休姆斯題解叢書

1986

拉普拉斯(變換)原理及題解

張 智 星 譯

含 877 個問題及解答

曉 園 出 版 社
世界圖书出版公司

拉普拉斯(變換)原理及題解

張智星譯

曉園出版社
世界图书出版公司
北京·广州·上海·西安
1993

拉普拉斯（变换）原理及题解

M. R. 施皮格尔　著

张智星　译

*

晓园出版社出版

世界图书出版公司北京公司 重印

北京朝阳门内大街 137 号

北京中西印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

1993 年 11 月第一版　开本：787×1245 1/20

1993 年 11 月第一次印刷　印张：16.5

印数：0001－900　字数：25.7万字

ISBN：7－5062－1638－8/O・83

定价：12.70元（W_B9304/8）

譯　序

本書以循序漸進的方式，介紹拉卜拉士變換（Laplace transform）的原理及應用，因此具有下列特色：

1. 扼要中肯的定理敍述及證明：不拘泥於嚴密的數學證明，而著重於各種定理的應用及推廣。
2. 以問題為導向的編排方式：先提示定理，再以附解題來證明定理，並應用於各類問題，最後以補充題（均附提示或答案）供讀者自行演練複習。
3. 題材廣泛：除了拉卜拉士變換外，還包含其他各種相關題材（請參見目錄）。而在問題方面，則包含定積分、電路、傳輸線、熱傳導、結構、波動……等各類應用問題。

由上述特點可看出，本書的實用性甚高，尤其是對於攻讀工科的同學而言，無論做為教科書閱讀或工具書查閱，都是一本不可多得的好書。又因本書以深入淺出、按部就班的方式闡述各種觀念及應用，亦非常適用於自修加強者。

由於譯者個人學識能力有限，疏漏之處在所難免，盼各方高明不吝指教。讀者若發現本書有不妥之處，請直接與曉園書局連絡，讓譯者能有所改進，以臻完善。

本書蒙曉園出版社黃旭政先生惠予出版，深致謝忱。並要感謝編審人員協助，始能順利發行。最後祈盼讀者諸君，均能從本書中獲得莫大助益！

張　智　星　謹識

原　序

拉卜拉士變換理論，亦稱爲算子微積分（Operational Calculus），近幾年來重要性與日俱增，且爲工程師、物理學家、數學家及其他各類科學家所必須具有之數學基礎中的不可缺部分，這不但是因爲拉卜拉士變換在理論上的趣味性，更因爲有許多科學及工程上的問題，均可用拉卜拉士變換解之。

拉卜拉士變換之誕生，乃源於19世紀後半部，Heaviside企圖以嚴密的步驟來驗證一套運算律（Operational rules），並藉此解出在電磁理論方面所遇到的方程式。這些努力，在20世紀初，經由Bromwich，Carson，van der Pol及其他數學家以複變理論驗證後，證明都是成功的。

本書可做爲所有現行標準教科書之課外補充，亦可做爲拉卜拉士變換之理論及應用的教科書。在數學、物理、電機工程、熱傳導或其他拉卜拉士變換可資應用之範圍，本書均具有極高之參考及學習價值。

每一章的開始，均包含有關之定義，原理及定理的詳細陳述，並附圖解說，其後接著由淺入深的附解題及補充題。附解題乃爲了展示理論如何應用，並擴展理論之應用範圍，更重要的是使讀者在模糊質疑之處，均能抓住要點，全力吸收，再經由基本定理之反覆演練，來達到有效學習之目標。定理之證明及公式之導出，也包含在附解題中。數目衆多的補充題（附有答案），乃供做每章複習之用。

本書之主題包含拉卜拉士變換、反拉卜拉士變換，及其在常微分方程式、偏微分方程式、積分方程式、差分方程式及邊界值問題的應用。複變理論是在本書的後部才提到，這是因爲：第一，如此學生才能充分了解各種理論，並意識到複數反變換公式的便利；第二，對於只想得到介紹性知識的學生，這是最好的安排。複變理論及傅立葉級數及積分，在討論複數反變換公式時，是很重要的課題，這些均包含在本書中，對不熟悉這方面的學生非常有幫助。

和一般適用於初學者的教科書比較，本書包含了相當多的教材，這使得本書的教學更具有彈性，並能隨時參考查閱，激發更深一步的興趣。

對於Schaum出版公司的鼎力相助，在此提出誠摯謝意。

Rensselaer技術學院　　　　M. R. SPIEGEL

目　　錄

第一章　拉卜拉士變換　1

第二章　反拉卜拉士變換　53

第三章　在微分方程式方面的應用　95

第四章　積分及差分方程式方面的應用　137

第五章 複變理論 167

第六章 傅立葉級數及積分 215

第七章 複數反變換公式 249

第八章 在邊界值問題方面的應用 271

附錄A 拉卜拉士變換的一般性質表 301

第 一 章

拉卜拉士變換

1·1 拉卜拉士變換之定義

令$F(t)$為一對$t>0$所定義的函數，則$F(t)$的拉卜拉士變換(Laplace transform，以下簡稱“拉氏變換”)可寫成$\mathcal{L}\{F(t)\}$，其定義如下

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\,dt \tag{1}$$

在上式中，我們暫時限定參數s為實數。往後的討論中，我們會發現如果把s值延伸至複數，相當有用。

若(1)式對某些特定的s值會收斂(converges)，則我們稱$F(t)$的拉氏轉換存在(Exist)，否則，即稱不存在，拉氏變換存在的充分條件，請參見第2頁。

1·2 記號表示法

如果我們以大寫字母來表示t的函數，如$F(t)$，$G(t)$，$Y(t)$等，則其對應的拉氏變換式，我們以相對的小寫字母表示，即$f(s)$，$g(s)$，$y(s)$等。此外，“～”(Tilde)亦可用來表示拉氏變換，如$u(t)$的拉氏變換即可寫為$\tilde{u}(s)$。

1·3 一些基本函數的拉氏變換

下表為部份基本函數的拉氏變換，均可由(1)式計算求得，請參考第1及第2題。在附錄B中，有更詳細的拉氏變換表。

	$F(t)$	$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$
1.	1	$\frac{1}{s}$ $s > 0$
2.	t	$\frac{1}{s^2}$ $s > 0$
3.	t^n $n = 0, 1, 2, \ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ $s > 0$ 註：n階乘$=n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ 且由定義，$0! = 1$
4.	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$ $s > a$
5.	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$ $s > 0$
6.	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$ $s > 0$
7.	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$ $s > \lvert a \rvert$
8.	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$ $s > \lvert a \rvert$

1·4 分段連續性

函數$F(t)$在$\alpha \leq t \leq \beta$有定義，且區間$\alpha \leq t \leq \beta$可分割爲有限個子區間，若$F(t)$在這些子區間中均爲連續，且其左右端點的極限值均是有限值，則我們稱函數$F(t)$在區間$\alpha \leq t \leq \beta$爲分段連續(Sectionally continuous or piecewise continuous)。

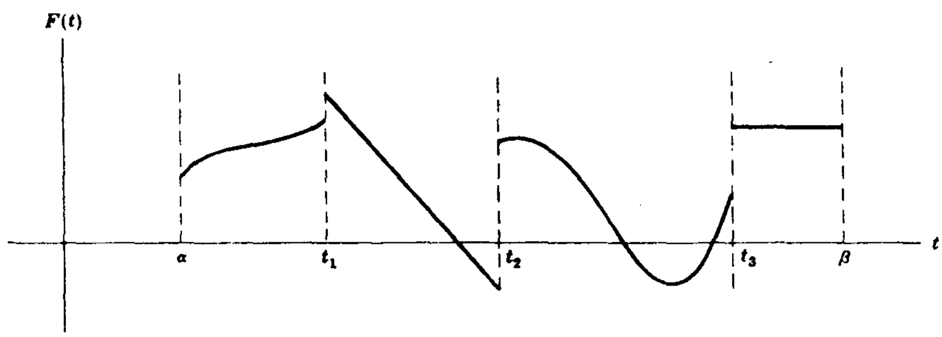

圖 1-1

上面的圖1-1，即爲分段連續函數的一個例子。此函數在t_1，t_2，t_3均不連續，以t_2而言，其左右端點的極限值分別是$\lim\limits_{\epsilon\to 0} F(t_2-\epsilon)=F(t_2-0)=F(t_2-)$及$\lim\limits_{\epsilon\to 0} F(t_2+\epsilon)=F(t_2+0)=F(t_2+)$，其中$\epsilon$爲正數。

1-5　指數級函數

若存在一實常數$M>0$及一數γ，使得對於所有$t>N$時，有

$$|e^{-\gamma t}F(t)|<M \quad 或 \quad |F(t)|<Me^{\gamma t}$$

則我們稱"**在$t\to\infty$時，$F(t)$爲γ指數級函數**(Function of exponential order γ as $t\to\infty$)"，或簡單地說，$F(t)$是**指數級**(Exponential order)。

例題1.1

$F(t)=t^2$爲3指數級(舉例而言)，因爲對所有$t>0$，$|t^2|=t^2<e^{3t}$。

例題1.2

$F(t)=e^{t^3}$不是指數級函數，因爲我們可經由t之增大，而使得$|e^{-\gamma t}e^{t^3}|=e^{t^3-\gamma t}$大於任一給定之正數。

直覺上來看，當t增大時，指數級函數絕對值的增大速度不會比$Me^{\gamma t}$來得快，但這在實際狀況並不會造成任何限制，因M和γ的大小可任意選定。

有界函數，如$\sin at$或$\cos at$，均爲指數級函數。

1-6　拉氏變換存在的充分條件

定理1-1： 若$F(t)$在每個有限區$0\le t\le N$均是分段連續，且在$t>N$時，$F(t)$爲γ指數級，則對於所有$s>\gamma$，其拉氏變換$f(s)$存在。

此定理之證明請參見47題。但必須強調的是，以上只是拉氏變換存在的**充分**條件，若不符合上述條件，則拉氏變換可能存在，也可能不存在(請參見32題)。故上述條件並非拉氏變換存在的**必要**條件。

其他充分條件，請參見145題。

1-7　拉氏變換的一些重要性質

在以下的定理中，假設所有函數均滿足定理1-1的條件(除非另有說明)，故所有函數的拉氏變換均存在。

1. 線性性質

定理 1-2： 若 c_1，c_2 爲任意常數，且 $F_1(s)$，$F_2(s)$ 分別是 $F_1(t)$，$F_2(t)$ 拉氏變換，則

$$\mathcal{L}\{c_1F_1(t)+c_2F_2(t)\} = c_1\mathcal{L}\{F_1(t)\}+c_2\mathcal{L}\{F_2(t)\} = c_1f_1(s)+c_2f_2(s) \quad (2)$$

此結論可輕易地推廣至兩個函數以上。

例題 1.3

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{4t^2-3\cos 2t+5e^{-t}\} &= 4\mathcal{L}\{t^2\}-3\mathcal{L}\{\cos 2t\}+5\mathcal{L}\{e^{-t}\}\\ &= 4\left(\frac{2!}{s^3}\right)-3\left(\frac{s}{s^2+4}\right)+5\left(\frac{1}{s+1}\right)\\ &= \frac{8}{s^3}-\frac{3s}{s^2+4}+\frac{5}{s+1}\end{aligned}$$

將 $F(t)$ 變換成 $f(s)$ 的符號 $\mathcal{L}$，又稱爲“拉氏變換運算子”（Laplace transformation operator）。由於 $\mathcal{L}$ 滿足上述定理，所以我們又稱之爲**線性運算子**（Linear operator），或是說它具有**線性性質**（Linearity property）。

2. 第一平移性質

定理 1-3： 若 $\mathcal{L}\{F(t)\}=f(s)$，則

$$\mathcal{L}\{e^{at}F(t)\} = f(s-a) \quad (3)$$

例題 1.4

因 $\mathcal{L}\{\cos 2t\}=\dfrac{s}{s^2+4}$，故

$$\mathcal{L}\{e^{-t}\cos 2t\} = \frac{s+1}{(s+1)^2+4} = \frac{s+1}{s^2+2s+5}$$

3. 第二平移性質

定理 1-4： 若 $\mathcal{L}\{F(t)\}=f(s)$，且 $G(t)=\begin{cases}F(t-a) & t>a\\ 0 & t<a\end{cases}$，則

$$\mathcal{L}\{G(t)\} = e^{-as}f(s) \quad (4)$$

例題 1.5：

因 $\mathcal{L}\{t^3\} = \frac{3!}{s^4} = \frac{6}{s^4}$ ，故函數

$$G(t) = \begin{cases} (t-2)^3 & t > 2 \\ 0 & t < 2 \end{cases}$$

的拉氏變換 $6e^{-2s}/s^4$ 。

4. 標度改變性質

定理 1.5： 若 $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ ，則

$$\mathcal{L}\{F(at)\} = \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right) \tag{5}$$

例題 1.6：

因 $\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$ ，故

$$\mathcal{L}\{\sin 3t\} = \frac{1}{3}\frac{1}{(s/3)^2+1} = \frac{3}{s^2+9}$$

5. 導式之拉氏轉換

定理 1.6： 若 $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ 則

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = s f(s) - F(0) \tag{6}$$

但上述定理之成立需滿足下列條件：第一 $F(t)$ 在 $0 \le t \le N$ 之間爲連續，且在 $t > N$ 時，$F(t)$ 爲指數級。第二，$F'(t)$ 在 $0 \le t \le N$ 之間爲分段連續。

例題 1.7：

若 $F(t) = \cos 3t$ ，則 $\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{s}{s^2+9}$ 故

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = \mathcal{L}\{-3\sin 3t\} = s\left(\frac{s}{s^2+9}\right) - 1 = \frac{-9}{s^2+9}$$

此方法在求拉氏轉換式時可免去積分麻煩。（參見 15 題）

定理 1.7： 在定理 1.6 中，若 $F(t)$ 在 $t = 0$ 時不連續，但 $\lim_{t\to 0} F(t) = F(0+)$ 猶存

在（此值不一定等於$F(0)$，因$F(0)$可能不存在），則

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = s f(s) - F(0+) \tag{7}$$

定理 1.8： 在定理1.6中，若$F(t)$在$t=a$時不連續，則

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = s f(s) - F(0) - e^{-as}\{F(a+) - F(a-)\} \tag{8}$$

其中$F(a+)-F(a-)$的值，我們稱爲在不連續點$t=a$的躍斷（Jump）。若有更多不連續點，可依此法一一修正。

定理 1.9： 若 $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$，則

$$\mathcal{L}\{F''(t)\} = s^2 f(s) - sF(0) - F'(0) \tag{9}$$

此定理之成立亦需滿足：第一，$F(t)$和$F'(t)$在$0 \le t \le N$時均連續，且在$t > N$時均爲指數級，第二，$F''(t)$在$0 \le t \le N$時爲分段連續。

若$F(t)$和$F'(t)$有不連續點，可依定理1.7及1.8來修正(9)式。

定理 1.10： 若 $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$，則

$$\mathcal{L}\{F^{(n)}(t)\} = s^n f(s) - s^{n-1}F(0) - s^{n-2}F'(0) - \cdots - sF^{(n-2)}(0) - F^{(n-1)}(0) \tag{10}$$

此定理之成立亦需滿足：第一，$F(t)$，$F'(t)\cdots F^{(n-2)}(t)$在$0 \le t \le N$時均連續，且$t > N$時均爲指數級，第二，$F^{(n)}(t)$在$0 \le t \le N$時爲分段連續。

6. 積分式之拉氏變換

定理 1.11： 若 $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$，則

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t F(u)\,du\right\} = \frac{f(s)}{s} \tag{11}$$

例題 1.8：

因 $\mathcal{L}\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2+4}$，我們可直接得到

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \sin 2u\,du\right\} = \frac{2}{s(s^2+4)}$$

7. 乘以 t^n

定理 1.12：若 $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$，則

$$\mathcal{L}\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s) = (-1)^n f^{(n)}(s) \tag{12}$$

例題 1.9：

因爲 $\mathcal{L}\{e^{2t}\} = \frac{1}{s-2}$，故

$$\mathcal{L}\{te^{2t}\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-2}\right) = \frac{1}{(s-2)^2}$$

$$\mathcal{L}\{t^2e^{2t}\} = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s-2}\right) = \frac{2}{(s-2)^3}$$

8. 除以 t

定理 1.13：若 $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$，則

$$\mathcal{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(u)\, du \tag{13}$$

在此須先確定 $\lim_{t\to 0} F(t)/t$ 存在。

例題 1.10：

因爲 $\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$ 且 $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$，所以

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{du}{u^2+1} = \tan^{-1}(1/s)$$

9. 週期函數

定理 1.14：若 $F(t)$ 有週期 $T > 0$ 使得 $F(t+T) = F(t)$（見圖 1-2）。

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st} F(t)\, dt}{1 - e^{-sT}} \tag{14}$$

則

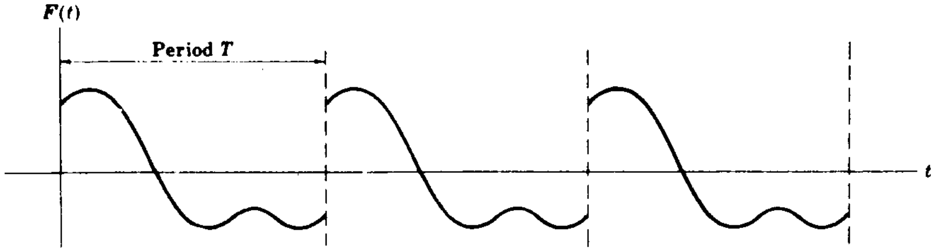

圖 1-2

10. $s\to\infty$時，$f(s)$之極限值

定理 1.15：若 $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ ，則

$$\lim_{s\to\infty} f(s) = 0 \tag{15}$$

11. 初值定理

定理 1.16：假設以下之極限值均存在，則

$$\lim_{t\to 0} F(t) = \lim_{s\to\infty} s\,f(s) \tag{16}$$

12. 終值定理

定理 1.17：若以下之極限值均存在，則

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = \lim_{s\to 0} s\,f(s) \tag{17}$$

13. 初值定理之推廣

若 $\lim_{t\to 0} F(t)/G(t) = 1$ ，則在 t 值很小時，$F(t)$和$G(t)$的值很相近，我們寫成"當 $t\to 0$ 時，$F(t)\sim G(t)$"。

同理，若 $\lim_{s\to\infty} f(s)/g(s) = 1$ ，則在 s 很大時，$f(s)$和$g(s)$的值很相近，我們寫成"當 $s\to\infty$ 時，$f(s)\sim g(s)$"。

在此可將定理 1.16 推廣如下

定理 1.18：若當 $t\to 0$ 時，$F(t)\sim G(t)$，則當 $s\to\infty$時，$f(s)\sim g(s)$，其中

$f(s)=\mathcal{L}\{F(t)\}$，$g(s)=\mathcal{L}\{G(t)\}$。

14. 終值定理之推廣

若 $\lim_{t\to\infty} F(t)/G(t)=1$，我們寫成“當 $t\to\infty$ 時，$F(t)\sim G(t)$”。同理若 $\lim_{s\to 0} f(s)/g(s)=1$，寫成“當 $s\to 0$ 時，$f(s)\sim g(s)$”，由此可得定理1.17 的推廣。

1·8 計算拉氏變換的方法

以下之方法均可用於計算拉氏變換

1. **直接計算**：直接由定義(1)計算出。

2. **級數法**：若 $F(t)$ 可化爲冪級數展開如下

$$F(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \tag{18}$$

則其拉氏變換可由等式右方級數逐項變換，然後相加而得之，故

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s^2} + \frac{2!a_2}{s^3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!a_n}{s^{n+1}} \tag{19}$$

但此法須保證在 $s>\gamma$（19）式必能收斂時方爲有效。參見34，36，39及48題。

3. **微分方程式法**：找到滿足 $F(t)$ 的微分方程式，再使用前述定理即可求得。參見34及48題。

4. **對某參數微分**：參見第20題。

5. **其他方法**：須用到各定理中較特殊的方法。例如定理1.13。

6. **查表法**：（見附錄）。

1·9 積分的計算

若 $f(s)=\mathcal{L}\{F(t)\}$，則

$$\int_0^{\infty} e^{-st}F(t)\,dt = f(s) \tag{20}$$

令 $s\to 0$，可得