CALCULUS

# 微积分

CALCULUS 强化训练

（第二版）

上海大学数学系　编

上海大学出版社

# 微积分强化训练

（第二版）

上海大学数学系　编

上海大学出版社

·上海·

## 内 容 提 要

本书是2015年上海普通高校优秀本科教材《高等数学上、下》(上海大学数学系编，高等教育出版社出版)配套辅导书.本书由三部分组成，第一部分含有13套强化训练题，涉及课程内容有：函数的极限与连续；导数与微分；微分中值定理及导数的应用；不定积分、定积分.第二部分12套强化训练题，涉及课程内容有：定积分的应用；向量代数与空间解析几何；多元函数微分学及其应用；重积分；曲线积分与曲面积分；第三部分9套强化训练题，涉及课程内容有：微分方程；无穷级数.分别对应上海大学三学期教学内容.训练题共有811题，由历年上海大学微积分考试试卷选编而成.题目类型有填空题、选择题、计算题、证明与应用题，所有题目都给出了详细的解答过程，部分题目给出解题分析.

本书可作为高等院校高等数学课程的教学参考书.

**图书在版编目(CIP)数据**

微积分强化训练/上海大学理学院数学系编.—2版.—上海：上海大学出版社，2016.10

ISBN 978-7-5671-2511-7

Ⅰ.①微… Ⅱ.①上… Ⅲ.①微积分—高等学校—习题集 Ⅳ.①O172-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第228272号

责任编辑 王悦生

封面设计 柯国富

技术编辑 章 斐

**微积分强化训练(第二版)**

上海大学数学系 编

上海大学出版社出版发行

(上海市上大路99号 邮政编码200444)

(http://www.press.shu.edu.cn 发行热线021—66135112)

出版人：郭纯生

*

南京展望文化发展有限公司排版

上海华业装潢印刷有限公司印刷 各地新华书店经销

开本787×1092 1/16 印张23.25 字数580千字

2016年10月第1版 2016年10月第1次印刷

ISBN 978-7-5671-2511-7/O·066 定价：36.00元

# 前　　言

微积分课程是理工类、经济管理类专业学生的数学基础课程之一，在学生数学能力与数学素养的培养中起关键作用，其理论与方法在科学研究、理论实践中有着广泛的应用.但微积分课程一个显著特点在于其包含了众多数学内容：一元函数微分学与积分学、空间解析几何、多元函数微分学与积分学、微分方程、级数等.课程中涉及大量的数学概念、理论与方法，同时不同知识之间存在相互依存的紧密关系.学生在学习中存在诸如对内容理解不透、方法掌握不好的问题，因此如何让学生掌握微积分课程中数学思想、理论与方法就成为微积分课程学习与教学过程中解决的核心问题.为此我们编写了这本《微积分强化训练》，其目的就是通过适当的习题训练指导学生在学习中消化已学的知识，通过解题训练把握微积分基本思想、基本理论、基本方法，并能利用其解决实际中的问题.

本书由三个部分组成，分别对应上海大学三学期教学内容.训练题共有811题，由历年上海大学微积分考试试卷选编而成.题目类型有填空题、选择题、计算题、证明与应用题，所有题目都给出了详细的解答过程，部分题目给出解题分析.

第一部分含有13套强化训练题，涉及课程内容有：函数的极限与连续；导数与微分；微分中值定理及导数的应用；不定积分、定积分.

第二部分12套强化训练题，涉及课程内容有：定积分的应用；向量代数与空间解析几何；多元函数微分学及其应用；重积分；曲线积分与曲面积分.

第三部分9套强化训练题，涉及课程内容有：微分方程；无穷级数.

希望读者在使用时，先对每套习题进行训练，在解题训练以后再阅读、分析每套习题的详细解答.在解题遇到困难时，应该首先阅读《高等数学》教材相关内容，寻找自己知识薄弱点，并通过思考解决学习中的问题.尽量避免先参阅每套习题的详细解答再做题的不良习惯.

本书编写者为杨建生、王培康.在编写过程中采纳了微积分课程教师有益的建议，对各知识点、习题精心安排，力求全面反映微积分课程内容.

本书是2015年上海普通高校优秀本科教材《高等数学(上、下)》(上海大学数学系编，高等教育出版社出版)的配套辅导书.在编写过程中得到上海大学一流学科“上海大学数学学

科”的支持，同时也得到了上海大学、上海大学教务处以及理学院等各级领导的关怀与支持，上海大学出版社为本书的出版提供了高效优质的服务，在此一并表示衷心感谢.

书中的不妥与错误，敬请老师和同学们不吝指出，以期在以后的版本中得以更正.

本书可作为高等学校非数学类专业学生的学习参考书，也可以供有志于考研的读者复习使用.

上海大学数学系

2016 年 6 月

# 目　录

## 第一部分

## 第二部分



## 第三部分

# 第一部分

知识范围：

- 函数的极限与连续
- 导数与微分
- 微分中值定理及导数的应用
- 不定积分
- 定积分

# 微积分强化训练题一

## 一、单项选择题

**1.** $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\ln\left(1+\dfrac{4}{x}\right)-\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\right]=$（　　）.

A. 不存在　　　　B. 5

C. 3　　　　D. 0

**2.** 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a\ln(1+2x)}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}, & -\dfrac{1}{2}<x<0,\\ 2, & x=0,\\ \dfrac{\sin bx}{x}, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则数组 $(a,b)=$（　　）.

A. $(1,2)$　　　　B. $(2,2)$

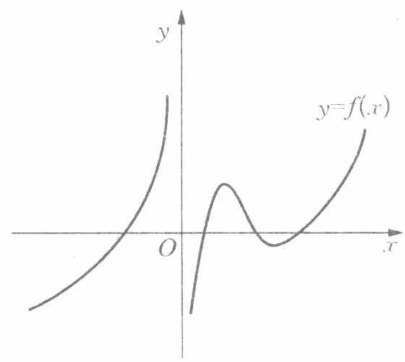
C. $(2,1)$　　　　D. $(1,1)$

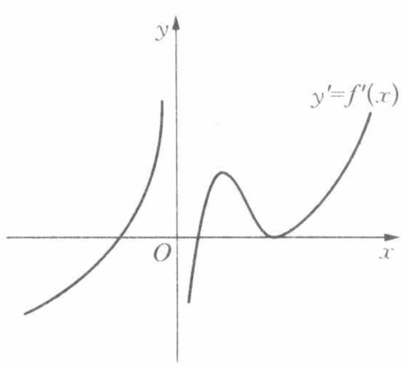
**3.** 设函数 $f(x)=|x-2|g(x)$，其中 $g(x)$ 在 $x=2$ 处连续，且 $g(2)\neq 0$，则 $f'(2)=$（　　）.

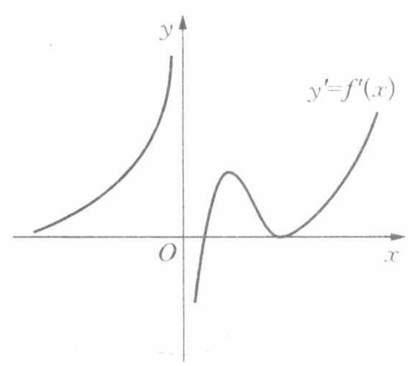
A. $g(2)$　　　　B. $-g(2)$

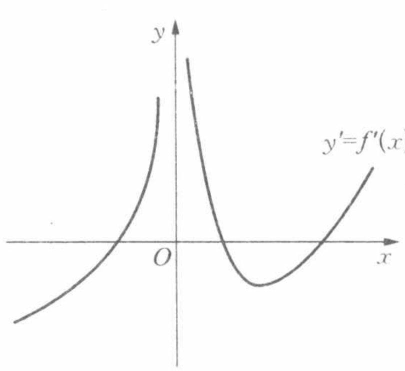
C. 0　　　　D. 不存在

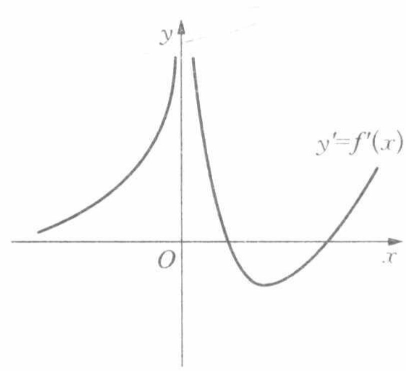
**4.** 设函数 $f(x)$ 在定义域内可导，$y=f(x)$ 的图形如图所示，则导函数 $y'=f'(x)$ 的图形为（　　）.




A.



B.



C.



D.


5. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，且 $f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=1$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　　).

A. 不可导　　　　　　　　B. 可导且 $f'(0)\neq 0$

C. 取得极小值　　　　　　D. 取得极大值

**二、填空题**

6. 若 $f(x)=\begin{cases}1+x, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $f(f(x))=$ ________.

7. 当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\sin x^n$ 是比 $e^{x^2}-1$ 高阶的无穷小，则自然数 $n=$ ________.

8. 若 $y=\dfrac{2^x}{x}+e^{f^2(\cos x)}$，其中 $f$ 可导，则 $\dfrac{dy}{dx}=$ ________.

9. 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 $\sin 2x$，则 $\int xf'(x)dx=$ ________.

10. $\displaystyle\int_{-2}^{2}\frac{x^2+x\cos x}{2+\sqrt{4-x^2}}dx=$ ________.

**三、计算题**

11. 求 $\lim\limits_{x\to 0}(-\sin 3x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

12. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-e^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)$.

13. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (x-t)\ln(3+t^2)dt}{\sin^2 x}$.

**四、计算题**

14. 设 $y=\ln(\sin\sqrt{x})+\sin(\ln\sqrt{x})$，求 $dy$.

15. 设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $xe^{x+y}-\sin y^2=\ln 2$ 确定的隐函数，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

16. 设 $\begin{cases}x=1+t^2,\\ y=t-\arctan t.\end{cases}$ 求 $\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

**五、计算题**

17. $\int\sqrt{x}\ln x dx$.

18. $\displaystyle\int\frac{x^3}{1+\sqrt{x^2+1}}dx$.

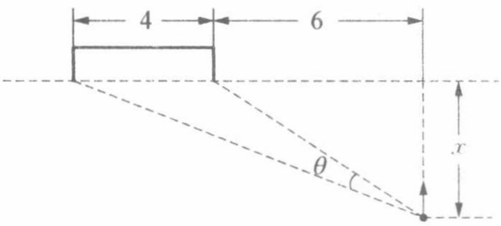
19. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2-x^2}}{x^2}dx$.

20. 设 $f(x)=x$，$x\in[0,\pi)$，且 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足 $f(x)=f(x-\pi)+\sin x$，求 $\int_{\pi}^{3\pi}f(x)dx$.

21. $\int_{0}^{+\infty} \frac{xe^x}{(1+e^x)^2}dx$.

六、应用题

22. 求 $y=\frac{\ln^2 x}{x}$ 的单调区间与极值，并求其所有的水平渐近线和垂直渐近线.




23. 如图，假定足球门宽为 4 m，在距离右门柱 6 m 处一球员沿垂直于底线的方向带球前进. 问：他在离底线几米的地方将获得最大的射门张角 $\theta$？

七、证明题

24. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，证明存在 $\varepsilon \in (0, 1)$，使得

$$\int_{\varepsilon}^{1} f(x)dx = \varepsilon f(\varepsilon).$$

25. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上具有连续导数，且 $f(0)+f(1)=0$. 证明：

$$\left|\int_0^1 f(x)dx\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 |f'(x)|dx.$$

# 微积分强化训练题一参考解答

## 一、单项选择题

**1.** B.

**理由：** $$\lim_{x\to\infty} x\left[\ln\left(1+\frac{4}{x}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[x\ln\left(1+\frac{4}{x}\right)-x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left[4\ln\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{4}}+\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right]$$
$$=4\ln e+\ln e=5.$$

或 $$\lim_{x\to\infty} x\left[\ln\left(1+\frac{4}{x}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+4t)-\ln(1-t)}{t}$$
$$\xlongequal{\frac{0}{0}}\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{1+4t}\cdot 4-\frac{1}{1-t}\cdot(-1)\right]=5.$$

**2.** A.

**理由：** 因为 $$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{a\ln(1+2x)}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{a\cdot 2x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{2ax(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$
$$=\lim_{x\to 0^-} a(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})=2a;$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin bx}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{bx}{x}=b;$$
$f(0)=2$;

所以由
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$$
得 $2a=b=2$，故 $a=1$，$b=2$.

**3.** D.

**理由：** 由于
$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2|g(x)-0}{x-2}=-\lim_{x\to 2^-}g(x)=-g(2);$$
$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{|x-2|g(x)-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}g(x)=g(2),$$
又由于 $g(2)\neq 0$，所以 $f'_-(2)\neq f'_+(2)$，故 $f'(2)$ 不存在.

**4.** D.

**理由：** 因为在区间 $(-\infty,0)$，$(0,x_1)$ 和 $(x_2,+\infty)$ 内，$f(x)$ 单调增加，所以 $f'(x)>$

0；在区间 $(x_1, x_2)$ 内，$f(x)$ 单调减少，所以 $f'(x)<0$；故 $y'=f'(x)$ 的图形为 D 所示.

**5.** C.

**理由：** 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}$

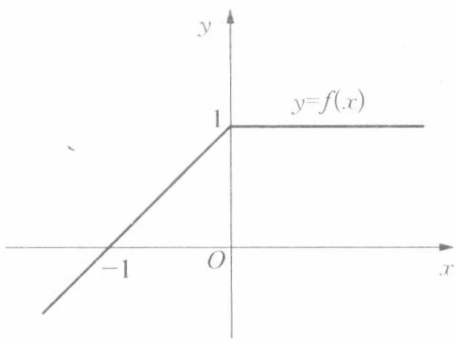
$\dfrac{1-\cos x}{x}=1\times\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x}=1\times 0=0$，

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且 $f'(0)=0$；

又因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=1>0$，所以由函数极限的保号性可知：存在 $x=0$ 的某个去心邻域，使得 $\dfrac{f(x)}{1-\cos x}>0$，而 $1-\cos x>0$，则 $f(x)>0$，即 $f(x)>f(0)$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值.

**二、填空题**

**6.** $\begin{cases}2+x, & x<-1,\\ 1, & x\geqslant -1.\end{cases}$




**理由：** $f(f(x))=\begin{cases}1+f(x), & f(x)<0,\\ 1, & f(x)\geqslant 0.\end{cases}$

由 $f(x)<0$ 可得 $x<-1$. 所以

$$f(f(x))=\begin{cases}1+(1+x), & x<-1,\\ 1, & x\geqslant -1.\end{cases}$$

即

$$f(f(x))=\begin{cases}2+x, & x<-1,\\ 1, & x\geqslant -1.\end{cases}$$

**7.** 2.

**理由：** 当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)\sim\dfrac{1}{2}x^2\cdot x^2=\dfrac{1}{2}x^4$；$x\sin x^n\sim x\cdot x^n=x^{n+1}$；$e^{x^2}-1\sim x^2$.

由题意知 $4>n+1$ 且 $n+1>2$，即 $n<3$ 且 $n>1$，所以自然数 $n=2$.

**8.** $\dfrac{2^x(x\ln 2-1)}{x^2}-2\sin x\cdot f(\cos x)f'(\cos x)e^{f^2(\cos x)}$.

**理由：** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(2^x)'\cdot x-2^x\cdot(x)'}{x^2}+e^{f^2(\cos x)}\cdot(f^2(\cos x))'$

$$=\frac{2^x\ln 2\cdot x-2^x\cdot 1}{x^2}+e^{f^2(\cos x)}\cdot 2f(\cos x)\cdot(f(\cos x))'$$

$$=\frac{2^x(x\ln 2-1)}{x^2}+e^{f^2(\cos x)}\cdot 2f(\cos x)\cdot f'(\cos x)\cdot(\cos x)'$$

$$=\frac{2^x(x\ln 2-1)}{x^2}-e^{f^2(\cos x)}\cdot 2f(\cos x)\cdot f'(\cos x)\cdot\sin x.$$

**9**. $2x\cos 2x - \sin 2x + C$.

**理由**：因为 $f(x)$ 的一个原函数是 $\sin 2x$，所以 $f(x) = (\sin 2x)' = 2\cos 2x$，且

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \sin 2x + C,$$

则

$$\begin{aligned}\int xf'(x)\mathrm{d}x &= xf(x) - \int f(x)\mathrm{d}x \\ &= 2x\cos 2x - \sin 2x + C.\end{aligned}$$

**10**. $8 - 2\pi$.

**理由**：
$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} \frac{x^2 + x\cos x}{2+\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x &= \int_{-2}^{2} \frac{x^2}{2+\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x + \int_{-2}^{2} \frac{x\cos x}{2+\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x \\ &= 2\int_{0}^{2} \frac{x^2}{2+\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x + 0 \\ &= 2\int_{0}^{2} \frac{x^2(2-\sqrt{4-x^2})}{x^2}\mathrm{d}x \\ &= 4\int_{0}^{2}\mathrm{d}x - 2\int_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= 4\times 2 - 2\times\frac{1}{4}\times\pi\times 2^2 \\ &= 8 - 2\pi.\end{aligned}$$

## 三、计算题

**11. 分析**：幂指函数 $f(x)^{g(x)}$ 可转化为指数函数

$$f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}.$$

因此其极限与导数都可以转化为指数函数极限与导数计算.

幂指函数的极限通常为不定型：$1^{\infty}$，$0^0$，$\infty^0$. 通过转换化为 $0\cdot\infty$ 型.

**解**：$\lim\limits_{x\to 0}(-\sin 3x + \cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(-\sin 3x+\cos x)}$.

由于
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(-\sin 3x + \cos x) &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(-\sin 3x + \cos x)}{x} \\ &\xlongequal{\frac{0}{0}} \lim_{x\to 0}\frac{1}{-\sin 3x + \cos x}\cdot(-3\cos 3x - \sin x) \\ &= -3,\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}(-\sin 3x + \cos x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{-3}$.

**12. 分析**：极限为 $\infty - \infty$ 型，通过通分或者增加分母方法化为基本不定型：$\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$.

**解**：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-\mathrm{e}^{-x}} - \frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} - \frac{1}{x}\right]$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(x+x^2)e^x - e^x + 1}{x(e^x - 1)} \quad (x \to 0:\ e^x - 1 \sim x)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(x+x^2)e^x - e^x + 1}{x^2}$$

$$\xlongequal{\frac{0}{0}} \lim_{x \to 0} \frac{(1+2x)e^x + (x+x^2)e^x - e^x}{2x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(3+x)e^x}{2}$$

$$= \frac{3}{2}.$$

**13. 分析：** 含有变限函数的极限通常为 $\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$ 不定型，因此需要利用罗必达法则进行计算. 由此涉及变限函数求导，一般变限函数的求导公式为

$$\left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)' = f(\varphi(x))\varphi'(x) - f(\psi(x))\psi'(x),$$

其中 $f(t)$ 为与 $x$ 无关的连续函数.

由于积分 $\int_0^x (x-t)\ln(3+t^2)\mathrm{d}t$ 中的被积函数含有 $x$，不能直接利用变限函数求导公式，需将其变形为

$$\int_0^x (x-t)\ln(3+t^2)\mathrm{d}t = x\int_0^x \ln(3+t^2)\mathrm{d}t - \int_0^x t\ln(3+t^2)\mathrm{d}t.$$

**解：** $\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x (x-t)\ln(3+t^2)\mathrm{d}t}{\sin^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{x\int_0^x \ln(3+t^2)\mathrm{d}t - \int_0^x t\ln(3+t^2)\mathrm{d}t}{x^2}$

$$\xlongequal{\frac{0}{0}} \lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \ln(3+t^2)\mathrm{d}t + x\ln(3+x^2) - x\ln(3+x^2)}{2x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \ln(3+t^2)\mathrm{d}t}{2x}$$

$$\xlongequal{\frac{0}{0}} \lim_{x \to 0} \frac{\ln(3+x^2)}{2}$$

$$= \frac{\ln 3}{2}.$$

## 四、计算题

**14. 分析：** 题为复合函数求导，直接利用复合函数求导公式计算.

如果 $y = f(u)$，$u = \varphi(x)$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f'(\varphi(x))\varphi'(x).$$

**解：** 因为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\sin\sqrt{x}}\cdot\cos\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\cos(\ln\sqrt{x})\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cot\sqrt{x}+\frac{1}{2x}\cos(\ln\sqrt{x}),$$

所以

$$dy=\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}\cot\sqrt{x}+\frac{1}{2x}\cos(\ln\sqrt{x})\right]dx.$$

**15. 分析：** 题为隐函数求导，利用直接法进行计算，即等式两边对 $x$ 求导，且涉及 $y$ 的函数都为 $x$ 的复合函数.

**解：** 方程两边对 $x$ 求导得

$$e^{x+y}+xe^{x+y}\cdot\left(1+\frac{dy}{dx}\right)-\cos y^2\cdot 2y\cdot\frac{dy}{dx}=0,$$

解得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(1+x)e^{x+y}}{2y\cos y^2-xe^{x+y}}.$$

**16. 分析：** 题为参数方程求导，其公式为

设 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}$ 则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$（设为 $g(t)$），$\dfrac{d^2y}{d^2x}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{g'(t)}{\varphi'(t)}$.

**解：** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{1-\frac{1}{1+t^2}}{2t}=\dfrac{t}{2(1+t^2)}$;

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1\cdot 2(1+t^2)-t\cdot 4t}{4\,(1+t^2)^2}}{2t}=\frac{1-t^2}{4t\,(1+t^2)^2}.$$

**五、计算题**

**17. 分析：** 不定积分的被积函数为幂函数与对数函数相乘，因此采用分部积分计算.

**解：** $\displaystyle\int\sqrt{x}\ln x\,dx=\frac{2}{3}\int\ln x\,d\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$

$$=\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\ln x-\int x^{\frac{3}{2}}\,d(\ln x)\right]=\frac{2}{3}\left(x^{\frac{3}{2}}\ln x-\int x^{\frac{1}{2}}\,dx\right)$$

$$=\frac{2}{3}\left(x^{\frac{3}{2}}\ln x-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)+C.$$

**18. 分析：** 不定积分中含有 $\sqrt{x^2+1}$，通常方法采用三角函数换元 $x=\tan t$ 去掉根号.但此题经过观察有：