DAIS

高等院校应用型人才培养规划教材——数学类

GAODENG YUANXIAO YINGYONGXING RENCAI PEIYANG GUIHUA JIAOCAI SHUXUELEI

交大e出版

线性代数

XIANXING DAISHU

王三福　王丙参　何建伟 ● 编

西南交通大学出版社

高等院校应用型人才培养规划教材——数学类

线性代数

王三福　王丙参　何建伟　编

西南交通大学出版社
·成　都·

内容简介

本书针对高等院校非数学专业教学大纲与《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》对线性代数的要求，采用学生易于接受的方式，科学、系统地介绍了线性代数的理论及其应用. 编写的主要思想是：在满足教学基本要求的前提下，适当降低理论推导的难度，注重解决问题的矩阵方法，突出 MATLAB 实现. 全书共 5 章，主要讲解行列式、矩阵及其运算、线性方程组与向量、矩阵的特征值与特征向量、二次型. 为适应信息化社会，我们在附录中给出了 MATLAB 简明教程与线性代数实验以供读者参考.

本书可作为理工类、经济类、管理类各专业的本科生教材，也可作为相关专业的参考用书.

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 / 王三福，王丙参，何建伟编. 一成都：西南交通大学出版社，2016.8
高等院校应用型人才培养规划教材. 数学类
ISBN 978-7-5643-4832-8

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①王… ②王… ③何… Ⅲ. ①线性代数－高等学校－教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 171870 号

高等院校应用型人才培养规划教材——数学类

线性代数

王三福
王丙参　编
何建伟

责任编辑　张宝华
特邀编辑　刘文佳
封面设计　何东琳设计工作室

印张　12　字数　300千
成品尺寸　185 mm × 260 mm
版本　2016 年 8 月第 1 版
印次　2016 年 8 月第 1 次
印刷　成都市书林印刷厂

出版 发行　西南交通大学出版社
网址　http://www.xnjdcbs.com
地址　四川省成都市二环路北一段111号
西南交通大学创新大厦21楼
邮政编码　610031
发行部电话　028-87600564　028-87600533

书号：ISBN 978-7-5643-4832-8
定价：29.80元

课件咨询电话：028-87600533
图书如有印装质量问题　本社负责退换

前　言

大学数学是自然科学的基本语言，是用来探索现实世界物质运动机理的主要手段. 目前，很多社会科学领域也引入了数学，比如经济、管理等专业，甚至文科专业也开设“文科高等数学”课程，以提升大学生的必备数学素养. 大学数学是一门科学语言，现在已经变为高校各专业的通识教育. 对于非数学专业的大学生而言，大学数学教育的意义不仅仅在于它是一种学习专业的工具，同时也能培养学生的理性思维品格和思辨能力，启迪学生的智慧，开发学生的创造力，其价值远非专业技术教育所能相提并论的.

随着高校的扩招，我国高等教育快速实现了从精英教育到大众化教育的过渡. 同时也给我国高等教育带来了一系列的变换、问题和挑战. 进入大众化教育以后，首当其冲受到影响的就是大学数学. 对于一般本科院校而言，学生基础薄弱，加上传统大学数学教材重理论，轻实践，高雅，枯燥，使得学生难以接受，导致学生厌学，后继专业课难以开展等. 另外，为了培养应用型人才，课程内容设置开始淡化理论推导，突出实践，大学数学课的课时也越来越少，比如线性代数、概率统计都压缩为 36 课时，高等数学则变为一学期，只开设 72 课时. 另外，随着社会的发展，计算机越来越普及，所以我们只有借助数学软件的强大功能才能站得更高，走得更远. 针对这种现象，我们尝试组织编写了系列大学数学公共课教材：

高等数学简明教程　（72 ~ 90 课时）;
线性代数　　　　　（36 ~ 54 课时）;
概率统计简明教程　（36 ~ 54 课时）.

为了突出特色，本套教材将以最少的课时讲解与专业有关的数学知识，以理工科通用数学软件 MATLAB 为基础增加计算机实现，辅助教学，同时，还要保证理论完整，逻辑严谨，妙趣横生，主要适用于普通高等院校课时较少的大学数学公共课. 值得一提的是，我们在教材中穿插了历史上有杰出贡献的数学家的故事，从他们身上既可以领略数学家坚韧不拔地追求真理的人格魅力和科学精神，也可以体会形形色色的人生，从而给自己以启迪. 一套教材构不成一门课，只有教师和学生在一起才能构成一门课，而教材只是支持这门课的信息资源，因此教师只有真正做到以学生为中心，处处为学生着想，充分发挥老师的指导作用，引导学生主动学习，让学生真正思考，才能把内容讲活，才能让学生终身受益. 为此，老师要以“没有教不会的学生，只有不会教的老师”的高标准来严格要求自己，然而作为学生，绝不可以拿着这个理由作为挡箭牌，被动接受知识，要充分发挥主观能动性，要有“就是没有老师教，我照样考 100 分”的精神.

“线性代数”作为高等学校本科数学基础中的重要的必修课程，是中学代数的继续和提高，是进一步学习相关专业课的必备基础. 基础课毕竟不是专业课，本着“服务专业，兼顾数学体系”的原则，本书不攀比难度，做到难度适当，深入浅出，举一反三，融会贯通. 在编写过程中，我们博采百家之长，注重基本理论、概念、方法的叙述，坚持抽象概念形象化的原则，关注应用能力、解题能力的培养，读者只需有高等数学基础即可读懂本书. 由于在每年考研中，数 1、数 2、数 3 的线性代数内容占到了 20% 左右，所以我们也参考了最新颁布的

《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的要求，力求教材的体系、内容既符合数学学科本科生的特点，又兼顾报考研究生的学生需求，书中很多题目直接采用了历年考研真题. 例题可以加深读者对理论的理解，为此，我们配备了大量例题和习题，难度各异，以满足不同学生的需求. 注意，本书介绍的例题和习题是按照读者了解行列式、矩阵等的运算规则，阐明思路，介绍方法来编写的，所以都非常简单. 然而，在源于实际问题的数学模型中，情况就完全不同了，这时，仅用笔和纸的手工运算无疑太费时费力，而且几乎不可能实现，因此，把这些烦琐的计算用计算机和数学软件来完成已成为首选. 国外近几年通用的线性代数教材都附有数学软件，借助数学软件 MATLAB 辅助教学也是本书特色之一.

全书共 5 章，分别为行列式、矩阵及其运算、线性方程组与向量、矩阵的特征值与特征向量、二次型. 书末附录是主体内容外的选学部分. 附录 1、2 分别给出 MATLAB 简明教程与线性代数实验以供读者参考并加深对正文的理解；附录 3、4 供读者课外阅读，以了解代数学发展历史，感受代数学家的个人魅力，探讨学习方法.

本书可作为理工类、经济类、管理类各专业的本科生教材，也可作为相关专业的参考用书. 线性代数，一般每学期总学时为 36 ~ 54 学时，包括习题课. 建议按第 1 到第 5 章的顺序分配学时如下：

（1）6+8+12+6+4=36 学时；

（2）10+12+14+8+6=50 学时，线性代数实验 4 学时.

以上建议仅供参考，任课老师可根据实际需要合理安排各章学时并选择教学重点. 如果课时非常少，书中带*号的内容可供读者自学. 当今社会，计算机非常普及，有条件的院校，可安排一定的上机课辅助教学，体会 MATLAB 的神奇. 当然，学生也可利用个人电脑自学线性代数实验.

本书由天水师范学院数学与统计学院王三福、王丙参、何建伟共同编写，第 1 章及附录 2、3、4 由王丙参编写，第 2、3、5 章、附录 1 及参考答案由王三福编写，第 4 章由何建伟编写. 我们经常在一起讨论、切磋写法，再经过反复讨论和修改后定稿. 本书在编写过程中，得到了学院领导的大力支持，代数教研室的同事认真审阅了书稿，提出了宝贵的修改意见；得到了西南交通大学出版社有关各方和同仁的大力支持，特在此一并致以诚挚的谢意！

虽然我们希望编写出一本质量较高、适合当前教学实际需要的教材，但由于编者水平有限，书中难免存在不妥之处，恳切希望读者批评、指正，使本教材得以完善.

编　者

2016 年 3 月

目　录

1 行列式

行列式是线性代数中的一个基本概念，也是讨论许多问题的一个基本工具. 本章通过线性方程组引入二阶、三阶行列式的定义，进而归纳出n阶行列式的定义，并讨论其性质和计算方法，最后介绍行列式在解特殊线性方程组中的应用，即克莱姆（Cramer）法则.

1.1 行列式定义

作为行列式定义的准备，需要引入一些概念，我们首先讨论数域、排列与对换.

1.1.1 数域、排列与对换

在研究某些问题时，常常需要限定所研究对象的取值范围. 例如，求方程$x^2+1=0$的根，在实数范围内无解，但在复数范围内有解，解为$\pm i$. 又如，在整数范围内，除法不是普遍可做的，因为商不一定是整数，但在有理数范围内，只要除数不为零，除法总是可做的. 另一方面，这些范围不同的实数、复数有着许多共同的运算（指加法、减法、乘法和除法）性质. 为了在讨论中能把具有这些共同运算性质的数集统一处理，我们引入一个一般概念.

定义 1.1.1 设P是至少由两个不同复数组成的集合，若P中任意两个数的和、差、积、商（除数不为零）仍为P中的数（简称四则运算封闭），则P就是一个**数域**.

显然，全体有理数的集合、全体实数的集合、全体复数的集合都是数域，分别用字母$\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{C}$来表示，且有$\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$. 注意，全体整数的集合$\mathbf{Z}$不是数域，这是因为$2,3\in\mathbf{Z}$，且$3\neq 0$，但$\dfrac{2}{3}\notin\mathbf{Z}$，这表明$\mathbf{Z}$对除法不封闭.

定义 1.1.2 由$1,2,\cdots,n\,(n>1)$组成的一个n元有序数组称为一个**n级排列**，简称**排列**，记作$i_1i_2\cdots i_n$.

例如，1234，2431 都是 4 级排列，45231 是一个 5 级排列. 2 级排列共有 2 个，它们分别是 12 和 21；3 级排列共有 6 个，它们分别是

$$123，132，213，231，312，321.$$

n级排列的总数是$\mathrm{P}_n=n!$，是偶数. 推导如下：

从n个元素中任取一个放在第一个位置上，有n种取法；

从剩下的$n-1$个元素中任取一个放在第二个位置上，有$n-1$种取法；

这样继续下去，直到最后剩下的一个元素放在第n个位置上，只有 1 种取法. 于是

$$\mathrm{P}_n=n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1=n!.$$

显然，在n级排列中，除标准排列$12\cdots n$是按自然顺序（即由小到大的顺序）排列的以外，其余的n级排列都或多或少地破坏了自然顺序，例如，在 3 级排列 312 中，3 比 1 和 2

都大，但 3 排在 1 和 2 的前面.

通常，标准排列 $12\cdots n$ 也称为**自然排列**.

在一个排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，那么它们就称为一个**逆序**. 一个排列中逆序的总数就称为这个排列的**逆序数**，记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

设 $i_1i_2\cdots i_n$ 为一个 n 级排列，可以按照下列两种方法求 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

（1）先求出排在 1 前面的数码的个数，不妨设为 t_1，则有 t_1 个数码与 1 构成逆序； 然后求出排在 2 的前面且比 2 大的数码的个数，不妨设为 t_2，则有 t_2 个数码与 2 构成逆序；如此继续下去，最后求出排在 $n-1$ 的前面且比 $n-1$ 大的数码的个数，不妨设为 t_{n-1},则有 t_{n-1} 个数码与 $n-1$ 构成逆序，则

$$\tau(i_1i_2\cdots i_n)=\sum_{k=1}^{n-1}t_k .$$

（2）由于 $i_1i_2\cdots i_n$ 是 n 个自然数的一个排列，考虑元素 i_k， $k=1,2,\cdots,n$，如果比 i_k 大的且排在 i_k 前面的元素有 t_k 个，就说 i_k 这个元素的逆序数是 t_k. 全体元素的逆序数总和

$$\tau(i_1i_2\cdots i_n)=t_1+\cdots+t_n=\sum_{k=1}^{n}t_k \triangleq t .$$

显然，从计算机编程的角度考虑，方法（2）更容易实现.

例 1.1.1 求 $\tau(346521)$.

解 （1）由于在 6 级排列 346521 中，与 1 构成逆序的数码个数 $t_1=5$，与 2 构成逆序的数码个数 $t_2=4$，与 3 构成逆序的数码个数 $t_3=0$，与 4 构成逆序的数码个数 $t_4=0$，与 5 构成逆序的数码个数 $t_5=1$，因此，

$$\tau(346521)=\sum_{i=1}^{5}t_i=5+4+0+0+1=10 .$$

（2）$\tau(346521)=\sum_{i=1}^{6}t_i=0+0+0+1+4+5=10$.

对方法（2），MATLAB 实现如下：

```
x=[3 4 6 5 2 1];t=0;y=[];
n=length(x);                    % 数据 x 的长度
for i=1:1:n
    y(i)=length(find(x([1:i])>x(i)));
end
y                               % y(i)是 x(i)的逆序数
t=sum(y)                        % t 表示排列 x 的逆序数
```

运行结果如下：

```
y =
     0     0     0     1     4     5
t =
    10
```

例 1.1.2 求 n 级排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数.

解 由于在 n 级排列 $n(n-1)\cdots 21$ 中与 k ($k=1,2,\cdots,n$)构成逆序的数码个数 $t_k=n-k$，因此有：

$$\tau(n(n-1)\cdots 21)=\sum_{k=1}^{n-1}t_k=\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

例 1.1.3 求 3 级排列中所有的排列的逆序数.

解 由逆序定义可知

$$\tau(123)=0+0=0，\quad \tau(132)=0+1=1，$$
$$\tau(213)=1+0=1，\quad \tau(231)=2+0=2，$$
$$\tau(312)=1+1=2，\quad \tau(321)=2+1=3.$$

逆序数为偶数的排列称为**偶排列**；逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

由例 1.1.3 知，在 3 级排列中，有三个偶排列，即 123，231，312；有三个奇排列，即 132，213，321.

定义 1.1.3 在一个排列中，如果把某两个数码的位置互换，而其余的数码不动，就得到一个新的排列. 这样一个变换称为一个**对换**. 相邻数码的对换称为**相邻对换**.

比如，3 级排列 231 是偶排列，经过 1，2 两数码的对换，就可得到排列 132，此排列是奇排列；3 级排列 321 是奇排列，经过 1，3 两数码的对换，就可得到排列 123，此排列是偶排列.

定理 1.1.1 对换改变排列的奇偶性.

证明* 先证相邻对换的情形.

不妨设排列为 $a_1a_2\cdots a_l abb_1b_2\cdots b_m$，对换 a 与 b，可得到新排列

$$a_1a_2\cdots a_l bab_1b_2\cdots b_m.$$

很显然，对换 a 与 b，并不改变数码 $a_1,a_2,\cdots,a_l;b_1,b_2,\cdots,b_m$ 的逆序数，而只改变了 a 与 b 的逆序数：当 $a<b$ 时，经对换后，a 的逆序数增加 1，而 b 的逆序数不变； 当 $a>b$ 时，经对换后，a 的逆序数不变，而 b 的逆序数减少 1，即有

$$\tau(a_1a_2\cdots a_l bab_1b_2\cdots b_m)=\tau(a_1a_2\cdots a_l bab_1b_2\cdots b_m)\pm 1，$$

由此可得，排列 $a_1a_2\cdots a_l abb_1b_2\cdots b_m$ 与 $a_1a_2\cdots a_l bab_1b_2\cdots b_m$ 的奇偶性不同.

再证一般对换的情形.

不妨设排列为 $a_1a_2\cdots a_l ab_1b_2\cdots b_m bc_1\cdots c_n$，对其作 m 次相邻对换，变成

$$a_1a_2\cdots a_l abb_1b_2\cdots b_m c_1\cdots c_n，$$

再对此排列作 $m+1$ 次相邻对换可得新排列

$$a_1a_2\cdots a_l bb_1b_2\cdots b_m ac_1\cdots c_n，$$

即从排列 $a_1a_2\cdots a_l ab_1b_2\cdots b_m bc_1\cdots c_n$ 变成排列 $a_1a_2\cdots a_l bb_1b_2\cdots b_m ac_1\cdots c_n$ 经过了 $2m+1$ 次相邻数码的对换，因此，由相邻对换改变排列的奇偶性可得这两个排列的奇偶性不同.

由定理 1.1.1 知排列奇偶性的变化与对换次数有关，即若对换次数为偶数，则排列的奇偶性不变；若对换次数为奇数，则排列的奇偶性改变. 由此可得下列推论.

推论 1　奇排列变成偶排列的对换次数为奇数；而奇排列变成奇排列的对换次数为偶数.

推论 2　在全部 n 级排列中，奇、偶排列的个数相等，各有 $\frac{n!}{2}$ 个.

证明　设在全部 n 级排列中，奇、偶排列的个数分别为 p 和 q，若对 p 个奇排列施行一次相同的对换，则由定理 1.1.1 知，得到 p 个不同的偶排列，由于偶排列的总个数为 q，因此有 $p \leqslant q$.

同理可得，$q \leqslant p$，从而 $p = q = \frac{n!}{2}$

1.1.2　行列式概念

我们先从解二元和三元线性方程组引入二阶和三阶行列式的概念及其计算法则.

用消元法解二元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}. \tag{1.1.1}$$

用加减消元法可得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2 \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21} \end{cases}.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组(1.1.1)有唯一解，即

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}，\ x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.1.2}$$

这里，称代数式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 为**二阶行列式**，用符号表示为

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

其中，数 a_{ij} 称为行列式的**元素**，横排的称为**行**，竖排的称为**列**. a_{ij} 的两个下标表示该元素在行列式中的位置，第一个下标 i 称为**行标**，表示该元素所在的行，第二个下标 j 称为**列标**，表示该元素所在的列，常称 a_{ij} 为行列式的 (i, j) 元素. 而称

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

为二元线性方程组（1.1.1）的**系数行列式**.

由二阶行列式的定义，（1.1.2）式可用二阶行列式叙述为:

当方程组（1.1.1）的系数行列式 $D \neq 0$ 时，该方程组有唯一解，即

$$x_1 = \frac{D_1}{D}，\ x_1 = \frac{D_2}{D}.$$

其中 $D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$.

注意，这里的分母 D 是方程组（1.1.1）的系数所确定的二阶行列式（系数行列式），x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1,b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11},a_{21} 所得的二阶行列式，x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1,b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12},a_{22} 所得的二阶行列式.

类似地，对三元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}, \tag{1.1.3}$$

称代数式

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

为三阶行列式，也称为三级行列式，用符号表示为

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

显然，我们可以验证：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

这个结论很重要，即**行列式按行展开公式**，它的一般形式会在后面给出.

当方程组（1.1.3）的系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$ 时，该方程组有唯一解，即

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D},$$

其中 $D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$，$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$.

行列式中从左上角到右下角的对角线称**为主对角线**，从右上角到左下角的对角线称为**副对角线**. 三阶行列式的展开式可用对角线法得到. 三阶行列式的**对角线法则**，如图 1.1.1 所示.

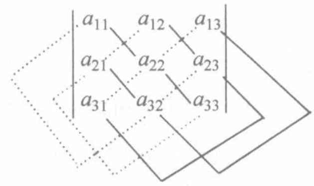

图 1.1.1

其中三条实线看作平行于主对角线的连线，三条虚线看作平行于副对角线的连线，每一条实线上的三个元素的乘积带正号，每一条虚线上的三个元素的乘积带负号，所得六项的代数和就是三级行列式的展开式.

例 1.1.4　计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$.

解　由行列式的定义可知

$$\begin{aligned} D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix} &= 1\times\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 2\times\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} - 4\times\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 1\times[2\times(-2)-1\times4]-2\times[(-2)\times(-2)-1\times(-3)]-4\times[(-2)\times4-2\times(-3)] \\ &= -8-14+8=-14. \end{aligned}$$

MATLAB 实现如下：

```
D=[1 2 -4;-2 2 1;-3 4 -2];
det(D)                          % 行列式 D 的值
```

运行结果如下：

```
ans =
   -14
```

例 1.1.5　利用对角线法则计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.

解　由对角线法则，得

$$D=acb+bac+bac-c^3-b^3-a^3=3abc-a^3-b^3-c^3.$$

从二阶和三阶行列式的定义可以看出，二阶和三阶行列式有以下特点:

（1）二阶行列式和三阶行列式分别是 2! 和 3! 项的代数和；

（2）每一项分别是取自不同行不同列的 2 个和 3 个元素的乘积；

（3）每一项都带有符号，且一半带有正号，一半带有负号. 当行标构成的排列是标准排列时，这一项的符号是由其列标构成的排列的奇偶性决定的，即当列标构成的排列是奇排列时，这一项带有负号；而当列标构成的排列是偶排列时，这一项带有正号.

总之，二阶和三阶行列式可分别表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2} (-1)^{\tau(j_1 j_2)} a_{1j_1} a_{2j_2} ,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} ,$$

其中$\sum\limits_{j_1 j_2}$和$\sum\limits_{j_1 j_2 j_3}$分别表示对所有 2 级和 3 级排列求和.

下面把二阶和三阶行列式推广到n阶行列式.

定义 1.1.4 称$n!$项的代数和

$$\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

为 ***n* 阶行列式**，也称为 ***n* 级行列式**，简记为$\det(a_{ij})$，其中数a_{ij}为行列式D的(i,j)元素. 用符号表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} ,$$

这里$j_1 j_2 \cdots j_n$是$12\cdots n$的一个排列，$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$是取自不同行不同列的$n$个元素的乘积，且$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$按下列规则带有符号：当$j_1 j_2 \cdots j_n$是偶排列时，带有正号；当$j_1 j_2 \cdots j_n$是奇排列时，带有负号.

当$n=1$时，一阶行列式就是数$|a_{11}| = a_{11}$. 注意，不要与绝对值记号相混淆.

一般地，在定义 1.1.4 中，n阶行列式中的项可写成$a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$，利用排列的性质，不难证明$a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$的符号为$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}$. 于是$n$阶行列式的等价定义为：

定义 1.1.5*
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_n \\ j_1 j_2 \cdots j_n}} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n} ,$$

这里$\sum\limits_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_n \\ j_1 j_2 \cdots j_n}}$表示对所有$n$阶排列求和.

定义 1.1.6*
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} ,$$

这里$\sum\limits_{i_1 i_2 \cdots i_n}$表示对所有$n$阶排列求和.

显然，定义 1.1.4 和定义 1.1.6 可以看作定义 1.1.5 的特殊情形.

例 1.1.6 设$a_{1i} a_{23} a_{35} a_{4j} a_{54} a_{6k}$为 6 阶行列式中带正号的项，求$i,j,k$的值.

解 在项 $a_{1i}a_{23}a_{35}a_{4j}a_{54}a_{6k}$ 中，行标构成的排列为标准排列，列标构成的排列为 $i35j4k$，且 i,j,k 的可能取值有下面六种情况

$$i=1,j=2,k=6;\quad i=1,j=6,k=2;\quad i=2,j=1,k=6;$$
$$i=2,j=6,k=1;\quad i=6,j=1,k=2;\quad i=6,j=2,k=1.$$

又因为项 $a_{1i}a_{23}a_{35}a_{4j}a_{54}a_{6k}$ 在 6 级行列式中带正号，且

$$\tau(135246)=3,\tau(235641)=7,\tau(635142)=11,$$
$$\tau(135642)=6,\tau(235146)=4,\tau(635241)=12,$$

所以 i,j,k 的取值为

$$i=1,j=6,k=2;\quad i=2,j=1,k=6;\quad i=6,j=2,k=1.$$

例 1.1.7 在四阶行列式 D 中，

（1）项 $a_{31}a_{24}a_{43}a_{12}$ 前面应取的正负号是什么？

（2）乘积 $a_{31}a_{21}a_{42}a_{23}$ 是否是行列式 D 中的项？

解 （1）适当交换所给项中元素的次序，使得它们的行标按顺序排列，得到

$$a_{31}a_{24}a_{43}a_{12}=a_{12}a_{24}a_{31}a_{43},$$

这时，相应列标排列逆序数 $\tau(2413)=3$ 是奇数，因而项 $a_{31}a_{24}a_{43}a_{12}$ 前面应取负号.

（2）在乘积 $a_{31}a_{21}a_{42}a_{23}$ 中，元素 a_{21} 和 a_{23} 的行标都是 2，说明这两个元素皆来自第 2 行，所以乘积 $a_{31}a_{21}a_{42}a_{23}$ 不是行列式 D 中的项.

例 1.1.8 证明下面两个等式：

（1）**右上（左下）三角形行列式**（主对角线下面（上面）的元素全为零的行列式）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii};$$

（2）**左上（右下）三角形行列式**（副对角线下面（上面）的元素全为零的行列式）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

分析 （1）中的行列式中，主对角线下面（上面）的元素全为零，而（2）中的行列式中，副对角线下面（上面）的元素全为零，因此，在它们的展开式中有一些项为零，只需求出不为零的项即可.

证明 （1）由于当 $i<j$ 时，$a_{ij}=0$，因此，此行列式中可能不为 0 的元素为

$$a_{p_j j},p_j\leqslant j,\ j=1,2,\cdots,n.$$

而在所有 n 级排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中满足条件 $p_j \leqslant j(j=1,2,\cdots,n)$ 的排列只有一个标准排列 $12\cdots n$，从而此行列式展开式中不为零的项只有一项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，此项的符号为正. 由此得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} .$$

类似地，可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} .$$

（2）由于在此行列式中，第 n 行的元素除 a_{n1} 外，其余的都为零，因此，在此行列式的展开式中，只需考虑 $j_n=1$ 的项.

而在第 $n-1$ 行中，除 $a_{n-1,1},a_{n-1,2}$ 外，其余的元素都为零，因此，$j_{n-1}=1$ 或 $j_{n-1}=2$. 又因为 $j_n=1$，所以，$j_{n-1}=2$. 依次这样下去，在此行列式的展开式中，除 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$ 外，其余的项全为零，又 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$ 的符号 $(-1)^{t(n(n-1)\cdots 21)}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$，于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1} .$$

类似地，可得

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1} .$$

特别地，

主对角形行列式(主对角线以外的元素全为零的行列式)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} .$$

副对角形行列式（副对角线以外的元素全为零的行列式）

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

三角形行列式为常用的特殊行列式，其计算方便，应用广泛.

1.2 行列式的性质

尽管在行列式的定义中给出了计算行列式的具体方法，但其计算量是很大的，对于一般的高阶（$n \geqslant 4$）行列式，直接利用定义计算会很困难或几乎不可能. 例如，计算一个 20 阶行列式，需作 $19 \times 20!$ 次乘法，用每秒运算亿万次的计算机，也需要计算一千年才行. 虽然 MATLAB 软件很容易求出数值型行列式的值，但若行列式的元素都是字母时，用 MATLAB 软件求解也可能很不方便. 因此，非常有必要研究行列式的性质，揭示 n 阶行列式的运算规律，进而简化其计算，而且这对行列式的理论研究也很重要. 记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

行列式 D^{T} 称为行列式 D 的**转置行列式**，即将行列式 D 的行与列互换后得到的行列式就是转置行列式.

性质 1 行列式与它的转置行列式相等.

证明* 记 $D = \det(a_{ij})$ 的转置行列式为

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

即 D^{T} 的 (i,j) 元为 b_{ij}，则 $b_{ij} = a_{ji}$， $i,j = 1,2,\cdots,n$. 按定义

$$D^{\mathrm{T}} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{nj_n} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n} = D.$$

由此性质可知，行列式中的行和列具有同等的地位，即行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立，反之亦然.

性质 2 互换行列式的两行（列），行列式变号.

证明* 设行列式