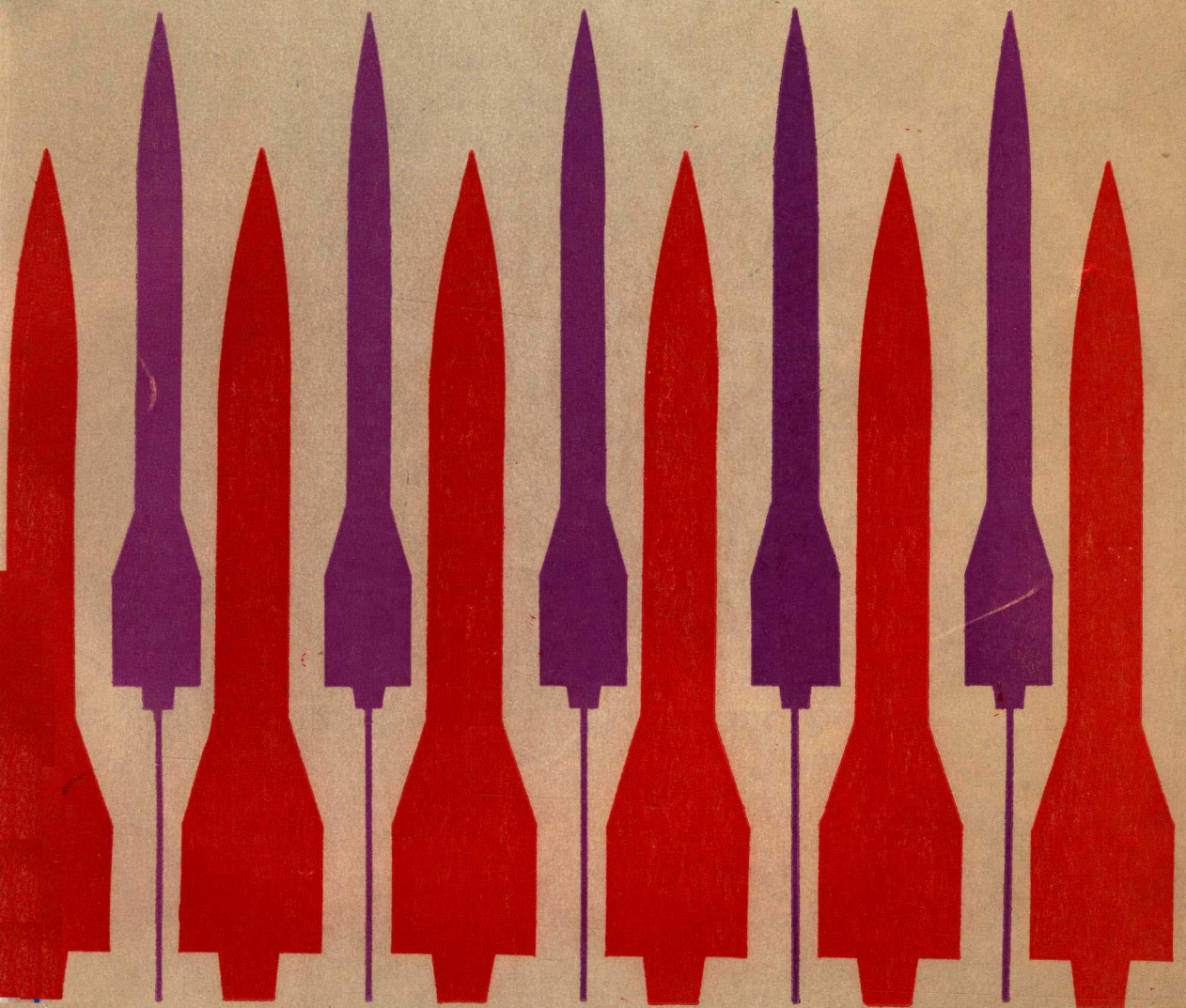


火箭结构力学

〔苏〕Л.И.瓦拉布赫 К.С.科列斯尼科夫 等 著

詹世斌 邸晓华 傅子智 译

国防工业出版社



火箭结构力学

〔苏〕 Л. И. 瓦拉布赫 等著
К. С. 科列斯尼科夫

詹世斌 邱晓华 傅子智 译

国防工业出版社

内 容 简 介

本书综合论述了火箭结构元件的承载能力,介绍了有关弹性塑性理论,壳体理论,火箭结构和发动机的动力和温度计算的必要知识。特别介绍了在最危险情况下的动载荷分析和实际结构(贮箱、舱段、弹头、发动机等)元件的选择,以及动载荷、温度和强度等计算的具体方法,并附有例题说明。

本书可供大专院校火箭专业的师生和从事本专业的工程技术人员学习参考。

ОСНОВЫ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ РАКЕТ

Л. И. Валабух,

К. С. Колесников, и т. д.

Издательство "Высшая школа" 1969

*

火箭结构力学

[苏] Л. И. 瓦拉布赫 等著

К. С. 科列斯尼科夫

詹世斌 邱晓华 傅子智 译

*

国防工业出版社 出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

廊坊日报印刷厂印刷

*

787×1092 1/16 印张 27 1/2 643 千字

1982年8月第一版 1982年8月第一次印刷 印数: 00,001—1,500册

统一书号: 15034·2370 定价: 2.85元

译者的话

当前，关于火箭结构力学的著作，特别是系统地论述这一问题的专著是很少的。本书所述内容对从事本专业的工程技术人员来说，无论是基本内容，还是分析方法，均有一定参考价值。由于火箭技术的迅猛发展，新的科研成果不断涌现。因此，阅读本书时应与最新成就结合起来。

本书由苏联编著出版，美国译成英文本，我们根据英文本译出。翻译时，对错误之处已作了更正，个别地方也作了一点删改。由于是转译，而且水平有限，难免有不当，甚至错误之处，望读者批评指正。

在此，谨向在翻译、绘图和整理译稿过程中给予热情帮助的同志深表谢意。

目 录

序	1
绪论	4
第 一 篇	
第一章 变形体力学	6
§1 基本概念和方程	6
§2 弹性体 变分方程 温度应力	14
§3 各向同性体 正交体和复合弹性体	20
§4 塑性理论的基本概念	28
§5 塑性变形理论	32
§6 流动理论 耐久性材料破坏的特点	38
§7 复合介质的变形特点	41
第二章 等厚度旋转壳体的理论基础	51
§8 壳体的几何学	51
§9 壳体的无力矩理论	57
§10 壳体的力矩理论 应力的分类	67
§11 壳体力矩理论中的边缘效应	73
§12 扁球壳体和带球形底的圆筒贮箱的计算	82
§13 圆筒壳体的力矩理论	93
§14 计算圆筒壳体的近似理论	102
§15 按极限载荷计算壳体的方法	113
§16 壳体的稳定性	121
第三章 结构动力学的计算基础	130
§17 结构的动载荷的特点	130
§18 弹性悬挂质量的振动	139
§19 非均匀杆的纵向振动	154
§20 非均匀直杆的横向振动	165
§21 板与壳的振动	180
§22 火箭体的纵向振动	186
§23 火箭体的横向振动	200
第四章 薄壁结构的传热问题	206
§24 结构与周围介质的换热条件	206
§25 导热问题的解法	212
§26 薄壁结构温度的计算特点	218

第 二 篇

第五章 计算图和载荷	229
§ 27 火箭结构的特点	229
§ 28 外载荷	232
§ 29 结构的空气动力加热	238
§ 30 火箭体的内力	245
§ 31 安全系数和设计情况	251
第六章 贮箱的计算	255
§ 32 结构图和载荷	255
§ 33 光滑贮箱	258
§ 34 网格式贮箱	265
§ 35 箱底的计算	272
第七章 乾部段 (dry sections) 的计算	277
§ 36 结构形式和载荷	277
§ 37 桁式、板式和梁式部段	280
§ 38 波纹式部段	290
§ 39 过渡架和发动机架	297
§ 40 在外压力作用下的部段	301
第八章 火箭弹头的计算	308
§ 41 载荷和外形	308
§ 42 火箭弹头的防热	318
§ 43 稳定裙的稳定性	324
§ 44 头部整流罩和支撑结构	327
第九章 典型结构元件的强度计算	337
§ 45 主隔框	337
§ 46 薄壁结构纵向力的传递	345
§ 47 高压容器、导管和波纹管容器的计算	352

第 三 篇

第十章 液体推进剂火箭发动机的结构计算	357
§ 48 液体推进剂火箭发动机壳体的典型结构型式和强度计算特点	357
§ 49 液体推进剂火箭发动机换热的特点	360
§ 50 发动机壳体的温度状态	366
§ 51 发动机燃烧室的总承载能力	375
§ 52 液体推进剂火箭发动机典型结构元件的计算	382
§ 53 动力学问题	387
第十一章 固体推进剂火箭发动机的结构计算	390
§ 54 固体推进剂火箭发动机的换热特点 发动机壳体的防热层有物理化学变化时的计算特点	390

§ 55 有防热层的金属壁的温度场	396
§ 56 喷管结构的温度场	407
§ 57 固体推进剂火箭发动机的强度	412
§ 58 固体推进剂装药的应力和应变	421
§ 59 固体推进剂火箭发动机的动力学问题	426
人名对照	430
参考文献	430

序 (摘 译)

目前,火箭技术的进展异常迅速,而且涉及的面也很广泛,因而大大地促进了国民经济许多部门的相应发展。火箭技术的成就也直接反映了许多有关科学领域的成就。

除了军事目的之外,火箭还越来越多的用于对空间和其它星球的研究。例如,1961年,加加林乘宇宙飞船“东方”号完成了围绕地球的飞行;1966年,自动站“月球-9”号在月球上进行了一次软着陆,并向地球发回了月球表面状况的图象;1967年,自动驾驶的行星际站“金星-4”也成功的在金星表面着陆。当前,已有大量的人造地球卫星和行星际站正在对地球和太阳系的外层空间进行探索。

在火箭技术和空间研究发展的每一阶段,都有许多复杂的问题需要靠科学技术来解决,如火箭强度就是其中一个很重要的方面。

解决现代火箭的强度问题,是以先进工业部门,首先是以造船和飞机结构的成就为基础的。

对从事火箭强度工作的工程师的要求是非常高的。他们应当了解变形体力学基础知识,结构力学、弹性结构动力学以及传热学等知识。此外,在分析不同结构的工作时,还应当能够迅速而准确地进行初步设计计算和最终验算。

关于弹道式导弹的强度问题,就用这本《火箭结构力学》,以最少的篇幅作一综合论述。阅读本书时,应当具备材料力学、振动理论和物理学的有关知识。

连续介质力学、动力学、传热学以及外载荷的计算问题,不是全都包括在结构力学内的。在早期的结构力学中,主要任务是对桥梁及不同工程结构的杆系进行计算。随着造船业的发展,又出现了另一类结构力学,如帕普科维奇所著的《船舶结构力学》。由于其中引入了平板的弯曲和稳定性理论,故又可叫作“应用弹性理论”。飞机结构力学的基本特点,是引进了薄壁杆件的理论。

自然,火箭结构力学在计算火箭强度中,也有其自身的固有特点。主要是研究结构与温度、动力和静力计算之间的相互关系。为了迅速和准确的确定火箭结构的基本尺寸,工程师应当具备全面的知识,以便在整个计算过程中都能进行具体计算。当然,计算工作也不能过分细化,否则会花费不少宝贵时间。因此,在研究结构问题时,应当进行简化,用近似方法计算强度。这一点也是本书讨论问题的基础。

本书共分三篇。

第一篇,是讨论变形体力学、旋转壳体理论、薄壁结构的动力计算和温度计算。在写这部分时,作者花了很大的精力详尽地分析了所有有关的理论资料,从而为系统地建立火箭强度计算的理论奠定了基础。一般辅助性的理论知识很少引入,因为这些知识是从事火箭专业的工程师必须具备的。当然,对研究壳体理论、火箭动力学和薄壁结构热计算的专业人员来说,本篇的相应章节也可作为辅助内容参考。

第一章,详述了变形体力学的基本概念。其中,还借用了理论力学的概念和方法,也

就是说,平衡方程和边界条件是根据可能位移(虚位移)原理导出的。这样作是为了给读者研究下一章的内容做准备(在下一章,将根据力学的变分方程论述壳体的近似理论)。而且,对塑性力学理论的基本概念也给予了适当的阐述。最后一节是讲复合介质,目的是为了读者熟悉这种介质的某些近似理论的概念。

第二章,导出了旋转壳体理论的基本微分方程,并给出了积分的方法。而重点是阐述壳体在不同载荷和各种支承条件下工作的特点,以及以无力矩理论为基础的计算方法。最后两节是讨论壳体的承载能力和稳定性问题。本章所述的基本概念和关系式,在以后近似计算火箭结构元件稳定性和承载能力的章节中都会用到。

第三章,是讲结构的动力计算问题,包括自然振动频率、振型和动载荷的计算方法,以及液体晃动问题。在研究火箭体的纵向和横向振动时,采用了非均匀弹性直杆作为计算图。贮箱液体的晃动计算就是按最小容积确定自然振动频率和载荷。

第四章,是讨论薄壁结构元件的温度场的计算方法和火箭结构温度场的计算特点。同时,也简要地叙述了结构与空气流和发动机冷却剂进行换热的条件,介绍了导热方程和边界条件,而且还建立了结构导热过程的数学模型。其中,对导热问题的解法也作了分析。

第二篇,是讨论火箭强度的具体计算。特别值得指出的是给出了设计计算的简化方法,即初步设计阶段的计算方法。完成这些计算的质量和速度,对所设计结构的完善程度是有决定影响的,因为在最后校核计算时,只能根据已有的图纸进行,亦即只可能校核火箭的强度是否足够。

设计计算的质量,在很大程度上是取决于火箭的计算图。因此,在本篇各章的开头,都对计算图的主要特点作了扼要叙述。所给的结构图,是为了有助于读者从材料强度的工程观点对火箭结构有所了解。

第五章,介绍了火箭的计算图,计算情况、载荷和安全系数。还引入了确定载荷的概念。根据这种概念(如乾部段[●]的载荷是轴向压力;贮箱的载荷是轴向力和流体压力,等等)可以确定结构的计算图。

第六章,是讨论火箭贮箱的各种结构形式和载荷,以及贮箱及其元件的计算。重点是对受力式圆筒贮箱进行了分析。另外,也简述了球形和环形贮箱的结构特点,以及光滑贮箱和网格式贮箱结构的特点及其计算。

第七章,介绍了某些乾部段的结构形式,并给出了桁条、纵梁、波纹加强件以及过渡架、发动机架和受外压力壳体的计算方法。

第八章,是讨论火箭弹头在再入大气层期间的近似计算方法,并考虑了结构的受热影响。同时,也讨论了壳体的强度和稳定性计算以及在外压力下稳定裙的计算问题。最后一节,对有关卫星和宇宙飞船的整流罩结构以及弹头支撑结构的计算作了介绍。

第九章,是讨论火箭典型结构元件(承力隔框、压力容器、导管和波纹管)的强度计算问题。

● 所谓乾部段是贮箱以外的弹体各部段的统称,如发动机舱、箱间段、整流罩、仪器设备舱等。(见第七章)

——译者注

第三篇，是论述火箭发动机的强度问题。描述的方法与第二篇相同。

第十章，是讨论液体推进剂火箭发动机燃烧室的典型结构形式和所受的载荷，并详述了液体推进剂火箭发动机壳体温度和应力-应变的计算方法。

第十一章，是讨论固体推进剂火箭发动机温度场的计算，特别是有关这种燃烧室强度计算的某些问题。如同液体推进剂火箭发动机一样，固体推进剂火箭发动机燃烧室的动力学问题，只作了定性的论述。

本书没有讨论宇宙飞船的强度问题，因为它们有自身的计算图，而且强度要求也与运载火箭不完全相同。

书末列出了大量文献目录，读者可以从中找到所感兴趣的更完整的论述。

绪 论(摘 译)

火箭技术在人类活动的许多最新和最先进的发展领域中占有突出的地位。二十世纪后期,最难忘的光辉成就是开始了准确地运用火箭技术来征服宇宙。这些成就的取得,只有当我们的知识提高到一定水平以后才有可能,因为它们与复杂的科学研究和先进的工业技术是紧密相关的。

现在,总的趋向是要加强各门独立科学间的相互联系,特别是火箭结构力学问题。如果在不久以前,人们把结构强度、振动理论、传热学和空气动力学作为独立的学科来看待的话,那么,现在在处理若干火箭技术问题时,就需要把它们密切结合起来加以考虑。对导弹工程师来说,不仅应当熟知这些学科,而且还要十分清楚地了解这些学科之间的关系。因为只有这样,才能准确自如的判明每一个力学方面的问题。

不仅如此,合理的分析方法和步骤(不仅是火箭技术)也是很重要的。一般地说,每一项工程计算和每一种技术科学的研究,都包含以下三个步骤:

1. 选择计算图。在这一阶段,要讨论和分析实际对象的特点,这是所要研究的最本质的问题;

2. 分析计算图。这时借助于逻辑学(通常是以数学符号的方式)来阐明反映实际对象的计算图的性质;

3. 从计算图返回到实际对象,并建立用于计算的最终公式。

关于计算图的分析 and 实际结构可靠性的评定,利用普通教程通常是作不到的(第二步)。十分明显,现代工程结构的种类是多种多样的,必须要按工程专业加以区分。

计算图,只是在某些专业学科内才有所论述。这类学科叫做“结构力学”:有建筑结构力学、焊接结构力学、船舶结构力学、飞机结构力学等等。在这些学科里,都是采用典型计算图进行分析的。

选择计算图(第一步)和估计安全系数(第三步)的问题,属于另一学科的内容,这一学科叫做“强度学”:有结构强度、船舶强度、飞机强度等等。

在飞机强度学里,是把典型组件(如机身)作为连续体进行论述的。首先,根据每一种工作条件和基本载荷类型作出计算图,尔后,根据分析结果评定结构效率。具体地说,就是用某一安全系数估计强度。安全系数的大小,取决于飞机的类型、结构和技术条件的要求。

但是,有关强度学的著作还是不多的。这首先可能是由于问题的复杂性所造成的,因为强度学与结构力学除计算方法不同外,还要研究与结构特性、结构工艺和使用性能有关的整个问题。

数学理论在强度计算中虽是很重要的,但一般都认为用单纯的数学方法计算应力实际上并不必要,而可以通过必要的假设进行简化计算,由此造成的误差均可在计算中引入安全系数加以考虑。因此,合理地选择安全系数是非常重要的。但总的来说也是极其困难

的，因为在确定安全系数时，需要考虑当代的技术水平和实际经验（如对类似结构已积累的经验），以及其它的后果，包括结构的破坏和许多其它情况等。

上面所述问题，在火箭技术上也同样存在。唯一的区别是需要使这些在方法上和技术上的问题得到合理的解决。现代的弹道式导弹是由一次使用的薄壁结构组成的，我们绝不能只根据弹性理论来计算它的元件，在许多情况下，还需要考虑塑性变形和局部失稳。但所有这些情况必然会使问题复杂化，因此，需要合理地协调相互间的关系，并使之最佳化。

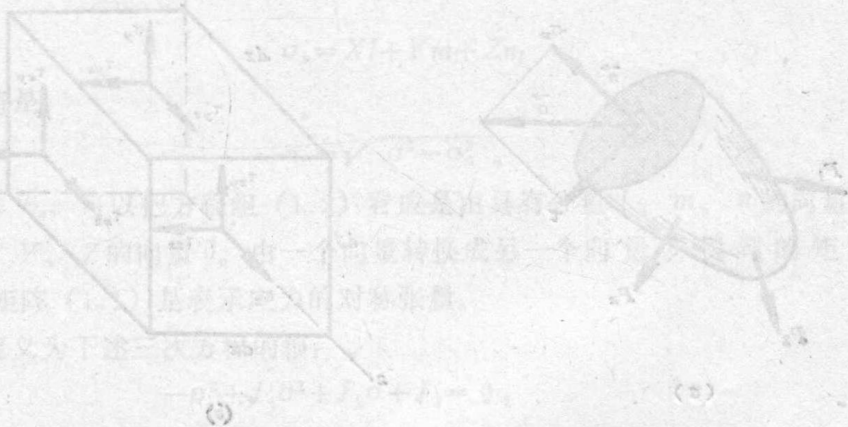
如果火箭强度计算仍采用传统的结构力学原则，那么，就会限制读者的眼界，而且还可能忽视与具体计算直接有关的重要问题。另一方面，有限的强度计算文献即使很好，也不能认为是可以完全接受的，因为在这些文献中，所需要的实用资料是很少的。而且，在火箭技术不断飞速发展期间，这种文献很可能已过时而毫无价值。

参与本书的作者虽然把书名定为《火箭结构力学》，但他们也选取了结构力学与强度学之间的其它内容。论述时，一方面是以普通理论为基础；另一方面，又以很大的注意力分析了结构的特点和工作范围，以及选择计算图和讨论安全系数。同时，还阐述了与书名关系不大的温度场和动力计算问题。

本书作者是尽力不回避困难问题，并以最大可能阐明问题以满足读者要求。因此，即本书有不足之处，也会取得读者的谅解。自然，以后还可以加以纠正和改进。

В. И. 费奥多西耶夫

(В. И. Феодосьев)



第一篇

第一章 变形体力学

§1 基本概念和方程

应 力

应力是表征结构材料内力水平的一个指标，它不一定是由作用于物体上的外力引起的，可能是由于温度变化或生产时的工艺方法造成的。在后一种情况下产生的应力叫做残余应力。研究残余应力对结构强度的影响，是一个专门问题，不属于本书所讨论的范围，读者可以参阅残余应力理论的文献^[18]。在这里，假设所讨论的结构材料中不存在初始残余应力，即初始状态时应力等于零。在这种情况下，可以假设应力是由外力和温度场的作用引起的。

拉应力的定义是用截面将物体分割成两部分后，单位面积上的作用力。如果以 dS 表示截面上的微元面积，以 $d\vec{R}$ 表示作用力，则拉应力为

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{R}}{dS}$$

向量 $\vec{\sigma}$ 不仅取决于微元在所述截面上的位置，而且还取决于它的空间方位，亦即 dS 的法向向量 $\vec{n}$ 的方向。向量 $\vec{\sigma}$ 可以分解为彼此垂直的两个分量：沿法向的分量和在截面内的分量（图 1.1 a），它们分别叫做正应力 σ_n 和剪应力 τ ，拉应力向量的模为 $\sigma = \sqrt{\sigma_n^2 + \tau^2}$ 。

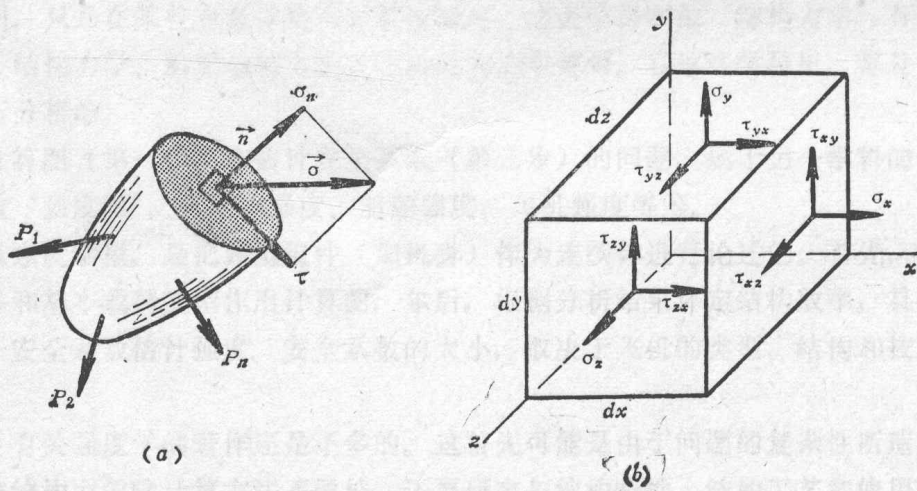


图 1.1

剪应力也可在截面内分解为两个任意方向的分力。

为了完全确定物体上某一点的应变状态，需要详细讨论一下应力向量沿坐标轴 x, y, z 上的投影，该坐标系不是任意选取的，应当使各坐标轴平行于相应的截面。现令 $x = \text{常}$

数 (即平行于坐标面 yz , 图 1.1b), 且以 $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ 表示正应力和剪应力分量, 剪应力分量的第一个脚标表示应力向量所在的位置, 第二个脚标表示向量的方向; 若令 $y = \text{常数}$, 则应力分量即以 $\sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{yz}$ 表示; 如果令 $z = \text{常数}$, 应力分量就是 $\sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ 。用这种方法表示应力分量时, 可以写成矩阵形式, 即

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

由于剪应力是成对出现的 (即 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$; $\tau_{xz} = \tau_{zx}$), 故矩阵 (1.1) 是对称的。

如果取出的是无限小的平衡角锥体, 则各截面上的力应当平行于坐标面。但基体的方位仍由特定的法向方向 $\vec{n}$ 表示 (图 1.2), 于是, 便得到熟知的柯西 (Cauchy) 方程^[15], 即

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n &= X; \\ \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n &= Y; \\ \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n &= Z. \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

其中, $l = \cos(\vec{n}, x)$ 、 $m = \cos(\vec{n}, y)$ 和 $n = \cos(\vec{n}, z)$ 表示向量 $\vec{n}$ 对坐标轴的方向余弦, 由此即可确定应力向量 $\vec{\sigma}$ 。X、Y、Z 表示该向量在各坐标轴上的投影。

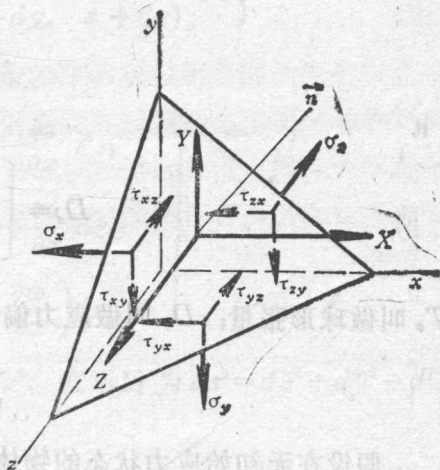


图 1.2

如果给定了所给点上的应力分量 (1.1), 那么, 按照公式 (1.2) 即可以确定通过该点任意方向上的应力向量 $\vec{\sigma}$ 的分量, 应力向量的模是

$$\sigma = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2};$$

正应力是

$$\sigma_n = Xl + Ym + Zn;$$

剪应力的绝对值是

$$\tau = \sqrt{\sigma^2 - \sigma_n^2}.$$

借助于矩阵 T_σ , 可以把方程组 (1.2) 看成是由具有分量 l 、 m 、 n 的向量 $\vec{n}$ 转换成具有分量为 X 、 Y 、 Z 的向量 $\vec{\sigma}$ 。由一个向量转换成另一个向量所得到的矩阵叫做张量^[49]。因此, 矩阵 (1.1) 是表示应力的对称张量。

主应力可定义为下述三次方程的根:

$$-\sigma^3 + J_1 \sigma^2 + J_2 \sigma + J_3 = 0,$$

式中 J_1, J_2, J_3 ——应力张量的不变量^[15]。

通过主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 可将不变量表示为

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3;$$

$$J_2 = -\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1;$$

$$J_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3.$$

在这种情况下,

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3.$$

平均应力可表示为

$$\sigma_o = \frac{1}{3} J_1 = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (1.3)$$

应力张量可用下述两个张量之和的形式表示:

$$T_\sigma = T_o + D_\sigma,$$

式中

$$T_o = \begin{bmatrix} \sigma_o & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_o & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_o \end{bmatrix}; \quad (1.4)$$

$$D_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_o & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_o & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_o \end{bmatrix}. \quad (1.5)$$

T_o 叫做球形张量; D_σ 叫做应力偏量, 它在塑性理论中起着很重要的作用。

应 变

假设在无初始应力状态的物体上, 有一个坐标为 x 、 y 、 z 的点 M , 现求在外力或温度场作用下的位移。令 u 、 v 、 w 是点 M 的总位移在坐标轴 x 、 y 、 z 上的投影(图1.3a)。

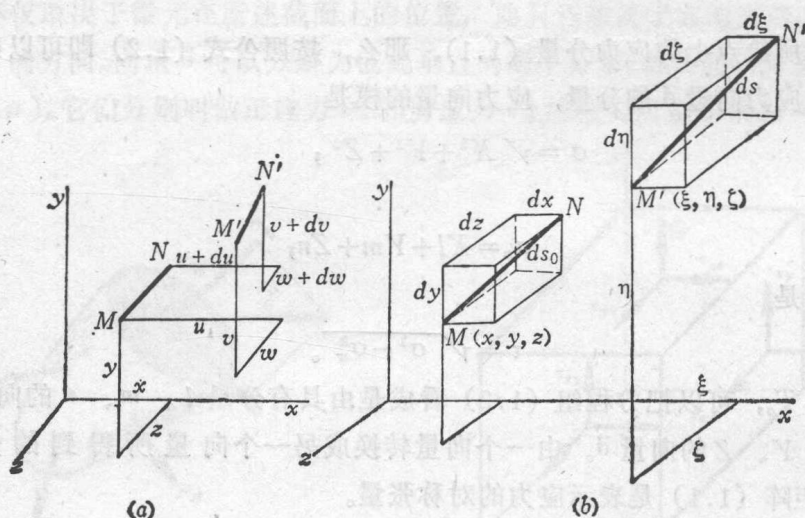


图 1.3

显然, u 、 v 、 w 可以认为是点 M 的坐标 x 、 y 、 z 的函数。在变形以后, 点 M 的坐标是

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x + u(x, y, z); \\ \eta &= y + v(x, y, z); \\ \zeta &= z + w(x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

在公式 (1.6) 中, 独立变量 x 、 y 、 z 是起参数作用, 即好像它们是连在物体的 M

点上, 在物体的整个变形过程中, 它们可以把点 M 与其他的点区别开。借助于独立变量 x 、 y 、 z (即初始状态下介质上点的坐标) 讨论连续介质的变形, 即相当于讨论所谓拉格朗日 (Lagrange) 坐标 (拉格朗日坐标 x 、 y 、 z 又叫做物质坐标)。在弹性理论中, 这是常见的方法, 这与流体力学中的方法是不同的, 在流体力学中, 最常用的方法是采用固定于空间的欧拉 (Euler) 坐标。

现取与点 M 无限接近的另一点 N , 初始坐标为 $x+dx$ 、 $y+dy$ 、 $z+dz$ 。变形以后, 点 N 的坐标是

$$\left. \begin{aligned} \xi + d\xi &= x + dx + u(x + dx, y + dy, z + dz); \\ \eta + d\eta &= y + dy + v(x + dx, y + dy, z + dz); \\ \zeta + d\zeta &= z + dz + w(x + dx, y + dy, z + dz). \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

根据微分法则,

$$\left. \begin{aligned} d\xi &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz; \\ d\eta &= \frac{\partial v}{\partial x}dx + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz; \\ d\zeta &= \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)dz. \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

线段 MN 长度的平方是: 变形前为 $ds_0^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, 变形后为 $ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2$ 。

根据公式 (1.8) 得

$$ds^2 = ds_0^2 + 2(\varepsilon_{xx}dx^2 + \varepsilon_{yy}dy^2 + \varepsilon_{zz}dz^2 + \varepsilon_{xy}dxdy + \varepsilon_{yz}dydz + \varepsilon_{zx}dzdx), \quad (1.9)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right]; \\ \dots\dots\dots \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

其它类似的值, 通过循环排列 (u, v, w) 和 (x, y, z) 后, 不难按公式 (1.10) 得到。现假设 $l = \frac{dx}{ds_0}$ 、 $m = \frac{dy}{ds_0}$ 、 $n = \frac{dz}{ds_0}$ 是变形前线段 MN 的方向余弦, 则按公式 (1.9) 即有

$$\left(\frac{ds}{ds_0} \right)^2 = 1 + 2(\varepsilon_{xx}l^2 + \varepsilon_{yy}m^2 + \varepsilon_{zz}n^2 + \varepsilon_{xy}lm + \varepsilon_{yz}mn + \varepsilon_{zx}nl). \quad (1.11)$$

当 ε_{xx} 、 ε_{yy} 、 $\dots\dots$ 、 ε_{zx} 的值远小于1时, 运用近似公式 $\sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \frac{1}{2}\alpha$ (当 α 很小时), 便得下述表达式:

$$\varepsilon = \frac{ds}{ds_0} - 1 = \varepsilon_{xx}l^2 + \varepsilon_{yy}m^2 + \varepsilon_{zz}n^2 + \varepsilon_{xy}lm + \varepsilon_{yz}mn + \varepsilon_{zx}nl. \quad (1.12)$$

借助于方向余弦 l 、 m 、 n 和 ε_{xx} 、 ε_{yy} 、 $\dots$ 、 ε_{zx} 的值, 可以用公式 (1.12) 确定任意线段的正应变 (相对伸缩)。因此, 把这些值叫做应变分量。如果 x 、 y 、 z 的函数 u 、 v 、

w 的所有偏导数远小于 1, 就可以使上述表达式大大简化。在这种情况下, 公式 (1.10) 中的平方项和相乘的导数项均可舍去。因此, 应变分量可用线性表达式表示。为了使它们与公式 (1.10) 相区别, 现用符号 ε_x 、 ε_y 、 ε_z 、 γ_{xy} 、 γ_{yz} 、 γ_{zx} 来表示, 即

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \gamma_{yz} &= \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \gamma_{zx} &= \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

上述各式是线性弹性理论中所熟知的应变与位移关系的表达式。在以后的所有情况中, 如果没有特殊规定, 所讨论的都是弹性理论的线性方程。这就是说, 平衡方程是由物体几何形状不变时的原始方程组成, 而应变方程则取 (1.13) 的形式。在非线性弹性理论方面有感兴趣的读者, 可以参阅诺沃日洛夫 (В. В. Новожилов) 的著作^[60]。

矩阵

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

是对称张量, 与前面讨论的应力张量类似。用于应力张量的所有公式, 当用 ε_x 代 σ_x , ε_y 代 σ_y , ε_z 代 σ_z , $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$ 代 τ_{xy} , $\frac{1}{2}\gamma_{yz}$ 代 τ_{yz} 和 $\frac{1}{2}\gamma_{zx}$ 代 τ_{zx} 后, 即可仿写出应变张量的表达式。因此, 主应变的表达式可以由下述三次方程确定:

$$-\varepsilon^3 + J_1\varepsilon^2 + J_2\varepsilon + J_3 = 0, \quad (1.15)$$

式中 J_1 、 J_2 、 J_3 ——应变张量的不变量。

第一个不变量 $J_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ 是微元体积的相对应变。

平均应变为

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z). \quad (1.16)$$

引进平均应变 ε_0 这个值后, 就可以像应力张量那样以两个张量之和的形式表示应变张量。

应变偏量是

$$D_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_0 & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_0 & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_0 \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$