[法] 雅克·迪斯米埃 著 丁善瑞 译 余家荣 校

大学数学教程

第一卷 下册

高等教育出版社

大学数

第一卷　下册

[法] 雅克·迪斯米埃　著

丁善瑞 译　余家荣 校

高等教育出版社

《大学数学教程》第一卷系根据法国 Gauthier-Villars 出版社 1977 年出版的 Jacques Dixmier 著"Cours de Mathématiques du premier cycle, premiére annèe"第二版译出。原书供法国大学第一阶段(相当于我国大学一、二年级)第一学年数学、物理专业或需用数学较多的理工各专业学生学习之用.

第一卷中译本分上、下册出版,上册是代数部分,下册是分析和几何两部分. 原书配备了习题和部分答案与提示,为了便于读者,中译本将它们分别放在上、下册之中.

大学数学教程

第一卷 下册

[法] 雅克·迪斯米埃 著

丁善瑞 译

余家荣 校

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 11.75 字数 280,000

1988 年 10 月第 1 版 1989 年 6 月第 1 次印刷

印数 00,001—2 710

ISBN 7-04-001946-9/O·705

定价 3.70 元

目　录

分　析

分 析

第十三章 实数的构造

读者不妨跳过本章，让实数的概念仍然停留在自己长期以来具有的直觉上面(但必须承认定理 14.2.2)．不过如果抽象的构造法不致引起厌烦的话，那么读者在这里将会发现一种从已经构造出来的有理数出发来严谨定义实数的方法．

13.1．有理整数、有理数

如果从自然数集 $\boldsymbol{N}$ 出发，并假定它的基本性质是已知的，那么我们就可以由此出发，用严谨的方法构造环 $\boldsymbol{Z}$ 和体 $\boldsymbol{Q}$，并能在这些集内定义传统的次序关系和绝对值的概念．我们将不局限于 4.6.7 和 4.7 中曾经简要叙述过的这些浅易的问题．

至于如何从 $\boldsymbol{Q}$ 出发，严谨地构造 $\boldsymbol{R}$，则是我们将要详细研究的一个较为困难的问题．

13.2．柯西序列、柯西序列的等价性

13.2.1．直观地看，一个实数可定义为一个十进位的展式．换句话说，可以定义为十进位小数的一个极限．另一方面，很多在分析中遇到的实数，并非作为十进小数的极限而是作为有理数的极限来定义的．这就启发我们用一个有理数的序列来定义实数．但我们立即发现，这个观点应当作适当修正．因为两个有理数序

列，如果它们极限相同，应该看作定义同一个实数．换句话说，假设一切存在有限极限的有理数序列所成的集为 E，而把 E 内两个具有相同极限的元素看作等同得出的等价关系为 R．于是把一个实数定义为 E/R 的一个元素，看来是颇合情理的．当然在定义 E 和 R 的时候，必须仅仅利用有理数，而不能假设实数为已知的．

现在开始对给出 E 的定义作一尝试．什么时候可以说，一个有理数序列 $(r_1, r_2, \cdots)$ 趋于有限极限呢？直观地看，必须对充分大的 n，r_n 彼此都很接近．换句话说，对充分大的 m 和 n，$r_m - r_n$ 的绝对值要非常地小．说得更确切点，必须对任何的正数 ε，不论它是怎样地小，当 m 和 n 超过某一整数（与 ε 有关）以后，不等式

$$|r_m - r_n| \leqslant \varepsilon$$

总成立．

然后尝试定义 R．什么时候可以说，两个有理数序列 $(r_1, r_2, \cdots)$ 和 $(r'_1, r'_2, \cdots)$ 趋于同一个极限呢？直观地看，必须对充分大的 n，r_n 和 r'_n 都很接近．换句话说，对充分大的 n，$r_n - r'_n$ 的绝对值要非常地小．说得更确切点，必须对任何正数 $\varepsilon > 0$，不论它是怎样地小，当 n 超过某一整数（与 ε 有关）以后，不等式

$$|r_n - r'_n| \leqslant \varepsilon$$

总成立．

到此，我们确立了定义 E 和 R 的原则．需要注意的只是，所选 ε 必须是有理数．因为我们除了有理数外别无所知；我们可以只限在 $\frac{1}{10}$，$\frac{1}{100}$，$\frac{1}{1000}$，…之中来选取 ε．

上述一切，必须看成是一种启发性的引导，从严密逻辑的观点来看，这些在以后都是用不着的．

13.2.2． **定义** Q 的一个元素序列 $(r_1, r_2, \cdots)$ 称为 Q 的一个柯西序列，如果它具有如下性质：对属于 Q 的任何一个元素

$\varepsilon>0$，总存在整数 N，使

$$m, n \geqslant N \Rightarrow |r_m - r_n| \leqslant \varepsilon.$$

记 $\boldsymbol{Q}$ 的柯西序列全体为 E.

13.2.3. 定义　属于 E 的两个序列 $(r_1, r_2, \cdots)$ 和 $(r'_1, r'_2, \cdots)$，称作是等价的，如果对 $\boldsymbol{Q}$ 的任何一个元素 $\varepsilon>0$，总存在整数 N，使

$$n \geqslant N \Rightarrow |r_n - r'_n| \leqslant \varepsilon.$$

13.2.4. 13.2.3 中定义的关系显然是自反并且对称的．可以证明它还是传递的．设 (r_n)，(r'_n)，(r''_n) 是 E 的元素；假定序列 (r_n) 和 (r'_n) 等价，序列 (r'_n) 和 (r''_n) 等价．设 $\varepsilon>0$ 是有理数．存在整数 N, N'，使

$$n \geqslant N \Rightarrow |r_n - r'_n| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon,$$

$$n \geqslant N' \Rightarrow |r'_n - r''_n| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon.$$

于是　$$n \geqslant \sup(N, N') \Rightarrow |r_n - r''_n| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

因而序列 (r_n) 与 (r''_n) 是等价的．

13.2.5. 把上面的这一等价关系记作 R．如果 (r_n) 和 (r''_n) 是等价的，就记作 $(r_n) \sim (r''_n)$．令 $E/R = \boldsymbol{R}$．$\boldsymbol{R}$ 的元素称为实数．

13.3. 实数的加法

13.3.1. 设 (r_n)，(s_n) 为 E 的元素．于是 $(r_n + s_n)$ 是 E 的元素．事实上，设 $\varepsilon>0$ 是有理数．存在整数 M, N，使

$$m, n \geqslant M \Rightarrow |r_m - r_n| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon,$$

$$m, n \geqslant N \Rightarrow |s_m - s_n| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon.$$

从而　$$m, n \geqslant \sup(M, N) \Rightarrow |(r_m + s_m) - (r_n + s_n)|$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

这正是我们所要证明的.

13.3.2. 若 $(r'_n) \sim (r_n)$, $(s'_n) \sim (s_n)$, 则 $(r'_n + s'_n) \sim (r_n + s_n)$. 事实上,设 $\varepsilon > 0$ 是有理数. 存在整数 P, Q, 使

$$n \geqslant P \Rightarrow |r_n - r'_n| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon,$$

$$n \geqslant Q \Rightarrow |s_n - s'_n| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon.$$

于是
$$n \geqslant \sup(P, Q) \Rightarrow |(r_n + s_n) - (r'_n + s'_n)|$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

断言得到证明.

13.3.3. 由上面讲的, 我们能够定义实数的加法. 设 $x, y \in \boldsymbol{R}$. 设 (r_n) 是 x 在 E 内的一个代表元, (s_n) 是 y 在 E 内一个代表元. 于是 $(r_n + s_n)$ 是 E 的一个元素(13.3.1), 并且它在 $\boldsymbol{R}$ 内所属的类,只与 x 和 y 有关 (13.3.2). 记这个类为 $x+y$.

13.3.4. 设 z 是 $\boldsymbol{R}$ 的另一个元素, 并设 (t_n) 是 z 在 E 内的一个代表元. 于是 $(x+y)+z$ 是序列 $((r_n+s_n)+t_n)$ 所属的类, $x+(y+z)$ 是序列 $(r_n+(s_n+t_n))$ 所属的类. 因为

$$(r_n + s_n) + t_n = r_n + (s_n + t_n),$$

可知 $(x+y)+z = x+(y+z)$. 因此, 实数的加法是结合的. 同理可知,它还是交换的. 显然, (0, 0, …, 0 所属的类是对于加法的中性元素. 把这一中性元素记成 0 是合适的. 最后可以看出, (r_n) 的类以 $(-r_n)$ 的类为它的反元素.

简单说来, $\boldsymbol{R}$ 对于加法构成一个交换群.

13.4. 实数的乘法

13.4.1. 若 $(r_n) \in E$, 则存在有理数 $A > 0$, 使对一切 n, 不等

式 $|r_n|\leqslant A$ 成立. 事实上, 存在整数 s, 使

$$m,\ n\geqslant s\Rightarrow|r_m-r_n|\leqslant 1.$$

因而只须令

$$A=\sup(|r_1|,\ |r_2|,\ \cdots,\ |r_{s-1}|,\ |r_s|+1)$$

就可以了.

13.4.2. 设(r_n)、(s_n)是 E 的元素. 于是$(r_n\cdot s_n)$是 E 的元素. 事实上, 设 $\varepsilon>0$ 是有理数. 存在有理数 $A>0$, $B>0$, 使对一切 n, 不等式 $|r_n|\leqslant A$, $|s_n|\leqslant B$ 成立 (13.4.1). 其次, 存在整数 M, N, 使

$$m,\ n\geqslant M\Rightarrow|r_m-r_n|\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{B},$$

$$m,\ n\geqslant N\Rightarrow|s_m-s_n|\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{A}.$$

于是

$$m,\ n\geqslant\sup(M,\ N)\Rightarrow|r_m s_m-r_n s_n|=|r_m(s_m-s_n)+(r_m-r_n)s_n|$$

$$\leqslant A\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{A}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{B}\cdot B=\varepsilon.$$

断言由此得到证明.

13.4.3. 若$(r_n')\sim(r_n)$, $(s_n')\sim(s_n)$, 则$(r_n'\cdot s_n')\sim(r_n\cdot s_n)$. 事实上, 设 $\varepsilon>0$ 是有理数. 存在有理数 $A'>0$, $B>0$, 使对一切 n, 不等式 $|r_n'|\leqslant A'$, $|s_n|\leqslant B$ 成立; 另一方面, 存在整数 P, Q, 使

$$n\geqslant P\Rightarrow|r_n-r_n'|\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{B},$$

$$n\geqslant Q\Rightarrow|s_n-s_n'|\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{A'}.$$

因而

$$n\geqslant\sup(P,\ Q)\Rightarrow|r_n's_n'-r_n s_n|=|r_n'(s_n'-s_n)+(r_n'-r_n)s_n|$$

$$\leqslant A'\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{A'}+\frac{1}{2}\ \frac{\varepsilon}{B}\cdot B=\varepsilon.$$

证毕.

13.4.4. 假定 $x, y\in \boldsymbol{R}$. 设(r_n)是 x 在 E 内的代表元，(s_n)是 y 在 E 内的代表元. 于是 $(r_n\cdot s_n)\in E$(13.4.2)，并且 $(r_n s_n)$ 在 $\boldsymbol{R}$ 中的类只与 x 和 y 有关 (13.4.3). 把这个类记为 xy.

13.4.5. 象在定义加法时所作的推理那样，可以看出，这个乘法在 $\boldsymbol{R}$ 内是结合的交换的并且关于加法是分配的. 类$(1,1,1,\cdots)$是乘法的中性元素；当然，把这个中性元素记成 1.

简单地说，$\boldsymbol{R}$ 是有单位元素的一个交换环.

13.4.6. 我们将需要如下结果：设 x 是 $\boldsymbol{R}$ 的非零元素；存在有理数 $\alpha>0$ 及 x 的一个代表元 (r_n)，使得对每个 n，或者总有不等式 $r_n\geqslant\alpha$ 成立，或者总有 $r_n\leqslant-\alpha$ 成立.

事实上，设(s_n)是 x 的一个代表元. 因为 $x\neq 0$，所以序列 (s_n) 与序列 $(0, 0, 0, \cdots)$ 不等价. 故：

(i) 存在有理数 $\varepsilon>0$，使对任何整数 N，总存在 $n(\geqslant N)$适合不等式$|s_n-0|>\varepsilon$.

另一方面，因为 $s_n\in E$，所以：

(ii) 存在整数 P，使

$$m, n\geqslant P\Rightarrow|s_m-s_n|\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon.$$

由(i)，存在 $p(\geqslant P)$，使$|s_p|>\varepsilon$.（如有必要可以把 x 换成 $-x$，因此我们总可以假定 $s_p>\varepsilon$.）于是，根据 (ii)，

$$m\geqslant P\Rightarrow|s_m-s_p|\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon\Rightarrow s_m$$

$$\geqslant s_p-|s_m-s_p|\geqslant\varepsilon-\frac{1}{2}\varepsilon=\frac{1}{2}\varepsilon.$$

因而当 $n<p$ 时，令 $r_n=\frac{1}{2}\varepsilon$；当 $n\geqslant p$ 时，令 $r_n=s_n$，那么(r_n)不仅是 x 的一个代表元，而且对一切 n，都有不等式

$$r_n\geqslant\frac{1}{2}\varepsilon$$

成立.

13.4.7. 定理 $\boldsymbol{R}$是体.

证明 考虑到13.4.5和4.5.6,只须证明$1\neq 0$,并且$\boldsymbol{R}$的每一个非零元素都可逆. 式$1\neq 0$是显然的:因为序列$(1, 1, 1, \cdots)$和$(0, 0, 0, \cdots)$不等价. 设x是$\boldsymbol{R}$的一个非零元素. 我们证明x可逆. 根据13.4.6,存在有理数$\alpha>0$,及x的一个代表元(r_n),使对每一个n,不等式$|r_n|\geqslant\alpha$成立. 我们证明$(r_n^{-1})\in E$. 设$\varepsilon>0$;存在整数N,使

$$m, n\geqslant N\Rightarrow|r_m-r_n|\leqslant\varepsilon\alpha^2.$$

于是, $$m, n\geqslant N\Rightarrow|r_m^{-1}-r_n^{-1}|=\frac{|r_m-r_n|}{|r_m|\,|r_n|}\leqslant\frac{\varepsilon\alpha^2}{\alpha^2}=\varepsilon.$$

故$(r_n^{-1})\in E$. 显然(r_n)的类与(r_n^{-1})的类互逆,因而x确实是可逆的.

13.5. 有理数可以看成是实数

对每一个$r\in\boldsymbol{Q}$,序列$(r, r, r, \cdots)$显然是一个柯西序列. 设$\varphi(r)$是它的类,这是一个实数. 于是φ是一个$\boldsymbol{Q}$到$\boldsymbol{R}$内的映射. 立即可知,φ是环$\boldsymbol{Q}$到$\boldsymbol{R}$内的同态. 若$s\in\boldsymbol{Q}$,且$s\neq r$,那么序列$(r, r, r, \cdots)$与$(s, s, s, \cdots)$就不等价. 故$\varphi(r)\neq\varphi(s)$. 因而φ是$\boldsymbol{Q}$到$\boldsymbol{R}$的一个子体上的同构. 这个映射将0变为0, 1变为1. 把每一个有理数r与它在$\boldsymbol{R}$内的象$\varphi(r)$等同,所以体$\boldsymbol{Q}$便成为$\boldsymbol{R}$的一个子体.

13.6. 实数的比较

13.6.1. 记$\boldsymbol{R}_+$为这样的实数所成的集:它的元素以(r_n)作为一个代表元,其中对一切n, $r_n\geqslant 0$. 显然$0\in\boldsymbol{R}_+$.

13.6.2. 从这一定义出发,立即推出

$$\boldsymbol{R}_+ + \boldsymbol{R}_+ \subset \boldsymbol{R}_+, \quad \boldsymbol{R}_+\boldsymbol{R}_+ \subset \boldsymbol{R}_+.$$

13.6.3. 让我们证明：$\boldsymbol{R}_+ \cap (-\boldsymbol{R}_+) = \{0\}$. 这就是说，若 $x \in \boldsymbol{R}_+$ 且 $-x \in \boldsymbol{R}_+$, 必有 $x=0$.

存在 x 的一个代表元 (r_n), 使对一切 n, $r_n \geqslant 0$. 也存在 $-x$ 的一个代表元 (s_n), 使对一切 n, $s_n \geqslant 0$. 因为 $(r_n) \sim (-s_n)$, 所以对任何有理数 $\varepsilon > 0$, 总存在整数 N, 使

$$n \geqslant N \Rightarrow |r_n - (-s_n)| \leqslant \varepsilon.$$

特别，
$$n \geqslant N \Rightarrow r_n \leqslant \varepsilon.$$

因而 $(r_n) \sim (0, 0, 0, \cdots)$. 于是 $x=0$.

13.6.4. 现在证明：$\boldsymbol{R}_+ \cup (-\boldsymbol{R}_+) = \boldsymbol{R}$. 这就是说，若 $x \in \boldsymbol{R}$, 则或者 $x \in \boldsymbol{R}_+$, 或者 $-x \in \boldsymbol{R}_+$.

如果 $x=0$, 结论极为显然. 如果 $x \neq 0$, 结论可以由 13.4.6 推出.

13.6.5. 若 x 是非负有理数，则 x 与 $(x, x, x, \cdots)$ 所属的类相同，因而 $x \in \boldsymbol{R}_+$. 反过来，若 x 是有理数，并且 $x \in \boldsymbol{R}_+$, 则 x 必为非负有理数. 这是因为，如果 $x<0$, 则必有 $-x>0$, 根据前面讲的，$-x \in \boldsymbol{R}_+$; 这样一来，既有 $x \in \boldsymbol{R}_+$, 又有 $x \in -\boldsymbol{R}_+$, 所以只能 $x=0$ (13.6.3). 这就产生了矛盾.

13.6.6. 设 x, y 是实数. 若 $y-x \in \boldsymbol{R}_+$, 我们就把它表示成 $x \leqslant y$, 或 $y \geqslant x$. 若 $x, y \in \boldsymbol{Q}$, 由 13.6.5, 可以知道这个关系就是有理数之间的不等关系 $x \leqslant y$. 关系 $x \geqslant 0$ 与 $x \in \boldsymbol{R}_+$ 同义.

13.6.7. $\boldsymbol{R}$ 内的关系 $x \leqslant y$ 显然是自反的. 它也是传递的. 因为，若 $x \leqslant y$ 且 $y \leqslant z$, 则 $y-x \in \boldsymbol{R}_+$ 且 $z-y \in \boldsymbol{R}_+$. 所以根据 13.6.2, 有

$$z-x = (z-y)+(y-x) \in \boldsymbol{R}_+ + \boldsymbol{R}_+ \subset \boldsymbol{R}_+.$$

因此 $x \leqslant z$. 若 $x \leqslant y$ 且 $y \leqslant x$, 则 $y-x \in \boldsymbol{R}_+ \cap (-\boldsymbol{R}_+)$. 故由 13.6.3, 知 $y-x=0$ 及 $y=x$. 因此，$\boldsymbol{R}$ 内的关系 $x \leqslant y$ 是一个序关系.

13.6.8. **定理** $\boldsymbol{R}$ 是全序集.

证明 若 x 和 y 是实数，必有 $y-x\in\boldsymbol{R}_+$ 或 $x-y\in\boldsymbol{R}_+$ (13.6.4). 故必有 $x\leqslant y$ 或 $y\leqslant x$.

13.6.9. 若 $x\leqslant y$ 且 $x'\leqslant y'$，则 $x+x'\leqslant y+y'$. 事实上，$y-x\in\boldsymbol{R}_+$，$y'-x'\in\boldsymbol{R}_+$. 故根据 13.6.2,

$$(y+y')-(x+x')=(y-x)+(y'-x')\in\boldsymbol{R}_++\boldsymbol{R}_+\subset\boldsymbol{R}_+.$$

13.6.10. 根据 13.6.2，有

$$x\geqslant 0 \quad 且 \quad y\geqslant 0\Rightarrow xy\geqslant 0.$$

13.6.11. 以上我们已经证明了有关不等式的所有常用的运算法则. 我们还要特别定义实数 x 的绝对值概念：若 $x\geqslant 0$，令 $|x|=x$；若 $x\leqslant 0$，令 $|x|=-x$. 这些都是比较浅易的问题，我们留给读者自已去进一步发挥. 此外，我们要指出一点，从 $\boldsymbol{R}$ 出发用严谨的方法去构造复数体 $\boldsymbol{C}$，这项工作我们在(5.15)中是已经知道了的.