

CALCULUS

微积分

CALCULUS

强化训练

(第二版)

上海大学数学系 编

上海大学出版社

微积分强化训练

(第二版)

上海大学数学系 编

上海大学出版社

· 上海 ·

内 容 提 要

本书是 2015 年上海普通高校优秀本科教材《高等数学上、下》(上海大学数学系编,高等教育出版社出版)配套辅导书. 本书由三部分组成,第一部分含有 13 套强化训练题,涉及课程内容有:函数的极限与连续;导数与微分;微分中值定理及导数的应用;不定积分、定积分. 第二部分 12 套强化训练题,涉及课程内容有:定积分的应用;向量代数与空间解析几何;多元函数微分学及其应用;重积分;曲线积分与曲面积分;第三部分 9 套强化训练题,涉及课程内容有:微分方程;无穷级数. 分别对应上海大学三学期教学内容. 训练题共有 811 题,由历年上海大学微积分考试试卷选编而成. 题目类型有填空题、选择题、计算题、证明与应用题,所有题目都给出了详细的解答过程,部分题目给出解题分析.

本书可作为高等院校高等数学课程的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

微积分强化训练/上海大学理学院数学系编. —2
版. —上海:上海大学出版社,2016. 10
ISBN 978-7-5671-2511-7
I. ①微… II. ①上… III. ①微积分—高等学校—习题集 IV. ①0172-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 228272 号

责任编辑 王悦生
封面设计 柯国富
技术编辑 章 斐

微积分强化训练(第二版)

上海大学数学系 编

上海大学出版社出版发行

(上海市上大路 99 号 邮政编码 200444)

(<http://www.press.shu.edu.cn> 发行热线 021-66135112)

出版人:郭纯生

*

南京展望文化发展有限公司排版

上海华业装潢印刷有限公司印刷 各地新华书店经销

开本 787×1092 1/16 印张 23.25 字数 580 千字

2016 年 10 月第 1 版 2016 年 10 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5671-2511-7/O·066 定价:36.00 元

前 言

微积分课程是理工类、经济管理类专业学生的数学基础课程之一,在学生数学能力与数学素养的培养中起关键作用,其理论与方法在科学研究、理论实践中有着广泛的应用.但微积分课程一个显著特点在于其包含了众多数学内容:一元函数微分学与积分学、空间解析几何、多元函数微分学与积分学、微分方程、级数等.课程中涉及大量的数学概念、理论与方法,同时不同知识之间存在相互依存的紧密关系.学生在学习中存在诸如对内容理解不透、方法掌握不好的问题,因此如何让学生掌握微积分课程中数学思想、理论与方法就成为微积分课程学习与教学过程中解决的核心问题.为此我们编写了这本《微积分强化训练》,其目的就是通过适当的习题训练指导学生在学中消化已学的知识,通过解题训练把握微积分基本思想、基本理论、基本方法,并能利用其解决实际中的问题.

本书由三个部分组成,分别对应上海大学三学期教学内容.训练题共有 811 题,由历年上海大学微积分考试试卷选编而成.题目类型有填空题、选择题、计算题、证明与应用题,所有题目都给出了详细的解答过程,部分题目给出解题分析.

第一部分含有 13 套强化训练题,涉及课程内容有:函数的极限与连续;导数与微分;微分中值定理及导数的应用;不定积分、定积分.

第二部分 12 套强化训练题,涉及课程内容有:定积分的应用;向量代数与空间解析几何;多元函数微分学及其应用;重积分;曲线积分与曲面积分.

第三部分 9 套强化训练题,涉及课程内容有:微分方程;无穷级数.

希望读者在使用时,先对每套习题进行训练,在解题训练以后再阅读、分析每套习题的详细解答.在解题遇到困难时,应该首先阅读《高等数学》教材相关内容,寻找自己知识薄弱点,并通过思考解决学习中的问题.尽量避免先参阅每套习题的详细解答再做题的不良习惯.

本书编写者为杨建生、王培康.在编写过程中采纳了微积分课程教师有益的建议,对各知识点、习题精心安排,力求全面反映微积分课程内容.

本书是 2015 年上海普通高校优秀本科教材《高等数学(上、下)》(上海大学数学系编,高等教育出版社出版)的配套辅导书.在编写过程中得到上海大学一流学科“上海大学数学学

科”的支持,同时也得到了上海大学、上海大学教务处以及理学院等各级领导的关怀与支持,上海大学出版社为本书的出版提供了高效优质的服务,在此一并表示衷心感谢.

书中的不妥与错误,敬请老师和同学们不吝指出,以期在以后的版本中得以更正.

本书可作为高等学校非数学类专业学生的学习参考书,也可以供有志于考研的读者复习使用.

上海大学数学系

2016年6月

目 录

第 一 部 分

微积分强化训练题一	2
微积分强化训练题一参考解答	5
微积分强化训练题二	14
微积分强化训练题二参考解答	17
微积分强化训练题三	24
微积分强化训练题三参考解答	26
微积分强化训练题四	33
微积分强化训练题四参考解答	35
微积分强化训练题五	42
微积分强化训练题五参考解答	45
微积分强化训练题六	53
微积分强化训练题六参考解答	56
微积分强化训练题七	64
微积分强化训练题七参考解答	66
微积分强化训练题八	74
微积分强化训练题八参考解答	76
微积分强化训练题九	83
微积分强化训练题九参考解答	86
微积分强化训练题十	93
微积分强化训练题十参考解答	95
微积分强化训练题十一	101
微积分强化训练题十一参考解答	104
微积分强化训练题十二	112
微积分强化训练题十二参考解答	115
微积分强化训练题十三	122
微积分强化训练题十三参考解答	125

第 二 部 分

微积分强化训练题十四	134
微积分强化训练题十四参考解答	136
微积分强化训练题十五	144
微积分强化训练题十五参考解答	146
微积分强化训练题十六	154
微积分强化训练题十六参考解答	157
微积分强化训练题十七	168
微积分强化训练题十七参考解答	170
微积分强化训练题十八	181
微积分强化训练题十八参考解答	183
微积分强化训练题十九	192
微积分强化训练题十九参考解答	194
微积分强化训练题二十	201
微积分强化训练题二十参考解答	203
微积分强化训练题二十一	211
微积分强化训练题二十一参考解答	213
微积分强化训练题二十二	222
微积分强化训练题二十二参考解答	224
微积分强化训练题二十三	231
微积分强化训练题二十三参考解答	233
微积分强化训练题二十四	241
微积分强化训练题二十四参考解答	243
微积分强化训练题二十五	252
微积分强化训练题二十五参考解答	255

第 三 部 分

微积分强化训练题二十六	264
微积分强化训练题二十六参考解答	266
微积分强化训练题二十七	276
微积分强化训练题二十七参考解答	278
微积分强化训练题二十八	287

微积分强化训练题二十八参考解答	289
微积分强化训练题二十九	299
微积分强化训练题二十九参考解答	301
微积分强化训练题三十	308
微积分强化训练题三十参考解答	310
微积分强化训练题三十一	319
微积分强化训练题三十一参考解答	321
微积分强化训练题三十二	331
微积分强化训练题三十二参考解答	333
微积分强化训练题三十三	342
微积分强化训练题三十三参考解答	344
微积分强化训练题三十四	351
微积分强化训练题三十四参考解答	353

第一部分

知识范围：

- 函数的极限与连续
- 导数与微分
- 微分中值定理及导数的应用
- 不定积分
- 定积分

微积分强化训练题一

一、单项选择题

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left[\ln \left(1 + \frac{4}{x} \right) - \ln \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right] = (\quad)$.

A. 不存在

B. 5

C. 3

D. 0

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{a \ln(1+2x)}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}, & -\frac{1}{2} < x < 0, \\ 2, & x = 0, \\ \frac{\sin bx}{x}, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则数组

$(a, b) = (\quad)$.

A. (1, 2)

B. (2, 2)

C. (2, 1)

D. (1, 1)

3. 设函数 $f(x) = |x-2| g(x)$, 其中 $g(x)$ 在 $x=2$ 处连续, 且 $g(2) \neq 0$, 则 $f'(2) = (\quad)$.

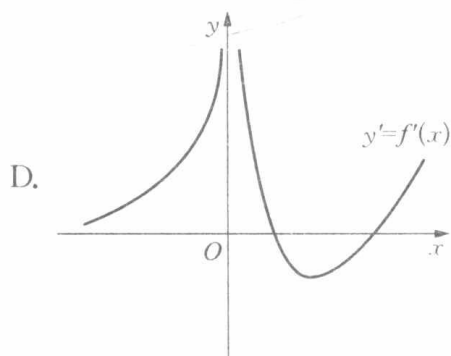
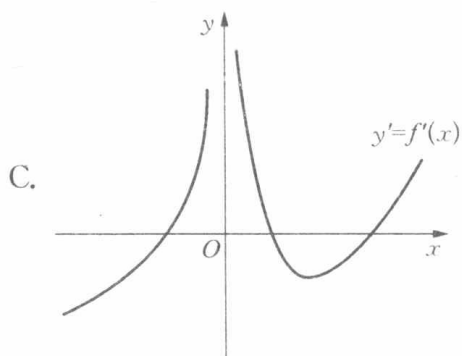
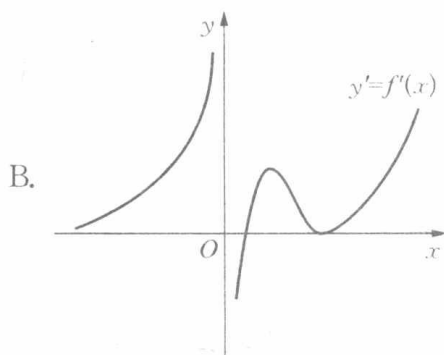
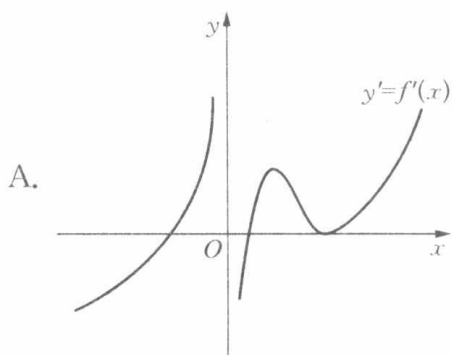
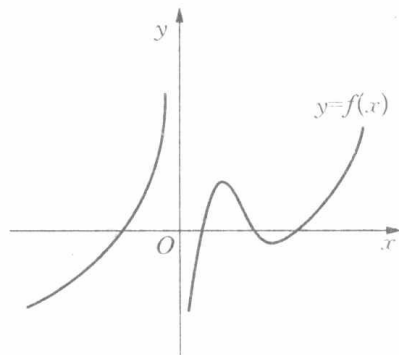
A. $g(2)$

B. $-g(2)$

C. 0

D. 不存在

4. 设函数 $f(x)$ 在定义域内可导, $y = f(x)$ 的图形如图所示, 则导函数 $y' = f'(x)$ 的图形为().



5. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续, 且 $f(0)=0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1-\cos x} = 1$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处().

- A. 不可导
B. 可导且 $f'(0) \neq 0$
C. 取得极小值
D. 取得极大值

二、填空题

6. 若 $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0, \end{cases}$ 则 $f(f(x)) =$ _____.
7. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小, 而 $x\sin x^n$ 是比 $e^{x^2}-1$ 高阶的无穷小, 则自然数 $n =$ _____.
8. 若 $y = \frac{2^x}{x} + e^{f^2(\cos x)}$, 其中 f 可导, 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____.

9. 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 $\sin 2x$, 则 $\int x f'(x) dx =$ _____.

10. $\int_{-2}^2 \frac{x^2 + x \cos x}{2 + \sqrt{4-x^2}} dx =$ _____.

三、计算题

11. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (-\sin 3x + \cos x)^{\frac{1}{x}}$.

12. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} \right)$.

13. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t) \ln(3+t^2) dt}{\sin^2 x}$.

四、计算题

14. 设 $y = \ln(\sin \sqrt{x}) + \sin(\ln \sqrt{x})$, 求 dy .

15. 设函数 $y = y(x)$ 是由方程 $xe^{x+y} - \sin y^2 = \ln 2$ 确定的隐函数, 求 $\frac{dy}{dx}$.

16. 设 $\begin{cases} x = 1+t^2, \\ y = t - \arctan t. \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

五、计算题

17. $\int \sqrt{x} \ln x dx$.

18. $\int \frac{x^3}{1+\sqrt{x^2+1}} dx$.

19. $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2-x^2}}{x^2} dx$.

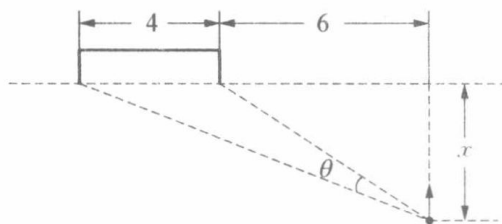
20. 设 $f(x) = x, x \in [0, \pi)$, 且 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内满足 $f(x) = f(x-\pi) + \sin x$, 求 $\int_{\pi}^{3\pi} f(x) dx$.

21. $\int_0^{+\infty} \frac{xe^x}{(1+e^x)^2} dx.$

六、应用题

22. 求 $y = \frac{\ln^2 x}{x}$ 的单调区间与极值, 并求其所有的水平渐近线和垂直渐近线.

23. 如图, 假定足球门宽为 4 m, 在距离右门柱 6 m 处一球员沿垂直于底线的方向带球前进. 问: 他在离底线几米的地方将获得最大的射门张角 θ ?



七、证明题

24. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 证明存在 $\epsilon \in (0, 1)$, 使得

$$\int_{\epsilon}^1 f(x) dx = \epsilon f(\epsilon).$$

25. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上具有连续导数, 且 $f(0) + f(1) = 0$. 证明:

$$\left| \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^1 |f'(x)| dx.$$

微积分强化训练题一参考解答

一、单项选择题

1. B.

$$\begin{aligned}\text{理由: } \lim_{x \rightarrow \infty} x \left[\ln \left(1 + \frac{4}{x} \right) - \ln \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right] &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x \ln \left(1 + \frac{4}{x} \right) - x \ln \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[4 \ln \left(1 + \frac{4}{x} \right)^{\frac{x}{4}} + \ln \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{-x} \right] \\ &= 4 \ln e + \ln e = 5.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{或 } \lim_{x \rightarrow \infty} x \left[\ln \left(1 + \frac{4}{x} \right) - \ln \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right] &\stackrel{\frac{1}{x} = t}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4t) - \ln(1-t)}{t} \\ &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{1+4t} \cdot 4 - \frac{1}{1-t} \cdot (-1) \right] = 5.\end{aligned}$$

2. A.

$$\begin{aligned}\text{理由: 因为 } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a \ln(1+2x)}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a \cdot 2x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2ax(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} a(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) = 2a;\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin bx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{bx}{x} = b;$$

$$f(0) = 2;$$

所以由

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

得 $2a = b = 2$, 故 $a = 1, b = 2$.

3. D.

理由: 由于

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x - 2| g(x) - 0}{x - 2} = - \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = -g(2);$$

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x - 2| g(x) - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = g(2),$$

又由于 $g(2) \neq 0$, 所以 $f'_-(2) \neq f'_+(2)$, 故 $f'(2)$ 不存在.

4. D.

理由: 因为在区间 $(-\infty, 0)$, $(0, x_1)$ 和 $(x_2, +\infty)$ 内, $f(x)$ 单调增加, 所以 $f'(x) >$

0; 在区间 (x_1, x_2) 内, $f(x)$ 单调减少, 所以 $f'(x) < 0$; 故 $y' = f'(x)$ 的图形为 D 所示.

5. C.

理由: 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$

$$\frac{1 - \cos x}{x} = 1 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x} = 1 \times 0 = 0,$$

所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导且 $f'(0) = 0$;

又因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = 1 > 0$, 所以由函数极限的保号性可知: 存在 $x = 0$ 的某个去心邻域, 使得 $\frac{f(x)}{1 - \cos x} > 0$, 而 $1 - \cos x > 0$, 则 $f(x) > 0$, 即 $f(x) > f(0)$, 所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极小值.

二、填空题

6. $\begin{cases} 2+x, & x < -1, \\ 1, & x \geq -1. \end{cases}$

理由: $f(f(x)) = \begin{cases} 1+f(x), & f(x) < 0, \\ 1, & f(x) \geq 0. \end{cases}$

由 $f(x) < 0$ 可得 $x < -1$. 所以

$$f(f(x)) = \begin{cases} 1+(1+x), & x < -1, \\ 1, & x \geq -1. \end{cases}$$

即

$$f(f(x)) = \begin{cases} 2+x, & x < -1, \\ 1, & x \geq -1. \end{cases}$$

7. 2.

理由: 当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 - \cos x) \ln(1 + x^2) \sim \frac{1}{2}x^2 \cdot x^2 = \frac{1}{2}x^4$; $x \sin x^n \sim x \cdot x^n = x^{n+1}$; $e^{x^2} - 1 \sim x^2$.

由题意知 $4 > n+1$ 且 $n+1 > 2$, 即 $n < 3$ 且 $n > 1$, 所以自然数 $n = 2$.

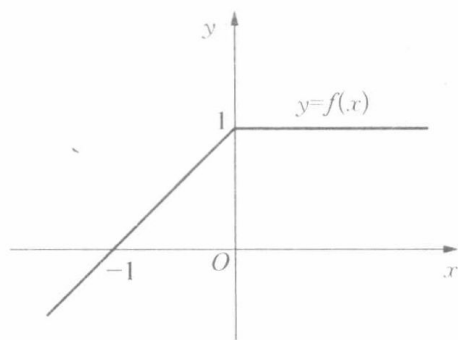
8. $\frac{2^x(x \ln 2 - 1)}{x^2} - 2 \sin x \cdot f(\cos x) f'(\cos x) e^{f^2(\cos x)}$.

理由: $\frac{dy}{dx} = \frac{(2^x)' \cdot x - 2^x \cdot (x)'}{x^2} + e^{f^2(\cos x)} \cdot (f^2(\cos x))'$

$$= \frac{2^x \ln 2 \cdot x - 2^x \cdot 1}{x^2} + e^{f^2(\cos x)} \cdot 2f(\cos x) \cdot (f(\cos x))'$$

$$= \frac{2^x(x \ln 2 - 1)}{x^2} + e^{f^2(\cos x)} \cdot 2f(\cos x) \cdot f'(\cos x) \cdot (\cos x)'$$

$$= \frac{2^x(x \ln 2 - 1)}{x^2} - e^{f^2(\cos x)} \cdot 2f(\cos x) \cdot f'(\cos x) \cdot \sin x.$$



9. $2x\cos 2x - \sin 2x + C$.

理由: 因为 $f(x)$ 的一个原函数是 $\sin 2x$, 所以 $f(x) = (\sin 2x)' = 2\cos 2x$, 且

$$\int f(x) dx = \sin 2x + C,$$

则

$$\begin{aligned}\int x f'(x) dx &= x f(x) - \int f(x) dx \\ &= 2x\cos 2x - \sin 2x + C.\end{aligned}$$

10. $8 - 2\pi$.

理由:
$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 \frac{x^2 + x\cos x}{2 + \sqrt{4 - x^2}} dx &= \int_{-2}^2 \frac{x^2}{2 + \sqrt{4 - x^2}} dx + \int_{-2}^2 \frac{x\cos x}{2 + \sqrt{4 - x^2}} dx \\ &= 2 \int_0^2 \frac{x^2}{2 + \sqrt{4 - x^2}} dx + 0 \\ &= 2 \int_0^2 \frac{x^2(2 - \sqrt{4 - x^2})}{x^2} dx \\ &= 4 \int_0^2 dx - 2 \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx \\ &= 4 \times 2 - 2 \times \frac{1}{4} \times \pi \times 2^2 \\ &= 8 - 2\pi.\end{aligned}$$

三、计算题

11. 分析: 幂指函数 $f(x)^{g(x)}$ 可转化为指数函数

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}.$$

因此其极限与导数都可以转化为指数函数极限与导数计算.

幂指函数的极限通常为不定型: 1^∞ , 0^0 , ∞^0 . 通过转换化为 $0 \cdot \infty$ 型.

解: $\lim_{x \rightarrow 0} (-\sin 3x + \cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln(-\sin 3x + \cos x)}.$

由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(-\sin 3x + \cos x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(-\sin 3x + \cos x)}{x}$

$$\begin{aligned}&= \frac{0}{0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{-\sin 3x + \cos x} \cdot (-3\cos 3x - \sin x) \\ &= -3,\end{aligned}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} (-\sin 3x + \cos x)^{\frac{1}{x}} = e^{-3}.$

12. 分析: 极限为 $\infty - \infty$ 型, 通过通分或者增加分母方法化为基本不定型: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(1+x)e^x}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right]$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+x^2)e^x - e^x + 1}{x(e^x - 1)} \quad (x \rightarrow 0: e^x - 1 \sim x) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+x^2)e^x - e^x + 1}{x^2} \\
&\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)e^x + (x+x^2)e^x - e^x}{2x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3+x)e^x}{2} \\
&= \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

13. 分析: 含有变限函数的极限通常为 $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ 不定型, 因此需要利用罗必达法则进行计算. 由此涉及变限函数求导, 一般变限函数的求导公式为

$$\left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t) dt \right)' = f(\varphi(x))\varphi'(x) - f(\psi(x))\psi'(x),$$

其中 $f(t)$ 为与 x 无关的连续函数.

由于积分 $\int_0^x (x-t)\ln(3+t^2)dt$ 中的被积函数含有 x , 不能直接利用变限函数求导公式, 需将其变形为

$$\begin{aligned}
&\int_0^x (x-t)\ln(3+t^2)dt = x \int_0^x \ln(3+t^2)dt - \int_0^x t \ln(3+t^2)dt. \\
\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)\ln(3+t^2)dt}{\sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x \ln(3+t^2)dt - \int_0^x t \ln(3+t^2)dt}{x^2} \\
&\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \ln(3+t^2)dt + x \ln(3+x^2) - x \ln(3+x^2)}{2x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \ln(3+t^2)dt}{2x} \\
&\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3+x^2)}{2} \\
&= \frac{\ln 3}{2}.
\end{aligned}$$

四、计算题

14. 分析: 题为复合函数求导, 直接利用复合函数求导公式计算.

如果 $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, 则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(\varphi(x))\varphi'(x).$$

$$\begin{aligned}\text{解: 因为 } \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sin \sqrt{x}} \cdot \cos \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + \cos(\ln \sqrt{x}) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cot \sqrt{x} + \frac{1}{2x} \cos(\ln \sqrt{x}),\end{aligned}$$

所以

$$dy = \left[\frac{1}{2\sqrt{x}} \cot \sqrt{x} + \frac{1}{2x} \cos(\ln \sqrt{x}) \right] dx.$$

15. 分析: 题为隐函数求导, 利用直接法进行计算, 即等式两边对 x 求导, 且涉及 y 的函数都为 x 的复合函数.

解: 方程两边对 x 求导得

$$e^{x+y} + xe^{x+y} \cdot \left(1 + \frac{dy}{dx}\right) - \cos y^2 \cdot 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

解得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+x)e^{x+y}}{2y\cos y^2 - xe^{x+y}}.$$

16. 分析: 题为参数方程求导, 其公式为

$$\text{设 } \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \text{ 则 } \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \text{ (设为 } g(t)), \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{g'(t)}{\varphi'(t)}.$$

$$\text{解: } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1 - \frac{1}{1+t^2}}{2t} = \frac{t}{2(1+t^2)};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1 \cdot 2(1+t^2) - t \cdot 4t}{4(1+t^2)^2}}{2t} = \frac{1-t^2}{4t(1+t^2)^2}.$$

五、计算题

17. 分析: 不定积分的被积函数为幂函数与对数函数相乘, 因此采用分部积分计算.

$$\begin{aligned}\text{解: } \int \sqrt{x} \ln x dx &= \frac{2}{3} \int \ln x d\left(x^{\frac{3}{2}}\right) \\ &= \frac{2}{3} \left[x^{\frac{3}{2}} \ln x - \int x^{\frac{3}{2}} d(\ln x) \right] = \frac{2}{3} \left(x^{\frac{3}{2}} \ln x - \int x^{\frac{1}{2}} dx \right) \\ &= \frac{2}{3} \left(x^{\frac{3}{2}} \ln x - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) + C.\end{aligned}$$

18. 分析: 不定积分中含有 $\sqrt{x^2+1}$, 通常方法采用三角函数换元 $x = \tan t$ 去掉根号. 但此题经过观察有: