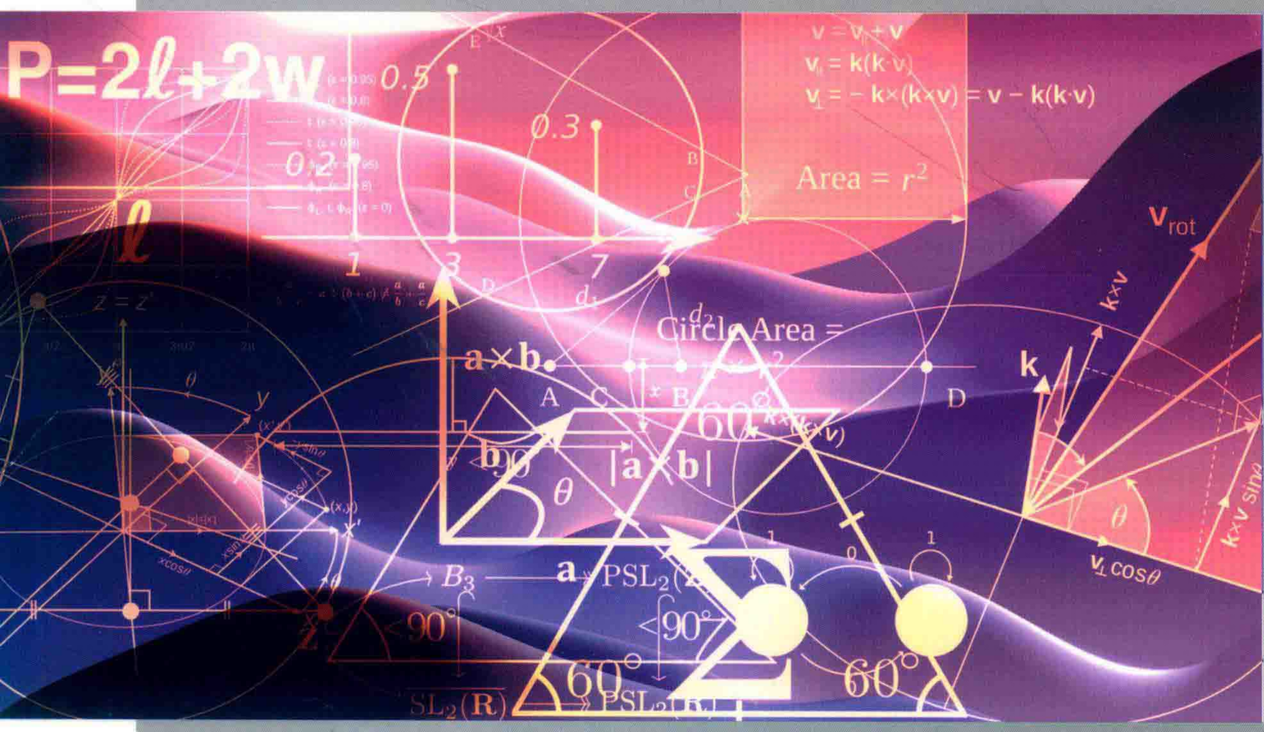
新经度

普通高等学校“十三五”数字化建设规划教材
国家级精品课程教材

GAILÜLUN YU SHULI TONGJI

概率论与数理统计

韩旭里　谢永钦 / 主编



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

普通高等学校"十三五"数字化建设规划教材
国家级精品课程教材

概率论与数理统计

主编　韩旭里　谢永钦

概率论发展史

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/韩旭里，谢永钦主编. —北京：北京大学出版社，2018. 7
ISBN 978-7-301-29547-2

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①韩… ②谢… Ⅲ. ①概率论—高等学校—教材 ② 数理统计—高等学校—教材
Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 098740 号

书　　名	概率论与数理统计 GAILÜLUN YU SHULI TONGJI
著作责任者	韩旭里　谢永钦　主编
责 任 编 辑	潘丽娜
标 准 书 号	ISBN 978-7-301-29547-2
出 版 发 行	北京大学出版社
地　　址	北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址	http://www.pup.cn
电 子 信 箱	zpup@pup.cn
新 浪 微 博	@北京大学出版社
电　　话	邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752021
印 刷 者	长沙超峰印刷有限公司
经 销 者	新华书店
	787 毫米×1092 毫米　16 开本　16.75 印张　412 千字
	2018 年 7 月第 1 版　2018 年 7 月第 1 次印刷
定　　价	45.00 元

内 容 简 介

本书介绍了概率论与数理统计的基本概念、基本理论与方法.内容包括:概率论的基本概念、随机变量、随机向量、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析.每章均配有习题,并收集了历届研究生考试试题,既便于教学,又利于考试复习,书后附有习题答案.本书可作为高等理工科院校(非数学专业)及师范院校概率论与数理统计课程的教材,也可供工程技术人员参考.

本书配套云资源使用说明

本书配有网络云资源,资源类型包括:知识结构、重难点内容、拓展知识、名家简介和习题参考答案.

一、资源说明

1. 知识结构:对每章知识点以框图形式做系统总结,让学生提前了解该章内容的层次结构,方便学生学完该章内容后做自我测评,加深学生对该章内容的理解.

2. 重难点内容:把每章的重难点标记出来,方便学生在学习过程中注意重要的知识点,并有针对性地去突破知识难点.

3. 拓展知识:针对一些知识点,提供一些更深更广的学习内容,有针对性地进一步阐述说明,拓宽学生视野,使其了解更多相关知识.

4. 名家简介:提供相关科学家的简介,从而提高学生对数学的认识,以及学习数学的兴趣.

5. 习题参考答案:对每章的课后习题给出标准答案,启发学生思维,测试学生对知识点的掌握程度.

二、使用方法

1. 打开微信的“扫一扫”功能,扫描关注公众号(公众号二维码见封底);

2. 点击公众号页面内的“激活课程”;

3. 刮开激活码涂层,扫描激活云资源(激活码见封底);

4. 激活成功后,扫描书中的二维码,即可直接访问对应的云资源.

注:1. 每本书的激活码都是唯一的,不能重复激活使用.

2. 非正版图书无法使用本书配套云资源.

总 序

数学是人一生中学得最多的一门功课.中小学里就已开设了很多数学课程,涉及算术、平面几何、三角、代数、立体几何、解析几何等众多科目,看起来洋洋大观、琳琅满目,但均属于初等数学的范畴,实际上只能用来解决一些相对简单的问题,面对现实世界中一些复杂的情况则往往无能为力.正因为如此,在大学学习阶段,专攻数学专业的学生不必说了,就是对于广大非数学专业的大学生,也都必须选学一些数学基础课程,花相当多的时间和精力学习高等数学,这就对非数学专业的大学数学基础教材提出了迫切的需求.

这些年来,各种大学数学基础教材已经林林总总地出版了许多,但平心而论,除少数精品以外,大多均偏于雷同,难以使人满意.而学习数学这门学科,关键又在理解与熟练,同一种类型的教材只需精读一本好的就足够了.这样,精选并推出一些优秀的大学数学基础教材,就理所当然地成为编辑出版这一丛书的宗旨.

大学数学基础课程的名目并不多,所涵盖的内容又大体上相似,但教材的编写不仅仅是材料的堆积和梳理,更体现编写者的教学思想和理念.同一门课程,应该鼓励有不同风格的教材来诠释和体现;针对不同程度的教学对象,也应该有不同层次的教材来使用和适应.特别是,大学非数学专业是一个相当广泛的概念,对分属工程类、财经管理类、医药类、农林类、社科类甚至文史类的众多大学生,不分青红皂白、一刀切地采用统一的数学教材进行教学,很难密切联系有关专业的实际,很难充分针对有关专业的迫切需要和特殊要求,是不值得提倡的.相反,通过教材编写者和相应专业工作者的密切结合和协作,针对该专业的特点编写出来的教材,才能特色鲜明、有血有肉,才能深受欢迎,并产生重要而深远的影响.这是专业类大学数学基础教材应有的定位和标准,也是大家的迫切期望,但却是当前明显的短板,因而使我们对这套丛书可以大有作为有了足够的信心和依据.

说得更远一些,我们一些教师往往把数学看成是定义、公式、定理及证明的堆积,千方百计地要把这些知识灌输到学生头脑中去,但却忘记了有关数学最根本的三件事.一是数学知识的来龙去脉——从哪儿来,又可以到哪儿去.割断数学与生动活泼的现实世界的血肉联系,学生就不会有学习数学持续的积极性.二是数学的精神实质和思想方法.只讲知识,不讲精神;只讲技巧,不讲思想,学生就不可能学到数学的精髓,不能对数学有真正的领悟.三是数学的人文内涵.数学在人类认识世界和改造世界的过程中起着关键的、不可代替的作用,是人类文明的坚实基础和重要支柱.不自觉地接受数学文化的熏陶,是不可能真正走近数学、了解数学、领悟数学并热爱数学的.在数学教学中抓住了上面这三点,就抓住了数学的灵魂,学生对数学的学习就一定会更有成效.但客观地说,现有的大学数学基础教材,能够真正体现这三方面要求的,恐怕为数不多.这一现实为大学数学基础教材的编写提供了广阔的

发展空间，很多探索有待进行，很多经验有待总结，可以说是任重而道远．从这个意义上说，由北京大学出版社推出的这套丛书实际上已经为一批有特色、高品质的大学数学基础教材的面世搭建了一个很好的平台，特别值得称道，也相信一定会得到各方面广泛而有力的支持．

特为之序．

李大潜

2015 年 1 月 28 日

李大潜先生简介

前 言

数学是一门重要而应用广泛的学科，被誉为锻炼思维的体操和人类智慧之冠上最明亮的宝石.不仅如此，数学还是各类科学和技术的基础，它的应用几乎涉及所有的学科领域，对于世界文化的发展有着深远的影响.高等学校作为培育人才的摇篮，其数学课程的开设也就具有特别重要的意义.

近年来，随着我国经济建设与科学技术的迅速发展，高等教育进入了一个飞速发展时期，已经突破了以前的精英式教育模式，发展成为一种在终身学习的大背景下极具创造和再创性的基础学科教育.高等学校教育教学观念不断更新，教学改革不断深入，办学规模不断扩大，数学课程开设的专业覆盖面也不断增大.为了适应这一发展需要，众多高校的数学教师多次研究讨论，联合编写了本套高等学校非数学专业的数学系列教材.

本教材是为普通高等学校非数学专业学生编写的，也可为各类需要提高数学素质和能力的人员使用.教材中概念、定理及理论叙述准确、精练，符号使用标准、规范，知识点突出，难点分散，证明和计算过程严谨，例题、习题等均经过精选，具有代表性和启发性.习题中画线以下的题是往届研究生入学考试题和较难的题，对非考研学生不作要求.

本教材的主要内容有：概率论的基本概念、随机变量、随机向量、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析等.本册由韩旭里、谢永钦主编，参加讨论和编写的人员有：陈新美、赵晓芹、秦桂香、杨益群、晏小兵、汤琼等.苏文华、赵子平构思并设计了全书在线课程教学资源的结构与配置，吴浪、邓之豪编辑了教学资源内容，并编写了相关动画文字材料，余燕、沈辉参与了动画制作及教学资源的信息化实现，袁晓辉、范军怀审查了全书配套在线课程的教学资源，苏文春、苏娟提供了版式和装帧设计方案.在此一并致谢.

教材中难免有不妥之处，希望使用本教材的教师和学生提出宝贵意见.

编 者

目 录

第一章

概率论的基本概念

在现实生活和社会活动中发生的现象千姿百态，人们通常将这些现象归结为两类：确定性的和随机性的．例如，水在标准大气压下温度持续达到100 ℃ 时必然沸腾，温度为0 ℃ 以下时必然结冰；同性电荷相互排斥，异性电荷相互吸引等等．这类现象称为确定性现象，它们在一定条件下一定会发生．另有一类现象，在一定条件下，试验有多种可能的结果，但事先又不能确定哪一种结果会发生，这类现象称为随机现象．例如，测量一个物体的长度，其测量误差的大小；从一批电视机中任意取一台，被选取的这台电视机的寿命长短等都是随机现象．概率论与数理统计，就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门基础学科．

这里我们注意到，随机现象是与一定的条件密切联系的．例如，在城市交通的某一路口，指定的 1 h 内，汽车的流量多少就是一个随机现象，而“指定的 1 h 内”就是条件，若换成 2 h 内、5 h 内，流量就会不同．如将汽车的流量换成自行车的流量，差别就会更大，故随机现象与一定的条件是有密切联系的．

概率论与数理统计的应用是很广泛的，几乎渗透到所有科学技术领域，工业、农业、国防与国民经济的各个部门都要用到它．例如，在工业生产中，人们应用概率统计方法进行质量控制、工业试验设计、产品的抽样检查等．还可使用概率统计方法进行气象预报、水文预报、地震预报及在经济活动中的投资决策和风险评估等．另外，概率统计的理论与方法正在向各基础学科、工程学科、经济学科渗透，产生了各种边缘性的应用学科，如排队论、计量经济学、信息论、控制论、时间序列分析等．

知识框图

第一节 样本空间、随机事件

重点难点

1. 随机试验

人们是通过试验去研究随机现象的，把对随机现象加以研究所进行的观察或实验，称为试验. 若一个试验具有下列 3 个特点：

1° 可以在相同的条件下重复地进行；

2° 每次试验的可能结果不止一个，并且事先可以明确试验所有可能出现的结果；

3° 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现，

则称这一试验为随机试验(random trial)，记为 E.

下面举一些随机试验的例子.

E_1：抛一枚硬币，观察正面 H 和反面 T 出现的情况；

E_2：掷两颗骰子，观察出现的点数；

E_3：在一批电视机中任意抽取一台，测试它的寿命；

E_4：城市某一交通路口，观察指定 1 h 内的汽车流量；

E_5：记录某一地区一昼夜的最高温度和最低温度.

2. 样本空间与随机事件

在一个试验中，不论可能出现的结果有多少，总可以从中找出一组基本结果，满足：

1° 每进行一次试验，必然出现且只能出现其中的一个基本结果；

2° 任何结果，都是由其中的一些基本结果所组成.

随机试验 E 的所有基本结果组成的集合称为样本空间(sample space)，记为 Ω. 样本空间的元素，即 E 的每个基本结果，称为样本点.

下面写出前面提到的试验 $E_k(k=1,2,3,4,5)$ 的样本空间 Ω_k：

Ω_1：$\{H,T\}$；

Ω_2：$\{(i,j) \mid i,j=1,2,3,4,5,6\}$；

Ω_3：$\{t \mid t \geqslant 0\}$；

Ω_4：$\{0,1,2,3,\cdots\}$；

Ω_5：$\{(x,y) \mid T_0 \leqslant x \leqslant y \leqslant T_1\}$，这里 x 表示最低温度，y 表示

最高温度，并设这一地区温度不会小于 T_0 也不会大于 T_1.

随机试验 E 的样本空间 Ω 的子集称为 E 的随机事件(random event)，简称事件[①]，通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示. 在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一事件发生. 例如，在掷骰子的试验中，可以用 A 表示"出现点数为偶数"这个事件，若试验结果是"出现 6 点"，就称事件 A 发生.

特别地，由一个样本点组成的单点集，称为基本事件. 例如，试验 E_1 有两个基本事件 $\{H\}$，$\{T\}$；试验 E_2 有 36 个基本事件 $\{(1,1)\},\{(1,2)\},\cdots,\{(6,6)\}$.

每次试验中都必然发生的事件，称为必然事件. 样本空间 Ω 包含所有的样本点，它是 Ω 自身的子集，每次试验中都必然发生，故它就是一个必然事件. 因而必然事件我们也用 Ω 表示. 在每次试验中不可能发生的事件称为不可能事件. 空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，它作为样本空间的子集，在每次试验中都不可能发生，故它就是一个不可能事件. 因而不可能事件我们也用 $\varnothing$ 表示.

3. 事件之间的关系及其运算

事件是一个集合，因而事件间的关系与事件的运算可以用集合之间的关系与集合的运算来处理.

下面我们讨论事件之间的关系及运算.

1°　如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 A 包含于事件 B(或称事件 B 包含事件 A)，记为 $A\subset B$(或 $B\supset A$).

$A\subset B$ 的一个等价说法是，如果事件 B 不发生，则事件 A 必然不发生.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与 B 相等(或等价)，记为 $A=B$.

为了方便起见，规定对于任一事件 A，有 $\varnothing\subset A$. 显然，对于任一事件 A，有 $A\subset\Omega$.

2°　"事件 A 与 B 中至少有一个发生"的事件称为 A 与 B 的并(和)，记为 $A\cup B$.

由事件并的定义，可立即得到：

对于任一事件 A，有

$$A\cup\Omega=\Omega;\quad A\cup\varnothing=A.$$

$A=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示"事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生"这一

① 严格地说，事件是指 Ω 中满足某些条件的子集. 当 Ω 是由有限个元素或由无穷可列个元素组成时，每个子集都可作为一个事件. 若 Ω 是由不可数无限个元素组成时，某些子集必须排除在外. 幸而这种不可容许的子集在实际应用中几乎不会遇到. 今后，我们讲的事件都是指它是容许考虑的那种子集.

事件.

$A=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示"可数无穷多个事件 A_i 中至少有一个发生"这一事件.

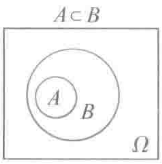


图 1-1

3° "事件 A 与 B 同时发生"的事件称为 A 与 B 的交(积),记为 $A\cap B$(或 AB).

由事件交的定义,可立即得到:

对于任一事件 A,有

$$A\cap\Omega=A;\quad A\cap\varnothing=\varnothing.$$

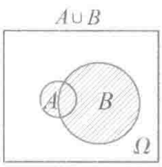


图 1-2

$B=\bigcap\limits_{i=1}^{n}B_i$ 表示"$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 这 n 个事件同时发生"这一事件.

$B=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}B_i$ 表示"可数无穷多个事件 B_i 同时发生"这一事件.

4° "事件 A 发生而 B 不发生"的事件称为 A 与 B 的差,记为 $A-B$.

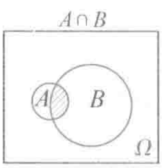


图 1-3

由事件差的定义,可立即得到:

对于任一事件 A,有

$$A-A=\varnothing;\quad A-\varnothing=A;\quad A-\Omega=\varnothing.$$

5° 如果两个事件 A 与 B 不可能同时发生,则称事件 A 与 B 为互不相容(互斥),记为 $A\cap B=\varnothing$.

基本事件是两两互不相容的.

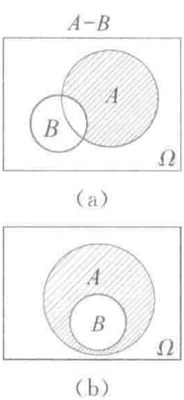


图 1-4

6° 若 $A\cup B=\Omega$ 且 $A\cap B=\varnothing$,则称事件 A 与事件 B 互为逆事件(对立事件). A 的对立事件记为 $\overline{A}$,$\overline{A}$ 是由所有不属于 A 的样本点组成的事件,它表示"A 不发生"这样一个事件.显然 $\overline{A}=\Omega-A$.

在一次试验中,若 A 发生,则 $\overline{A}$ 必不发生(反之亦然),即在一次试验中,A 与 $\overline{A}$ 两者只能发生其中之一,并且也必然发生其中之一.显然有 $\overline{\overline{A}}=A$.

对立事件必为互不相容事件,反之,互不相容事件未必为对立事件.

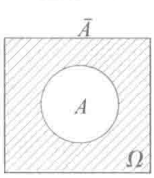


图 1-5

以上事件之间的关系及运算可以用文氏(Venn)图来直观地描述.若用平面上一个矩形表示样本空间 Ω,矩形内的点表示样本点,圆 A 与圆 B 分别表示事件 A 与事件 B,则 A 与 B 的各种关系及其运算如下列各图所示(见图 1-1 ~ 图 1-6).

可以验证一般事件的运算满足如下关系:

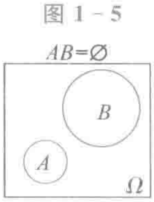


图 1-6

1° 交换律 $A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A;$

2° 结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,$

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C;$

3° 分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C),$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C);$

分配律可以推广到有穷或可数无穷的情形，即

$$A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\bigcup_{i=1}^{n}(A\cap A_i),\quad A\cup\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=\bigcap_{i=1}^{n}(A\cup A_i);$$

$$A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\bigcup_{i=1}^{\infty}(A\cap A_i),\quad A\cup\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\bigcap_{i=1}^{\infty}(A\cup A_i).$$

4° $A-B=A\overline{B}=A-AB$；

5° 对有穷个或可数无穷个事件 A_i，恒有

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i};$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}.$$

名人简介

例 1.1 设 A,B,C 为 3 个事件，试用 A,B,C 的运算式表示下列事件：

(1) A 发生而 B 与 C 都不发生； (2) A,B 都发生而 C 不发生；

(3) A,B,C 至少有两个事件发生； (4) A,B,C 至多有两个事件发生；

(5) A,B,C 恰有两个事件发生； (6) A,B 中至少有一个发生而 C 不发生.

解 (1) $A\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $A-B-C$ 或 $A-(B\cup C)$ 或 $A\,\overline{B\cup C}$；

(2) $AB\overline{C}$ 或 $AB-C$；

(3) $(AB)\cup(AC)\cup(BC)$；

(4) $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$；

(5) $(AB\overline{C})\cup(A\overline{B}C)\cup(\overline{A}BC)$；

(6) $(A\cup B)\overline{C}$.

拓展知识

例 1.2 在数学系的学生中任选一名学生. 若事件 A 表示“被选学生是男生”，事件 B 表示“该生是三年级学生”，事件 C 表示“该生是运动员”.

(1) 叙述 $AB\overline{C}$ 的意义；

(2) 在什么条件下 $ABC=C$ 成立？

(3) 在什么条件下 $\overline{A}\subset B$ 成立？

解 (1) 该生是三年级男生，但不是运动员；

(2) 全系运动员都是三年级男生；

(3) 全系女生都在三年级.

例 1.3 设事件 A 表示“甲种产品畅销，乙种产品滞销”，求其对立事件 $\overline{A}$.

解 设 $B=$“甲种产品畅销”，$C=$“乙种产品滞销”，则 $A=BC$，故

$$\overline{A}=\overline{BC}=\overline{B}\cup\overline{C}=\text{“甲种产品滞销或乙种产品畅销”}.$$

第二节 概率、古典概型

除必然事件与不可能事件外，任一随机事件在一次试验中都有可能发生，也有可能不发生. 人们常常希望了解某些事件在一次试验中发生的可能性的大小. 为此，我们首先引入频率的概念，它描述了事件发生的频繁程度，进而我们再引出表示事件在一次试验中发生的可能性大小的数 —— 概率.

1. 频率

定义 1.1 设在相同的条件下，进行了 n 次试验. 若随机事件 A 在 n 次试验中发生了 k 次，则比值 $\frac{k}{n}$ 称为事件 A 在这 n 次试验中发生的频率(frequency)，记为 $f_n(A)=\frac{k}{n}$.

由定义 1.1 容易推知，频率具有以下性质：

1° 对于任一事件 A，有 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

2° 对于必然事件 Ω，有 $f_n(\Omega)=1$；

3° 若事件 A,B 互不相容，则

$$f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B).$$

一般地，若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 两两互不相容，则

$$f_n(\bigcup_{i=1}^{m}A_i)=\sum_{i=1}^{m}f_n(A_i).$$

事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 表示 A 发生的频繁程度，频率大，事件 A 发生就频繁，在一次试验中，A 发生的可能性也就大，反之亦然. 因而，直观的想法是用 $f_n(A)$ 表示 A 在一次试验中发生可能性的大小. 但是，由于试验的随机性，即使同样是进行 n 次试验，$f_n(A)$ 的值也不一定相同. 但大量实验证实，随着重复试验次数 n 的增加，频率 $f_n(A)$ 会逐渐稳定于某个常数附近，而偏离的可能性很小. 频率具有"稳定性"这一事实，说明了刻画事件 A 发生可能性大小的数 —— 概率具有一定的客观存在性①.

名人简介

历史上有一些著名的试验，德 · 摩根(De Morgan)、蒲丰(Buffon)和皮尔逊(Pearson)曾进行过大量掷硬币试验，所得结果

① 严格说来，这是一个理想的模型，因为我们在实际上并不能绝对保证在每次试验时，条件都保持完全一样，这只是一个理想的假设.

如表 1-1 所示.

表 1-1

试验者	掷硬币次数	出现正面次数	出现正面的频率
德・摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

可见,出现正面的频率总在 0.5 附近摆动,随着试验次数增加,它逐渐稳定于 0.5. 这个 0.5 就反映了正面出现的可能性的大小.

每个事件都存在一个这样的常数与之对应,因而可将频率 $f_n(A)$ 在 n 无限增大时逐渐趋向稳定的这个常数定义为事件 A 发生的概率. 这就是概率的统计定义.

定义 1.2　设事件 A 在 n 次重复试验中发生的次数为 k,当 n 很大时,频率 $\frac{k}{n}$ 在某一数值 p 的附近摆动,而随着试验次数 n 的增加,发生较大摆动的可能性越来越小,则称数 p 为事件 A 发生的概率,记为 $P(A)=p$.

要注意的是,上述定义并没有提供确切计算概率的方法,因此我们永远不可能依据它确切地定出任何一个事件的概率. 在实际中,我们不可能对每一个事件都做大量的试验,况且我们不知道 n 要取多大才行. 如果 n 取很大,不一定能保证每次试验的条件都完全相同. 而且也没有理由认为,取试验次数为 $n+1$ 来计算频率,总会比取试验次数为 n 来计算频率将会更准确、更逼近所求的概率.

为了理论研究的需要,我们从频率的稳定性和频率的性质得到启发,给出概率的公理化定义.

2. 概率的公理化定义

定义 1.3　设 Ω 为样本空间,A 为事件,对于每一个事件 A 赋予一个实数,记为 $P(A)$,如果 $P(A)$ 满足以下条件:

1°　非负性:$P(A)\geqslant 0$;

2°　规范性:$P(\Omega)=1$;

3°　可数可加性:对于两两互不相容的可数无穷多个事件 A_1, A_2, $\cdots$, A_n, $\cdots$,有

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),$$

则称实数 $P(A)$ 为事件 A 的概率(probability).

拓展知识

在第五章中将证明,当 $n\to\infty$ 时,频率 $f_n(A)$ 在一定意义下接