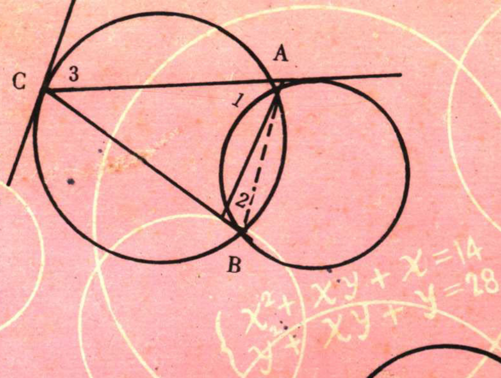
数理化基础知识

M



三角

山东科学技术出版社

数理化基础知识

三　　角

烟台师专编写组

山东科学技术出版社
一九八〇年·济南

内 容 提 要

本书是《数理化基础知识》中的一本，它系统地介绍了锐角三角函数；任意角的三角函数；三角函数的图象和性质；两角和、两角差、倍角、半角的三角函数；反三角函数及三角方程；斜三角形的解法等方面的基础知识。书中内容简明扼要，通俗易懂，对重点、难点都作了较详细的说明，并附有较多的例题和练习题，以提高广大读者分析问题和解决问题的能力。

本书可供中等业余学校作教材用，也可作为知识青年和干部的自学用书，还可以作为在校学生和考大学的青年参考用书。

数理化基础知识

三　　角

烟台师专编写组

•

山东科学技术出版社出版

山东省新华书店发行

山东人民印刷厂印刷

•

787×1092毫米32开本　8.75印张　180千字

1980年5月第1版　1980年5月第1次印刷

印数：1—110,000

书号 13195·26　　定价 0.70元

编者的话

数学、物理、化学是重要的基础学科。它已经渗透到人们的全部实践活动。纵览宇宙，运算天体，探索粒子之微，揭示生命之谜，从高深抽象的科学理论，到人们丰富繁杂的日常生活无处不用数理化。今天，在向四化进军中，越来越显示出学好数学、物理、化学的重要作用。

从提高整个中华民族的科学文化水平出发，为配合业余教育的全面开展，满足广大读者自学的急切需要，特别是为了帮助考大学的青年和在校学生加深对课本知识的理解，提高分析问题和解决问题的能力，我们编写了这套《数理化基础知识》。其中，《代数》3册，《几何》、《三角》、《解析几何》、《微积分》各一册；《物理》4册；《化学》2册。

在编写过程中，我们根据成人和速成的特点，参照教育部现行中学教学大纲的内容，由浅入深，循序渐进，着重讲清数学、物理、化学的基本概念和基本知识，对每一章中的关键性问题都做了重点介绍，并重视了运算技巧的训练和分析总结解题规律。每册书都选有一定数量的综合性习题，在选习题时还注意了习题的典型性，以培养读者举一反三的能力。每章后有小结，难度大的习题有提示，书末还附有答案备查。

这套基础知识丛书，可供中等业余学校作教材用，也可作为知识青年和干部的自学用书，还可供考大学的青年和在校学生学习参考。

绪　言

三角学和其他的学科一样，也是产生于实践，发展于实践。在人类的生产实践中，由于农业上需要编著历书，航海上需要根据天体位置确定船只的航向，就必须应用和发展天文学，而三角学发展的最初阶段与天文学有密切关系。这样，农业方面和航海方面的需要不断促进了天文学以及三角学的发展。

我国古代的天文学很发达，很早就有了测量方面的知识，在公元前一世纪左右的数学书“周髀算经”里已有关于平面测量术的记载。公元三世纪，我国数学家刘徽计算的以1为半径的圆内接正六边形、正十二边形等的边长，实际上已经求得了某些特殊角的正弦值。我国古代历法中计算由于节令不同而引起的表（就是竿）的影长不同，实际上已经构成了一个余切函数表。在现代化建设中，还有许多测量和计算工作，经常需要解三角形。另外，天文学、物理学及各种应用技术科学也已广泛地应用了三角函数。因此，三角学既是解决测量等实际问题的工具，也是学习物理、工程学、高等数学等学科的基础之一。

目　　录

第一章　锐角三角函数

在平面几何中，我们已经研究过一些关于直角三角形中边与边、角与角之间的相互关系，应用这些知识，可以解决一些工农业生产中的实际问题，但是在生产实践中，如解决测量、力学、工程技术等方面的问题时，往往还需要研究直角三角形中边与角之间的量的关系。而锐角三角函数正是研究这种关系的一个很重要的工具。

§1·1　锐角三角函数的定义

1．问题的提出

我们经常会遇到一些涉及直角三角形边角关系的实际问题。例如要测某电视塔的高BC（图1·1）。我们可以选一测点A，测得AC的距离和$\angle BAC$。于是求BC的问题就转化为已知直角三角形的一个锐角和一条直角边求另一条直角边这样的问题了。要想解决这类问题就有必要讨论直角三角形的边角之间量的关系。

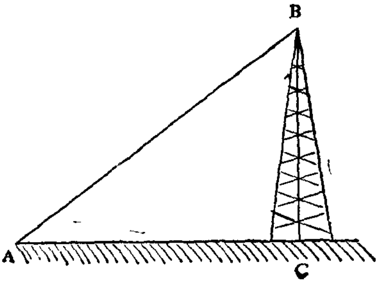


图　1·1

在平面几何中讲过，如果直角三角形的一个锐角等于

30°，那么这个锐角所对的直角边等于斜边的一半。换句话说，30°的角所对的直角边和斜边的比等于$\frac{1}{2}$。容易看到，这个性质同三角形的大小是没有关系的。

利用相似三角形的知识还可以证明：如果一个锐角的大小确定了，无论把夹锐角的两边怎样延长或缩短，得到的直角三角形任意两边的比都是一个定值。

注：上述结论可以证明如下：
取一个锐角α（图1·2）。在锐角α的任一边上，任意取异于A的两点B和B'，过B和B'点各引另一边的垂线BC和$B'C'$构成含有锐角α的直角三角形ABC和$AB'C'$，且分别以a、b、c和a'、b'、c'表示它们的三个边的长度。

因为 $\triangle ABC \backsim \triangle AB'C'$，

从而得出 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$，

所以$\frac{a}{c}=\frac{a'}{c'}$，$\frac{b}{c}=\frac{b'}{c'}$，$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$，

$\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}$，$\frac{c}{b}=\frac{c'}{b'}$，$\frac{c}{a}=\frac{c'}{a'}$。

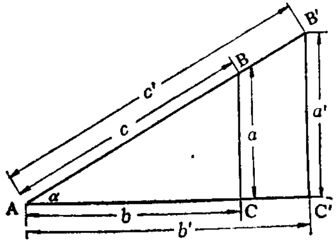


图 1·2

基于上述分析，下面我们就来定义锐角三角函数。

2. 锐角三角函数的定义

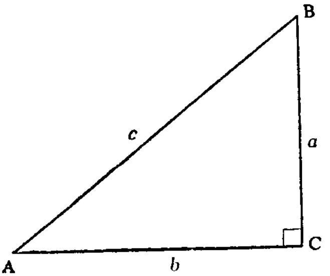


图 1·3

在图1·3所示的直角三角形中，当锐角A的角度确定后，那么这个直角三角形的边的比$\frac{a}{c}$、$\frac{b}{c}$、$\frac{a}{b}$、$\frac{b}{a}$、$\frac{c}{b}$、$\frac{c}{a}$就各有一个确定的值和它对应。

一般说，当某一个量确定

的时候，与它有关的另一个量如果有确定的值，那么我们就把第二个量叫做第一个量的函数。因此，我们可以说，在直角三角形ABC中$\frac{a}{c}$、$\frac{b}{c}$、$\frac{a}{b}$、$\frac{b}{a}$、$\frac{c}{b}$、$\frac{c}{a}$都是$\angle A$的函数。

为了说明这些比是$\angle A$的函数，我们可以应用以下几个记号来表示。

锐角A所对的直角边a和斜边c的比叫做锐角A的正弦；用记号$\sin A$来表示，就是

$$\sin A=\frac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}}=\frac{a}{c}.$$

与锐角A相邻的直角边b和斜边c的比叫做锐角A的余弦；用记号$\cos A$来表示，就是

$$\cos A=\frac{\angle A\text{的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{b}{c}.$$

锐角A所对的直角边a和相邻的直角边b的比叫做锐角A的正切；用记号$\mathrm{tg}A$来表示，就是

$$\mathrm{tg}A=\frac{\angle A\text{的对边}}{\angle A\text{的邻边}}=\frac{a}{b}.$$

与锐角A相邻的直角边b与所对的直角边a的比叫做锐角A的余切；用记号$\mathrm{ctg}A$来表示，就是

$$\mathrm{ctg}A=\frac{\angle A\text{的邻边}}{\angle A\text{的对边}}=\frac{b}{a}.$$

斜边c和锐角A相邻的直角边b的比，叫做锐角A的正割；用记号$\sec A$来表示，就是

$$\sec A=\frac{\text{斜边}}{\angle A\text{的邻边}}=\frac{c}{b}.$$

斜边c和锐角A所对的直角边a的比，叫做锐角A的余割；用记号$\operatorname{cosec}A$来表示，就是

$$\operatorname{cosec}A=\frac{\text{斜边}}{\angle A\text{的对边}}=\frac{c}{a}.$$

注：以后看到"**sinA**"这个记号，就应当想到它是一个完整的记号，它表示角**A**的正弦，不能把它理解为"sin"和"A"相乘。其他三角函数的符号也一样。

【例1】 $\triangle ABC$中，$\angle C$是直角，量得各边的值是$AC=3$厘米，$BC=4$厘米，$AB=5$厘米，求$\angle B$的正弦、余弦、正切、余切、正割、余割（图1·4）。

解 根据锐角三角函数的定义，

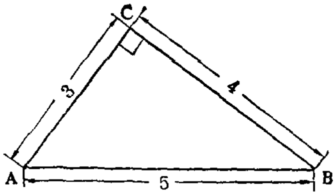


图 1·4

$$\sin B=\frac{\angle B\text{的对边}}{\text{斜边}}=\frac{AC}{AB}=\frac{3}{5};$$

$$\cos B=\frac{\angle B\text{的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{BC}{AB}=\frac{4}{5};$$

$$\operatorname{tg}B=\frac{\angle B\text{的对边}}{\angle B\text{的邻边}}=\frac{AC}{BC}=\frac{3}{4};$$

$$\operatorname{ctg}B=\frac{\angle B\text{的邻边}}{\angle B\text{的对边}}=\frac{BC}{AC}=\frac{4}{3};$$

$$\sec B=\frac{\text{斜边}}{\angle B\text{的邻边}}=\frac{AB}{BC}=\frac{5}{4};$$

$$\operatorname{cosec}B=\frac{\text{斜边}}{\angle B\text{的对边}}=\frac{AB}{AC}=\frac{5}{3}.$$

【例 2】 $\triangle ABC$中，$\angle C$是直角，已知$a=5$，$b=12$，求$\angle A$和$\angle B$的正弦、余弦和正切（图1·5）。

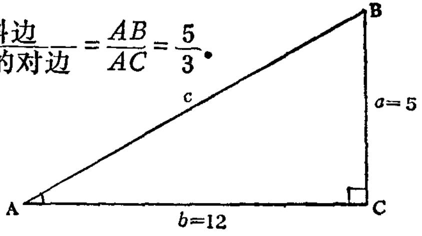


图 1·5

解 先应用勾股定理求斜边c，

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5^2+12^2}=\sqrt{169}=13;$$

然后根据锐角三角函数的定义，得

$$\sin A=\frac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}}=\frac{a}{c}=\frac{5}{13};$$

$$\cos A=\frac{\angle A\text{的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{b}{c}=\frac{12}{13};$$

$$\operatorname{tg}A=\frac{\angle A\text{的对边}}{\angle A\text{的邻边}}=\frac{a}{b}=\frac{5}{12};$$

$$\sin B=\frac{\angle B\text{的对边}}{\text{斜边}}=\frac{b}{c}=\frac{12}{13};$$

$$\cos B=\frac{\angle B\text{的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{a}{c}=\frac{5}{13};$$

$$\operatorname{tg}B=\frac{\angle B\text{的对边}}{\angle B\text{的邻边}}=\frac{b}{a}=\frac{12}{5}.$$

习 题 1

1. $\triangle ABC$中，$\angle C$是直角，已知$a=40$，$c=41$，求$\angle A$的正弦、余弦、正切、余切。

2. $\triangle ABC$中，$\angle C$是直角，已知$c=25$，$a=24$，求$\sin A$、$\cos A$、$\mathrm{tg}A$、$\sin B$、$\cos B$、$\mathrm{tg}B$。

3. $\triangle ABC$中，$\angle C$是直角，已知$a=12$，$b=5$，求$\angle B$的正弦、余弦、正切和余切。当$a=24$，$b=10$时，$\angle B$的这些三角函数有没有变化？

4. 在直角三角形ABC中，已知斜边AB等于直角边AC的四倍，求$\angle A$的正弦、余弦、正切和余切。

§1·2 锐角的三角函数值

当我们知道了锐角三角函数的定义以后，自然会提出下面的问题：已知一个锐角，怎样去找出它的三角函数值？下面我们利用几何图形的性质来求30°、45°、60°三个特殊角的三角函数值。

1. 30°、45°、60°角的三角函数值

(1) 30°角的三角函数值　作直角三角形ABC（图1·6），使$\angle A=30°$，$\angle C$是直角，那么，根据几何定理知道：有一锐角是30°的直角三角形，它的斜边等于30°角所对的直角边的两倍。因此，$c=2a$。由勾股定理求得：

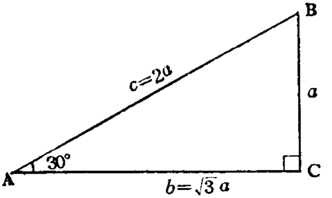


图 1·6

$$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{(2a)^2-a^2}=\sqrt{3a^2}=\sqrt{3}\,a.$$

由此得到：

$$\sin 30°=\frac{a}{c}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2};$$

$$\cos 30°=\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{3}\,a}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{tg}30° = \frac{a}{b} = \frac{a}{\sqrt{3}\,a} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\text{ctg}\,30° = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}\,a}{a} = \sqrt{3}.$$

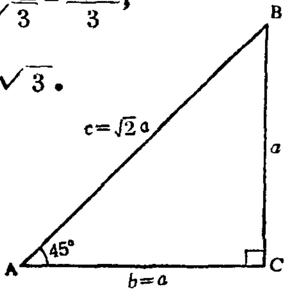


图 1·7

（2）45°角的三角函数值 作直角三角形ABC（图1·7），使$\angle A = 45°$，$\angle C$是直角。这样的直角三角形是等腰的，所以$a = b$。由勾股定理求得：

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}\,a.$$

由此得到：

$$\sin 45° = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{2}\,a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 45° = \frac{b}{c} = \frac{a}{\sqrt{2}\,a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\text{tg}45° = \frac{a}{b} = \frac{a}{a} = 1;$$

$$\text{ctg}45° = \frac{b}{a} = \frac{a}{a} = 1.$$

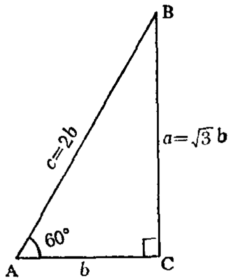


图 1·8

（3）60°角的三角函数值 作直角三角形ABC（图1·8），使$\angle A = 60°$，$\angle C$是直角。显然$\angle B = 30°$，根据几何定理知道：斜边c是$\angle B$所对的边b的两倍，即$c = 2b$。由勾股定理求得：

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{(2b)^2 - b^2} = \sqrt{3b^2} = \sqrt{3}\,b.$$

由此得到：

$$\sin 60° = \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{3}\,b}{2b} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 60° = \frac{b}{c} = \frac{b}{2b} = \frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 60° = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}\,b}{b} = \sqrt{3};$$

$$\operatorname{ctg} 60° = \frac{b}{a} = \frac{b}{\sqrt{3}\,b} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

30°、45°、60°角的三角函数值是经常用到的，必须牢固记住。为了便于记忆，可利用下面两个图形来记忆(图1·9)。在这些图形中，我们用最简单的数字表示直角三角形各边的长，如果对这两个图形有深刻的印象，那么我们就不难根据锐角三角函数的定义，正确地说出每个三角函数的值。

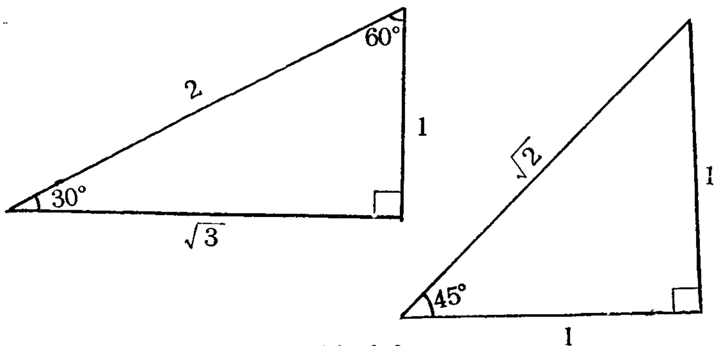


图 1·9

【例 1】 求$2\cos 30° - 4\sin 45° + \operatorname{tg} 60°$的值。

解 $2\cos 30° - 4\sin 45° + \operatorname{tg} 60°$

$$= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3}$$

$$=\sqrt{3}-2\sqrt{2}+\sqrt{3}$$
$$=2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$$
$$=2(\sqrt{3}-\sqrt{2}).$$

注：求三角函数值时，一般用根式表示计算结果即可。如题意要求取近似值，可按照需要决定取几位小数。

【例 2】 求$\sin^2 45^\circ+\mathrm{ctg}^2 60^\circ$的值。

首先说明，题中的$\sin^2 45^\circ$是$(\sin 45^\circ)^2$的简写，$\mathrm{ctg}^2 60^\circ$是$(\mathrm{ctg}60^\circ)^2$的简写。与此相同，$\cos^2 A$表示$(\cos A)^2$，$\mathrm{tg}^2 B$表示$(\mathrm{tg}B)^2$……

解 $\sin^2 45^\circ+\mathrm{ctg}^2 60^\circ$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}.$$

习 题 2

1．算出下列各式的结果：

（1）$\sin 60^\circ-\cos 60^\circ+\mathrm{tg}45^\circ$；

（2）$\sin 45^\circ\cos 45^\circ+\mathrm{tg}30^\circ\mathrm{ctg}60^\circ$；

（3）$\mathrm{tg}30^\circ+\sin^2 45^\circ-\cos 60^\circ$；

（4）$\cos^2 30^\circ+\sin^2 30^\circ$；

（5）$\dfrac{\cos 60^\circ}{1+\sin 60^\circ}+\dfrac{1}{\mathrm{tg}30^\circ}$；

（6）$\dfrac{\sin 60^\circ+\sin 30^\circ}{\sin 60^\circ-\sin 30^\circ}$。

2．设$\angle A=30^\circ$，验证：

（1）$\sin 2A=2\sin A\cos A$；

（2）$\cos 2A=1-2\sin^2 A$；

(3) $\mathrm{tg}2A=\dfrac{2\mathrm{tg}A}{1-\mathrm{tg}^2A}$;

(4) $1+\mathrm{tg}^2A=\sec^2A$。

3. 设 $\angle A=45°$， 求 $\dfrac{\cos A}{\mathrm{tg}A-\sin(75°-A)}$ 的值。

2. 三角函数表

除了30°、45°、60°角的三角函数以外，其他锐角的三角函数，要求出比较精确的值是不容易的。为了便于应用三角函数解决实际问题，人们编制了“三角函数表”（见《数学用表》），可以很方便地由锐角查出它的某个三角函数值或者由已知的三角函数值求出对应的角度来。

下面我们来说明三角函数表的构造和用法。

（1） 正弦、余弦函数表

正　弦　表

A	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	60′		1′	2′	3′
0°	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……	90°	…	…	…
⋮	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……	⋮	…	…	…
25°	0.4226	4242	4258	4274	4289	4305	1321	4337	4352	4368	4384	64°	3	5	8
26°	4384	4399	4415	4431	4446	4462	4478	4493	4509	4524	4540	63°	8	5	8
27°	4540	4555	4571	4586	4602	4617	4633	4648	4664	4679	4695	62°	3	5	8
28°	4695	4710	4726	4741	4756	4772	4787	4802	4818	4833	4848	61°	3	5	8
29°	4848	4863	4879	4894	4909	4924	4939	4955	4970	4985	0.5000	60°	3	5	8
⋮	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……	⋮	…	…	…
90°	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……	0°	…	…	…
	60′	54′	48′	42′	36′	30′	24′	18′	12′	6′	0′	A	1′	2′	3′

余　弦　表

上表是正弦、余弦函数表的一部分，表中左边标有字母 A 的竖行的度数和上面横行的分数是查正弦用的。从右边数第四竖行的度数和下面横行的分数是查余弦用的。一个角的