的定义域.

21. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{1-2\cos x}$

(2) $y=\lg\sin x+\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}}$

(3) $y=\lg[\sin(\cos x)]$

(4) $y=\sqrt{\sin x-\cos x}$

(5) $y=2\sqrt{x}-\sqrt{1-7x}$

(6) $y=\dfrac{(x+1)^0}{|x|-x}$

(7) $y=\sqrt{x+8}+\sqrt{3-x}$

(8) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}}{x-1}$

(9) $y=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{|x|-x}}}$

22. 已知函数 $f(x)=\lg(ax^2+2x+1)$:

(1)若 $f(x)$ 的定义域是 R,求实数 a 的取值范围及 $f(x)$ 的值域;

(2)若 $f(x)$ 的值域是 R,求实数 a 的取值范围及 $f(x)$ 的定义域.

第二讲　求函数的解析式

由于函数概念比较抽象,学生对解有关函数记号 $f(x)$ 的问题感到困难,学好这部分知识,能加深学生对函数概念的理解,更好地掌握函数的性质,培养灵活性,提高解题能力,优化学生数学思维素质. 根据已知条件求函数的解析式,常用待定系数法、图象法、换元法、配凑法、赋值(式)法、方程法、变换法(奇偶变换法、对称变换法、周期变换法、伸缩平移法)、递推法等.

函数的解析式是表示对应关系的式子,是函数三种表示法中最重要的一种,对某些函数问题,能否顺利解答,往往取决于是不是能够求出函数的解析式. 本讲就常见的函数解析式的求法归纳分析如下.

一　图象法

已知函数图象,求函数解析式.

例 1　已知函数 $y=f(x)$ 的图象如图 2 - 1 所示,求函数 $f(x)$ 的解析式.

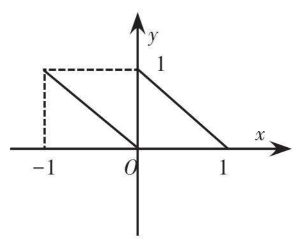


图 2-1

解　由图知函数是分段函数,分别对每段求解析式,易得

$$f(x)=\begin{cases}-x\ (-1\leqslant x<0)\\ -x+1\ (0\leqslant x\leqslant 1)\end{cases}.$$

【评注】已知函数图象求函数解析式,对于这类问题,我们只要能够准确地应用题中图象给出的已知条件,就能确定解析式.

二　换元法

用中间变量表示原自变量 x 的代数式,从而求出 $f(x)$,这也是证明某些公式或等式常用的方法,此法有助于培养学生的灵活性及变形能力.

例 2　已知 $f\left(\frac{x}{x+1}\right)=2x+1$,求 $f(x)$的解析式.

解　令 $\frac{x}{x+1}=u$,则 $x=\frac{u}{1-u}$,

$\therefore f(u)=2\cdot\frac{u}{1-u}+1=\frac{1+u}{1-u}$,

$\therefore f(x)=\frac{1+x}{1-x}$.

例 3 已知 $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$,求 $f(x)$的解析式.

解 令 $\frac{1-x}{1+x}=t$,则$x=\frac{1-t}{1+t}$,于是 $f(t)=\frac{2t}{1+t^2}$,所以 $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$.

例 4 已知函数 $f(x)$满足 $f(\ln x)=x-\frac{1}{x}(x>1)$,求 $f(x)$的表达式.

解 令 $\ln x=t(t>0)$,则 $x=e^t$,$\therefore f(t)=e^t-e^{-t}(t>0)$,$\therefore f(x)=e^x-e^{-x}(x>0)$.

例 5 已知 $f(1+2\sqrt{x})=2x+\sqrt{x}$,求函数 $f(x)$的解析式.

解 令 $1+2\sqrt{x}=t$,则 $x=\frac{(t-1)^2}{4}(t\geqslant1)$(引入新元要标注范围)

$\therefore f(t)=\frac{(t-1)^2}{2}+\frac{t-1}{2}=\frac{t^2-t}{2}(t\geqslant1)$ 从而 $f(x)=\frac{x^2-x}{2}(x\geqslant1)$.

【评注】①换元法和配凑法在解题时可以通用,若一题能用换元法求解析式,则也能用配凑法求解析式.

②已知 $f[g(x)]=h(x)$求 $f(x)$的问题,若用配凑法难求时,则可设 $g(x)=t$,从中解出 x,代入 $h(x)$进行换元来解.在换元的同时,一定要注意"新元"的取值范围.

③配凑法:在已知 $f[g(x)]=h(x)$的条件下,把$h(x)$配凑成以$g(u)$表示的代数式,再利用代换即可求 $f(x)$.此解法简洁,还能进一步复习换元法.

例 6 已知 $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$,求 $f(x)$.

解 $\because f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}=(\sqrt{x}+1)^2-1$, $\therefore f(x)=x^2-1(x\geqslant1)$.

例 7 已知 $f\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}-2$,求 $f(x)$.

解 $\because f\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}-2=\left(1+\frac{1}{x}\right)^2-2\left(1+\frac{1}{x}\right)-1$,$\therefore f(x)=x^2-2x-1(x\neq1)$.

例 8 已知 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}$,求 $f(x)$

解 $\because f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\frac{1}{x^2}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\right]$

又$\because x+\frac{1}{x}\geqslant2$ 或 $x+\frac{1}{x}\geqslant-2$

$\therefore f(x)=x(x^2-3)=x^3-3x$,$(x\geqslant2$ 或 $x\leqslant-2)$

例 9 已知:$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$,求 $f(x)$.

解 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$

$\therefore f(x)=x^2-2\ (x\geqslant2$或$x\leqslant-2)$

【评注】①使用配凑法也要注意自变量的范围限制;②换元法和配凑法在解题时可以通用,若一题能用换元法求解析式,则也能用配凑法求解析式.

四 待定系数法

先确定函数类型,设定函数关系式,再由已知条件,求出关系式中的未知系数.

例10 已知二次函数 $f(x)$满足 $f(1)=1$, $f(-3)=f(5)=0$,求 $f(x)$.

解 设函数为 $f(x)=a(x+3)(x-5)$,将(1, 1)代入得$-16a=1$,解得 $a=-\frac{1}{16}$,

$\therefore f(x)=\frac{-x^2+2x+15}{16}$.

例11 求一次函数 $f(x)$,使得 $f\{f[f(x)]\}=x+6$.

解 设一次函数为 $f(x)=ax+b\ (a\neq 0)$,

则 $f[f(x)]=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b$,

$f\{f[f(x)]\}=a(a^2x+ab+b)+b=a^3x+a^2b+ab+b$

由已知可得 $a^3x+a^2b+ab+b=x+6$,比较系数得:$\begin{cases}a^3=1\\a^2b+ab+b=6\end{cases}$,解得 $\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}$

$\therefore f(x)=x+2$.

例12 已知 $f(x)$为二次函数,且 $f(x+1)+f(x-1)=x^2+2x+4$,求 $f(x)$.

解 设 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$,则

$f(x+1)+f(x-1)=a(x+1)^2+b(x+1)+c+a(x-1)^2+b(x-1)+c$

$=2ax^2+2bx+2(a+c)=x^2+2x+4$

比较系数得 $\begin{cases}2(a+c)=4\\2a=1\\2b=2\end{cases}\Rightarrow a=\frac{1}{2},\ b=1,\ c=\frac{3}{2}$,

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}$.

例13 已知二次函数$y=f(x)$满足 $f(x-2)=f(-x-2)$,且图象经过点(0,1),被 x 轴截得的线段长为 $2\sqrt{2}$,求函数 $y=f(x)$的解析式.

分析 二次函数的解析式有三种形式:

①一般式:$f(x)=ax^2+bx+c\ \ (a\neq 0)$;

②顶点式:$f(x)=a(x+h)^2+k$ 其中$a\neq 0$,点(h, k)为函数的顶点;

③双根式:$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ 其中$a\neq 0$,x_1与x_2是方程$f(x)=0$的两根.

解法1 设 $f(x)=ax^2+bx+c\ \ (a\neq 0)$,

由图象经过点(0, 1)知:$f(0)=1$,即 $c=1$ ①

$\therefore f(x)=ax^2+bx+1$

由 $f(x-2)=f(-x-2)$知:

$a(x-2)^2+b(x-2)+1=a(-x-2)^2+b(-x-2)+1$

整理得:$(4a-b)x=0$

即 $4a-b=0$ ②

由被 x 轴截得的线段长为 $2\sqrt{2}$ 知,$|x_1-x_2|=2\sqrt{2}$,即$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=8$

即 $(-\frac{b}{a})^2-4\frac{1}{a}=8$ 整理得 $b^2-4a=8a^2$ ③

由②③得 $a=\frac{1}{2},\ b=2$,

$\therefore\ f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+1$.

解法2 由 $f(x-2)=f(-x-2)$知，二次函数对称轴为 $x=-2$，

所以设 $f(x)=a(x+2)^2+k\ (a\neq 0)$，以下略.

解法3 由 $f(x-2)=f(-x-2)$知，二次函数对称轴为 $x=-2$，

由被 x 轴截得的线段长为 $2\sqrt{2}$ 知，$|x_1-x_2|=2\sqrt{2}$，

易知函数与 x 轴的两交点为$(-2-\sqrt{2},0)$，$(-2+\sqrt{2},0)$.

所以，设 $f(x)=a(x+2+\sqrt{2})(x+2-\sqrt{2})\ (a\neq 0)$，以下略.

【评注】对于这类问题，我们先确定函数类型，设定函数关系式，再由已知条件，定出关系式中的未知系数，只要能够准确设定函数关系式确定解析式即可.

五 解方程组法

已知$f(x)$满足某个等式，这个等式除$f(x)$是已知量外，还出现其他未知量，如$f(-x)$、$f(\frac{1}{x})$等. 可以根据已知等式再构造其它等式组成方程组，通过解方程组求出$f(x)$.

例14 已知函数 $f(x)$满足 $f(x)+2f(-x)=x^3-2$，求函数 $f(x)$.

解 已知：$f(x)+2f(-x)=x^3-2$ ①

用 $-x$ 代换①中的 x 得 $f(-x)+2f(x)=-x^3-2$ ②

联立①②

$$\begin{cases}f(x)+2f(-x)=x^3-2\\ f(-x)+2f(x)=-x^3-2\end{cases},$$

解得：$f(x)=-x^3-\frac{2}{3}$.

例15 已知：$2f(x)+f(\frac{1}{x})=3x$，$(x\neq 0)$，求 $f(x)$.

解 已知：$2f(x)+f(\frac{1}{x})=3x$ ①

用 $\frac{1}{x}$ 去代换①中的 x 得 $2f(\frac{1}{x})+f(x)=\frac{3}{x}$ ②

联立①②

$$\begin{cases}2f(x)+f(\frac{1}{x})=3x\\ 2f(\frac{1}{x})+f(x)=\frac{3}{x}\end{cases}$$

解得 $f(x)=2x-\frac{1}{x}$，$(x\neq 0)$.

【评注】对于函数 $f(x)$，当满足形如 $af(x)+bf(-x)=g(x)$（$a\neq b\neq 0$）或 $af(x)+bf(\frac{1}{x})=g(x)$（$a\neq b\neq 0$）等关系时，我们可以用 $-x$ 或 $\frac{1}{x}$ 代换关系式中的 x，将得到的新式子与原关系式联立消元，将 $f(x)$从方程中解出来.

六 变换法

包括奇偶变换法、对称变换法、周期变换法、伸缩平移法等.

例 16 （奇偶变换法）已知$f(x)$为偶函数，$g(x)$为奇函数，且有$f(x)+g(x)=\frac{1}{x-1}$，求$f(x)$，$g(x)$.

解 $\because f(x)$为偶函数，$g(x)$为奇函数，

$\therefore f(-x)=f(x)$，$g(-x)=-g(x)$，

不妨用$-x$代换$f(x)+g(x)=\frac{1}{x-1}$ ①

中的x，得$f(-x)+g(-x)=\frac{1}{-x-1}$即$f(x)-g(x)=-\frac{1}{x+1}$ ②

显见①+②即可消去$g(x)$，求出函数$f(x)=\frac{1}{x^2-1}$再代入①求出$g(x)=\frac{x}{x^2-1}$.

例 17 （对称变换法）已知$f(x)$的图象关于直线$x=2$对称，当$x\leqslant 2$时，$f(x)=x^2-5x+3$，试求当$x>2$时$f(x)$的解析式.

解 设$x>2$，则$4-x<2$，那么$f(4-x)=(4-x)^2-5(4-x)+3=x^2-3x-1$，

而$f(x)$的图象关于直线$x=2$对称，$\therefore f(x)=f(4-x)=x^2-3x-1$.

例 18 （周期变换法）已知偶函数$f(x)$为定义在R上的周期为2的周期函数，当$x\in[3,4]$时，$f(x)=2x+1$，求当$x\in[-1,1]$时$f(x)$的解析式.

解 当$x\in[-1,0]$时，$x+4\in[3,4]$，$\therefore f(x+4)=2(x+4)+1=2x+9$，

而$f(x)$是周期为2的周期函数，$\therefore f(x)=f(x+4)=2x+9$；

当$x\in[0,1]$时，$-x\in[-1,0]$，$\therefore f(-x)=-2x+9$，而$f(x)$为偶函数，

$\therefore f(x)=f(-x)=-2x+9$.

综上，当$x\in[-1,1]$时，$f(x)=9-2|x|$.

例 19 （伸缩平移法）将抛物线$y=x^2-2x+4$上的任意一点保持横坐标不变，纵坐标压缩为原来的$\frac{1}{2}$，图象向左平移一个单位，求所得抛物线的解析式.

解 设$p(x,y)$是函数$y=x^2-2x+4$图象变换后所得新图象上的任意一点，

它是由原图象上的点$p_1(x_1,y_1)$变换后得到的，则$\begin{cases}x=x_1-1\\ y=\frac{1}{2}y_1\end{cases}$，

所以$2y=(x+1)^2-2(x+1)+4$，即$y=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}$.

【评注】对于给定轴对称函数、中心对称函数、周期函数等在某区间的解析式而求另一区间上函数解析式一类问题，我们可从目标（待求）区间入手，构造变量属于已知区间，通过给定的函数的性质把待求的解析式和构造变量的函数值之间的关系关联，从而把函数在待求区间上的解析式求解出来.

七 赋值法

给自变量取特殊值，从而发现规律，求出 $f(x)$的表达式

例 20 已知定义在实数集 R 上函数 $f(x)$ 对于一切 x、$y \in R$ 均有 $f(x+y)-f(x)=y(x-2y)$，且 $f(1)=0$，求 $f(x)$.

解 在 $f(x+y)-f(x)=y(x-2y)$ 中，令 $y=x$、$x=1$，得 $f(x+1)-f(1)=x(1-2x)$，

即 $f(x+1)=x(1-2x)$，$\therefore f(x)=(x-1)(3-2x)=-2x^2+5x-3$.

例 21 已知函数 $f(x)$ 对于一切实数 x、y 都有 $f(x+y)-f(y)=(x+2y+1)$ 成立，且 $f(1)=0$.

(1)求 $f(0)$的值；(2)求 $f(x)$的解析式.

解 (1)取 $x=1$，$y=0$ 则有 $f(1+0)-f(0)=(1+0+1) \Rightarrow f(0)=f(1)-2=0-2=-2$；

(2)取 $y=0$，则有 $f(x+0)-f(0)=(x+0+1)$，整理得 $f(x)=x-1$.

例 22 设 $f(x+y)$ 的定义域为自然数集，且满足条件 $f(x+1)=f(x)+f(y)+xy$，$f(1)=1$，求 $f(x)$.

解 $\because f(x)$的定义域为 N，取 $y=1$，则有 $f(x+1)=f(x)+x+1$

$\because f(1)=1$，

$\therefore f(2)=f(1)+2$，

$f(3)=f(2)+3$，

……

$f(n)=f(n-1)+n$，

以上各式相加，有 $f(n)=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，

$\therefore f(x)=\dfrac{1}{2}x(x+1)$，$x \in N$.

【评注】对求抽象函数的解析式问题，出现抽象表达式时，可用赋值法(可以是特殊值也可以是变量换变量)通过解方程求解.

八 递推法

对于定点在 N 上的函数，我们可以把 $f(n)$、$f(n+1)$、$f(n+2)$等与数列 $\{a_n\}$ 中的项 a_n、a_{n+1}、a_{n+2} 等关联起来. 我们直接从给定的条件关系式或通过巧妙的赋值，将其转化为数列 $\{a_n\}$ 的递推关系式，进而将求函数 $f(x)$的解析式转化为求数列 $\{a_n\}$ 的通项. 这样，我们便可以将求递推数列通项公式的思想方法迁移过来进行求解.

例 23 已知 $f(x)$是定义在正整数集上的函数，并且对于任意的 x、$y \in N_+$，都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$，且 $f(1)=2$，求 $f(x)$.

解 令 $y=1$ 得 $f(x+1)-f(x)=2+x$，那么有：