全国高等学校统一
招生考试资料汇编
1978～1984

数学

北京市高等学校招
生委员会办公室编

煤炭工业出版社

全国高等学校统一招生考试资料汇编

数　学

1978～1984

北京市高等学校招生委员会办公室 编

煤 炭 工 业 出 版 社

全国高等学校统一招生考试资料汇编
数　学
1978～1984
北京市高等学校招生委员会办公室 编
*
煤炭工业出版社　出版
（北京安定门外和平北路16号）
人民教育出版社印刷厂　印刷
新华书店北京发行所　发行
*
开本787×1092 1/32　印张6 1/2
字数 141 千字　印数1—324,800
1985年 3 月第 1 版　1985年 3 月第 1 次印刷
书号7035·2729　定价1.25元

前　言

党的十二届三中全会作出了《中共中央关于经济体制改革的决定》的战略决策。这个具有伟大历史意义的决策，必将对全国各条战线产生巨大、深远的影响，进一步推动包括高等教育战线在内的各条战线改革工作的深入发展。

为适应全国高等学校招生改革形势的要求，进一步促进高校招生科研工作的开展，我们编印了《全国高等学校统一招生考试资料汇编》。其目的是为教育科研机构、高等和中等学校、招生部门以及社会上热心于高校招生改革的教育工作者探讨有关方面问题提供必要的参考资料，也为有志于参加高考的青年提供一个辅助材料。

这套汇编收集了一九七八年至一九八四年的高校招生考试资料。为使这套资料具有较好的科研参考价值以及便于查阅、使用，我们将考试试题、参考答案和评分说明按年度汇集在一起。全套汇编按考试科目分别编排为政治、语文、数学（含文理两科）、物理、化学、历史、地理、生物和外语（含英、俄语种）九个分册。为保证汇编的质量，我们聘请了北京航空学院、北方交通大学、北京医学院、北京化工学院、北京外国语学院、北京师范学院等高等院校的有经验的专家对全书从内容到文字进行了认真的校核。这里需要说明的是，随着政治、历史情况的进展和变化，个别科目的个别题目或参考答案已不够妥当，这些地方在编印本资料过程中进行了必要的删减。由于我们水平不高，时间较紧，书中不足和失误之处在所难免，敬请同志们予以指正。

编　者

一九八四年十二月

目　录

一九七八年试题

注意事项：

1. 理工科考生要求除作（一）～（四）题和（七）题外，再由（五）、（六）两题中选作一题。文科考生要求作(一)～（四）题，再由（五）、（六）两题中选作一题（完全作对这五个题的，折合为100分）；不要求作第（七）题。

2. 考生解题作答时，不必抄题。但须准确地写明题号。例如（一）2、（五）等。

（一）（下列各题每题满分 4 分，五个题共20分）

1. 分解因式：$x^2-4xy+4y^2-4z^2$。

2. 已知正方形的边长为 a 。求侧面积等于这个正方形的面积、高等于这个正方形边长的直圆柱体的体积。

3. 求函数 $y=\sqrt{\lg(2+x)}$ 的定义域。

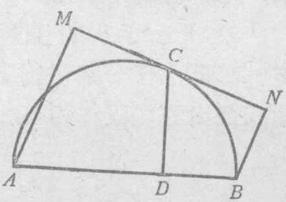
4. 不查表求 $\cos80^\circ\cos35^\circ-\cos10^\circ\cos55^\circ$ 的值。

5. 化简：$\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\dfrac{(\sqrt{4ab^{-1}})^3}{(0.1)^{-2}(a^3b^{-4})^{\frac{1}{2}}}$

（二）（本题满分14分）

已知方程 $kx^2+y^2=4$，其中 k 为实数，对于不同范围的 k 值，分别指出方程所代表图形的类型，并画出显示其数量特征的草图。

（三）（本题满分14分）



（如图）AB是半圆的直径，C是半圆上一点，直线 MN 切半圆于C点，$AM\perp MN$ 于 M 点，

$BN \perp MN$于N点，$CD \perp AB$于D点。

求证：1) $CD = CM = CN$

2) $CD^2 = AM \cdot BN$

（四）（本题满分12分）

已知 $\log_{18}9 = a (a \neq 2)$，$18^b = 5$。求$\log_{36}45$。

（五）（本题满分20分。本题和第（六）题选作一题）

已知$\triangle ABC$的三内角的大小成等差数列，$\mathrm{tg}A\mathrm{tg}C = 2 + \sqrt{3}$。求角A、B、C的大小，又知顶点C的对边c上的高等于$4\sqrt{3}$。求三角形各边a、b、c的长。（提示：必要时可验证 $(1+\sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}$）

（六）（本题满分20分）

已知：α、β为锐角，且

$$3\sin^2\alpha + 2\sin^2\beta = 1$$

$$3\sin 2\alpha - 2\sin 2\beta = 0$$

求证：$\alpha + 2\beta = \dfrac{\pi}{2}$

（七）（本题满分20分，文科考生不要求作此题）

已知函数$y = x^2 + (2m+1)x + m^2 - 1$（m为实数）。

1) m是什么数值时，y的极值是0？

2) 求证：不论m是什么数值，函数图象（即抛物线）的顶点都在同一条直线l_1上。画出$m = -1$、0、1时抛物线的草图，来检验这个结论。

3) 平行于l_1的直线中，哪些与抛物线相交，哪些不相交？求证：任一条平行于l_1而与抛物线相交的直线，被各抛物线截出的线段都相等。

一九七八年试题解答

解答

（一） 1.〔**解**〕原式 $=(x^2-4xy+4y^2)-4z^2$

$$=(x-2y)^2-(2z)^2$$

$$=(x-2y-2z)(x-2y+2z)$$

2.〔**解**〕设直圆柱体的底面半径为 r。则底面周长$2\pi r=a$

$$\therefore \quad r=\frac{a}{2\pi}$$

$$\therefore \quad 体积=\pi r^2 a=\pi\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 a=\frac{a^3}{4\pi}$$

3.〔**解**〕

$$\because \quad \lg(2+x)\geqslant 0$$

$$\therefore \quad 2+x\geqslant 1$$

$x\geqslant -1$为所求的定义域。

4.〔**解法一**〕原式 $=\sin 10^\circ\cos 35^\circ+\cos 10^\circ\sin 35^\circ$

$$=\sin(10^\circ+35^\circ)$$

$$=\sin 45^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

〔**解法二**〕原式 $=\cos 80^\circ\cos 35^\circ+\sin 80^\circ\sin 35^\circ$

$$=\cos(80^\circ-35^\circ)$$

$$=\cos 45^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

5. 〔解〕原式 $=(2^{-2})^{-\frac{1}{2}}\dfrac{(4ab^{-1})^{\frac{3}{2}}}{(10^{-1})^{-2}(a^3b^{-4})^{\frac{1}{2}}}$

$$=\frac{2\cdot 2^3}{10^2}\cdot a^{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}\cdot b^{-\frac{3}{2}+2}$$

$$=\frac{4}{25}a^0b^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{4}{25}b^{\frac{1}{2}}$$

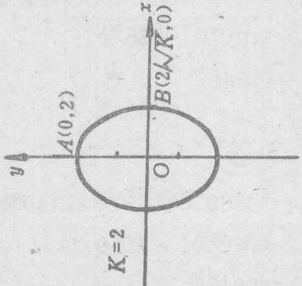
(二)〔解〕(注意：只要求考生作出全面而正确的分析，不要求写法和本题解完全一致。)

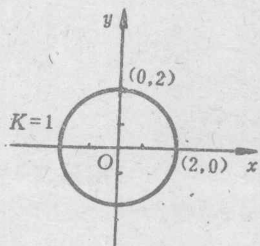
1) $K>0$时，方程的图形是椭圆，中心在坐标原点。

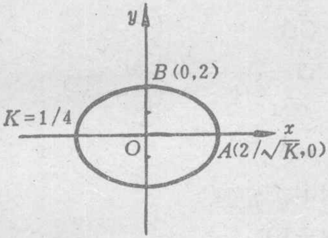
i) $K>1$时，长轴在y轴上，半长轴 = 2，半短轴 = $\dfrac{2}{\sqrt{K}}$。

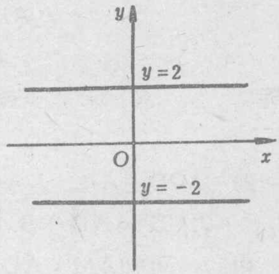
ii) $K=1$时，椭圆的特殊情况——圆，半径$r=2$。

iii) $K<1$时，长轴在x轴上，半长轴 = $\dfrac{2}{\sqrt{K}}$，半短轴 = 2。







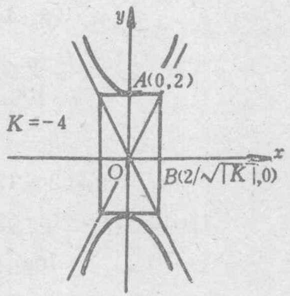


2）K＝0 时，方程 为 $y^2=4$。

图形是两条平行于 x 轴的直线 $y=\pm 2$。

3）K＜0 时，方程为

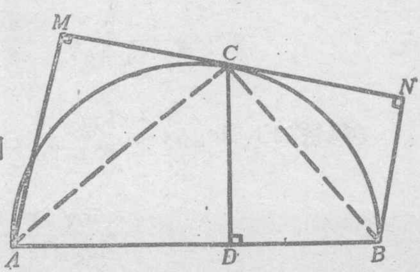
$$-\frac{x^2}{\frac{4}{|K|}}+\frac{y^2}{4}=1,$$



图形是双曲线，中心在坐标原点，实轴在 y 轴上。

（三）〔证〕

1）连 CA、CB，则∠ACB＝90°。



∠ACM＝∠ABC

（弦切角等于同弧上的圆周角），

∠ACD＝∠ABC

（同角的余角相等），

$\therefore \qquad \angle ACM = \angle ACD$

$\therefore \qquad \triangle AMC \cong \triangle ADC$

$\therefore \qquad CM = CD$

同理、 $\qquad CN = CD$

$\therefore \qquad CD = CM = CN$

2）$\because CD \perp AB$，$\angle ACB = 90°$

$\therefore CD^2 = AD \cdot DB$（比例中项定理）

由1)，可知$AM = AD$，$BN = BD$

$\therefore \qquad CD^2 = AM \cdot BN$

（四）〔**解法一**〕$\because \log_{18}9 = a$，$\therefore 18^a = 9$

又 $\qquad 18^b = 5$，

$\therefore \qquad 45 = 9 \times 5 = 18^a \cdot 18^b = 18^{a+b}$

设 $\qquad \log_{36}45 = x$，则$36^x = 45 = 18^{a+b}$

$\therefore \qquad \log_{18}36^x = \log_{18}18^{a+b}$

$$x = \frac{a+b}{\log_{18}36} = \frac{a+b}{1+\log_{18}2}$$

但 $\qquad 36 = 2 \times 18 = 4 \times 9$

$\therefore \qquad \log_{18}(2 \times 18) = \log_{18}(2^2 \times 9)$

即 $\qquad 1 + \log_{18}2 = 2\log_{18}2 + \log_{18}9 = 2\log_{18}2 + a$

$\therefore \qquad \log_{18}2 = 1 - a$

$$\therefore \qquad x = \frac{a+b}{1+(1-a)} = \frac{a+b}{2-a}$$

〔**解法二**〕 $\log_{36}45 = \dfrac{\log_{18}45}{\log_{18}36}$

$$= \frac{\log_{18}9 + \log_{18}5}{\log_{18}18 + \log_{18}2}$$

$$=\frac{a+b}{1+\log_{18}2}$$

以下解法同〔解法一〕。

（五）〔解〕 $A+B+C=180°$

又 $2B=A+C$

∴ $3B=180°,\ B=60°,\ A+C=120°$

∵ $\mathrm{tg}A\,\mathrm{tg}C=2+\sqrt{3}$ （1）

而 $\mathrm{tg}(A+C)=\dfrac{\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}C}{1-\mathrm{tg}A\,\mathrm{tg}C}$

∴ $$\begin{aligned}\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}C&=(1-\mathrm{tg}A\,\mathrm{tg}C)\,\mathrm{tg}(A+C)\\&=[1-(2+\sqrt{3})]\,\mathrm{tg}120°\\&=(-1-\sqrt{3})(-\sqrt{3})\\&=3+\sqrt{3}\end{aligned}$$ （2）

由（1），（2）知$\mathrm{tg}A$、$\mathrm{tg}C$是$x^2-(3+\sqrt{3})x+2+\sqrt{3}=0$的二根。

解这方程得 $(x-1)[x-(2+\sqrt{3})]=0$

∴ $x_1=1,\ x_2=2+\sqrt{3}$

设$A<C$，则得 $\mathrm{tg}A=1,\ \mathrm{tg}C=2+\sqrt{3}$

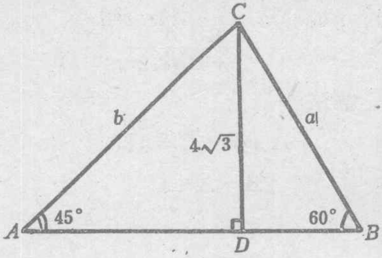
∴ $A=45°,\ C=120°-45°=75°$

又知C边上的高等于$4\sqrt{3}$，

∴ $$a=\frac{4\sqrt{3}}{\sin60°}=\frac{4\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=8$$

$$b=\frac{4\sqrt{3}}{\sin45°}=\frac{4\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=4\sqrt{6}$$

$$c=AD+DB$$



$$= b\cos45^\circ + a\cos60^\circ$$

$$= 4\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 8\cdot\frac{1}{2} = 4\sqrt{3} + 4$$

（六）〔**证法一**〕由$3\sin^2\alpha + 2\sin^2\beta = 1$，得$3\sin^2\alpha = \cos2\beta$

由$3\sin2\alpha - 2\sin2\beta = 0$，得

$$\sin2\beta = \frac{3}{2}\sin2\alpha = 3\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\therefore \quad \sin^2 2\beta + \cos^2 2\beta = 9\sin^2\alpha\cos^2\alpha + 9\sin^4\alpha$$

$$1 = 9\sin^2\alpha(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)$$

$$1 = 9\sin^2\alpha$$

$$\therefore \quad \sin^2\alpha = = \frac{1}{9}, \quad \sin\alpha = \frac{1}{3} \text{（}\alpha\text{为锐角）}$$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + 2\beta) &= \sin\alpha\cos2\beta + \cos\alpha\sin2\beta \\ &= \sin\alpha(3\sin^2\alpha) + \cos\alpha(3\sin\alpha\cos\alpha) \\ &= 3\sin\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) \\ &= 3\sin\alpha = 1\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \alpha + 2\beta = \frac{\pi}{2}$$

〔**证法二**〕由$3\sin2\alpha = 2\sin2\beta$得

$$3\sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\beta\cos\beta$$

$\therefore \qquad 9\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 4\sin^2\beta\cos^2\beta$

$$9\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha) = 4\sin^2\beta(1-\sin^2\beta)$$

$\therefore \qquad \sin^2\beta = \frac{1}{2}(1-3\sin^2\alpha)$

$\therefore \qquad 9\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha) = 4\cdot\frac{1}{2}(1-3\sin^2\alpha)\left[1-\frac{1}{2}\cdot\right.$

$$\left.\cdot(1-3\sin^2\alpha)\right]$$

$$= 2(1-3\sin^2\alpha)\cdot\frac{1}{2}(1+3\sin^2\alpha)$$

$$= 1-9\sin^4\alpha$$

$\therefore \qquad 9\sin^2\alpha = 1$

$$\sin\alpha = \frac{1}{3}\ （\alpha\text{为锐角}）$$

以下同〔证法一〕。

（七）〔解〕1）用配方法得

$$y = \left(x+\frac{2m+1}{2}\right)^2 - \frac{4m+5}{4}$$

$\therefore \qquad$ y 的极小值为 $-\frac{4m+5}{4}$

所以当极值为 0 时，$4m+5=0$，$m=-\frac{5}{4}$

2）函数图象抛物线的顶点坐标为

$$\left(-\frac{2m+1}{2},\ -\frac{4m+5}{4}\right)$$

即 $\qquad x = -\frac{2m+1}{2} = -m-\frac{1}{2}$

$$y=-\frac{4m+5}{4}=-m-\frac{5}{4}$$

二式相减得 $\qquad x-y=\frac{3}{4}$

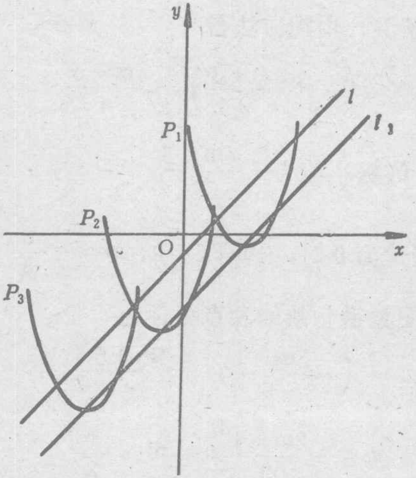
此即各抛物线顶点坐标所满足的方程，它的图形是一条直线，方程中不含m。因此，不论m是什么数值，抛物线的顶点都在这条直线l_1:$x-y=\frac{3}{4}$上。

当m = -1、0、1时，x,y之间的函数关系为

$$y+\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$y+\frac{5}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$$

$$y+\frac{9}{4}=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2$$



分别作出它们的图象p_1、p_2、p_3。

它们的顶点都在直线l_1上。

3）设$l: x-y=a$为任一条平行于l_1的直线。

与抛物线$y=x^2+(2m+1)x+m^2-1$方程联立求解。

消去y，得$x^2+2mx+m^2-1+a=0$。

$$\therefore \qquad (x+m)^2=1-a$$

因而当$1-a\geqslant 0$即$a\leqslant 1$时，直线 l 与抛物线相交，而$1-\alpha<0$即$\alpha>1$时，直线 l 与抛物线不相交。

$$当a\leqslant 1时，x=-m\pm\sqrt{1-a}$$

即直线 l 与抛物线两交点横坐标为

$$-m-\sqrt{1-a},\ -m+\sqrt{1-a}$$

因直线 l 的斜率为 1，它的倾斜角为45°。

∴直线 l 被抛物线截出的线段等于

$$[(-m+\sqrt{1-a})-(-m-\sqrt{1-a})]\sqrt{2}=2\sqrt{2(1-a)}$$

而这与m无关。

因此直线 l 被各抛物线截出的线段都相等。