Lecture Notes on Exercise Class in Mathematical Analysis

数学分析习题课讲义 1

李傅山　王培合　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

Lecture Notes on Exercise Class in Mathematical Analysis

数学分析习题课讲义 1

李傅山　王培合　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目 (CIP) 数据

数学分析习题课讲义. 1 / 李傅山, 王培合编著. —北京: 北京大学出版社, 2018. 9

ISBN 978-7-301-29333-1

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①李… ②王… Ⅲ. ①数学分析 - 高等学校 - 教学参考资料 Ⅳ. ① O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 036944 号

书　　名 数学分析习题课讲义 1
SHUXUE FENXI XITIKE JIANGYI 1

著作责任者 李傅山　王培合　编著

责任编辑 尹照原

标准书号 ISBN 978-7-301-29333-1

出版发行 北京大学出版社

地　　址 北京市海淀区成府路 205 号　100871

网　　址 http://www.pup.cn　新浪微博: @ 北京大学出版社

电子信箱 zpup@pup.cn

电　　话 邮购部 010-62752015　发行部 010-62750672　编辑部 010-62762021

印 刷 者 北京大学印刷厂

经 销 者 新华书店

890 毫米 × 1240 毫米　A5　8 印张　215 千字

2018 年 9 月第 1 版　2018 年 9 月第 1 次印刷

定　　价 28.00 元

内 容 简 介

本书是与华东师范大学数学系编写的教材《数学分析（第四版）》配套的学习辅导书，内容安排上与教材相一致，是在作者近二十年讲授“数学分析”课程和参与考研辅导以及全国大学生数学竞赛辅导所积累的大量教学资料的基础上多次修订而成的. 本书共分三册，按节进行编写，每节先梳理知识结构，再按照题目的类型和难度对教材中的习题进行重新编排并给予详细解答. 很多题目提供了多种解法并加以分析和备注，有利于学生理解数学知识蕴涵的数学思想，建构知识的内在联系. 本书还选取了一些教材之外的有代表性的习题，以拓宽知识面，也有利于夯实学习后续专业课的基础.

本书可供高等院校数学各专业学生学习“数学分析”课程使用，也可作为考研学生的复习资料，还可作为“数学分析”课程教师的参考书.

作 者 简 介

李傅山　曲阜师范大学数学科学学院教授，研究生导师．2005年于复旦大学获理学博士学位．主要研究方向是偏微分方程及其应用．主持多项国家级、省部级科研课题；在*Journal of Differential Equations*，*Nonlinear Analysis：Real World Applications*等国际权威期刊发表论文多篇．长期讲授"数学分析""偏微分方程"等课程，主讲数学类专业的考研辅导课和全国大学生数学竞赛辅导课．出版了著作《数学分析中的问题与方法》；主持省级教学改革项目，并于2014年获省级教学成果二等奖．

王培合　曲阜师范大学数学科学学院教授，研究生导师．2003年于华东师范大学获理学博士学位．主要研究方向是几何分析．主持国家自然科学基金等多项国家级、省部级科研课题；在*Journal of Functional Analysis*，*Journal of Differential Equations*等国际权威期刊发表论文多篇．长期讲授"解析几何""微分几何"等课程，并参与全国大学生数学竞赛辅导工作．承担省级教学改革项目，并于2014年获省级教学成果二等奖．

前　言

“数学分析” 是高等院校数学各专业最重要的一门基础课程. 它是数学各专业学生学习后续专业课程的基础, 也是数学各专业研究生入学考试的必考科目. 华东师范大学数学系编写的《数学分析 (第四版)》是国内 “数学分析” 课程使用最广的教材之一. 本书是与该教材配套的学习辅导书, 可满足高等院校数学各专业学生学习、复习和提高之用, 对该课程教师的教学也有一定的参考价值.

在编写本书时, 我们突出了以下几点:

第一, 按节编写, 简明归纳每节的主要内容, 对理论性较强的部分章节编写了知识结构图.

第二, 对每节的习题按照题目的类型和难度进行重新梳理、归类、排序, 努力使得课后习题的编排更系统、更有条理, 对少部分难度较大的习题标注上星号 “*”.

第三, 书中许多题目都给出了多种解法, 有的解法是同类书中所没有的, 便于学生举一反三, 触类旁通.

第四, 在习题解答后面给出分析和备注, 引导学生深刻思考, 梳理并理解问题的本质, 并建构前后知识的内在联系.

第五, 部分章节后面增加了适量的教材之外的习题, 以便初学者适当扩大知识面, 提高解决问题的能力. 对这类题目建议读者先审题思考, 自己写出解答过程, 再参考本书的解答和备注进行比较、归纳和总结, 以达到 “学习 — 消化 — 转化 — 创新” 的目的.

与华东师范大学数学系编写的《数学分析 (第四版)》配套的学习指导书有很多版本, 为学生学习该课程提供了很大的帮助和指导. 在教学实践中, 我们发现某些版本省略或回避了部分有难度的习题的解答, 个别题目解法单一或者不自然, 有些题目缺乏必

要的从数学思想高度上的分析和备注. 所有这些现象, 促使我们编写了此套 “数学分析” 学习辅导书. 本书是李傅山教授在近二十年讲授 “数学分析” 课程和参与考研辅导以及全国大学生数学竞赛辅导所积累的大量教学资料的基础上撰写而成的. 王培合教授对本书做了试用并参与了书稿的修改, 增加了部分问题的新解法. 在本书编写过程中, 得到了曲阜师范大学数学科学学院领导和同事们的大力支持和关心. 本书的出版还得到了曲阜师范大学教材建设基金的资助. 另外, 王前、许文秀、尹清等同学帮助校对了书稿内容. 在此, 一并表示衷心感谢.

限于作者的水平有限, 书中的不足之处在所难免, 恳请读者提出宝贵意见.

编者

2018 年7 月

目　　录

第一章　实数集与函数

§ 1.1　实　　数

内容要求　掌握实数集和有理数集对四则运算封闭, 无理数集对四则运算不封闭; 理解实数无限表示的意义和方法; 掌握实数过剩近似和不足近似的表示方法及应用; 掌握实数的稠密性; 掌握绝对值的几何意义及性质.

深刻理解反证法: 命题和其逆否命题是等价的, 即命题 “$A \Rightarrow B$” 等价于命题 “$\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$”, 逆否命题的直接证法就是原命题的反证法.

例 1-1-1　设 a 为有理数, x 为无理数, 证明:

(1) $a+x$ 是无理数;　(2) 当 $a \neq 0$ 时, ax 是无理数.

证　(1) 反证法. 假设 $a+x$ 是有理数, 则由有理数集对减法封闭知 $x=(x+a)-a$ 为有理数, 这与题设 “x 为无理数” 矛盾, 故 $a+x$ 是无理数.

(2) 假设 ax 是有理数, 则由有理数集对除法封闭知 $x=\dfrac{ax}{a}$ 是有理数, 这与题设 “x 为无理数” 矛盾, 故 ax 是无理数.

例 1-1-2　设 $a, b \in \mathbb{R}$, 证明: 若对 $\forall \varepsilon>0$ 有 $|a-b|<\varepsilon$, 则 $a=b$.

证　反证法. 假设 $a \neq b$, 不妨设 $a>b$, 取 $\varepsilon_0=\dfrac{a-b}{2}$, 则 $|a-b|>\varepsilon_0$, 这与题设 “对 $\forall \varepsilon>0$ 有 $|a-b|<\varepsilon$” 矛盾, 故 $a=b$.

例 1-1-3　设 $p \in \mathbb{Z}^+$, 证明: 若 p 不是完全平方数, 则 $\sqrt{p}$ 是无理数.

证　用反证法. 假设 $\sqrt{p}$ 为有理数, 则 $\exists m, n \in \mathbb{N}^+$ 使得 $\sqrt{p}=\dfrac{m}{n}$, 其中 $(m, n)=1$, 即 m, n 互质. 于是 $n^2 p=m^2$, 即 $n(np)=m^2$, 所以 $n \mid m^2$.

由于 $(m,n)=1$, 所以 $\exists u,v\in\mathbb{Z}$ 使得 $mu+nv=1$, 从而 $m^2u+mnv=m$, 结合 $n|m^2$ 知 $n|m$, 再结合 $(m,n)=1$ 知 $n=1$, 从而 $p=m^2$. 这与 "p 不是完全平方数" 矛盾.

例 1-1-4 任意两个实数之间一定存在无理数.

证 对 $\forall a,b\in\mathbb{R}$, 不妨设 $a<b$, 由两个实数之间一定存在有理数知 $\exists r\in\mathbb{Q},r\neq 0$ 使得 $\pi a<r<\pi b\Rightarrow a<\dfrac{r}{\pi}<b$, 则 $\dfrac{r}{\pi}$ 为 a,b 之间的无理数.

例 1-1-5 设 $x>0,b>0,a\neq b$, 证明: $\dfrac{a+x}{b+x}$ 介于 1 与 $\dfrac{a}{b}$ 之间.

证 由

$$1-\frac{a+x}{b+x}=\frac{b-a}{b+x},\quad \frac{a}{b}-\frac{a+x}{b+x}=\frac{(a-b)x}{b(b+x)}$$

及 $x>0,b>0,a\neq b$ 知: 当 $a>b$ 时,

$$1<\frac{a+x}{b+x}<\frac{a}{b};$$

当 $a<b$ 时,

$$\frac{a}{b}<\frac{a+x}{b+x}<1.$$

所以 $\dfrac{a+x}{b+x}$ 介于 1 与 $\dfrac{a}{b}$ 之间.

例 1-1-6 证明: 对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 有:

(1) $|x-1|+|x-2|\geqslant 1$; (2) $|x-1|+|x-2|+|x-3|\geqslant 2$.

证 (1) **法一** 由于 $\mathbb{R}=(-\infty,1]\cup(1,2)\cup[2,+\infty)$, 由绝对值的几何意义知:

当 $x\in(-\infty,1]$ 时, $|x-1|+|x-2|=(1-x)+(2-x)=3-2x\geqslant 1$;

当 $x\in(1,2)$ 时, $|x-1|+|x-2|=(x-1)+(2-x)=1$;

当 $x\in[2,+\infty)$ 时, $|x-1|+|x-2|=(x-1)+(x-2)=2x-3\geqslant 1$.

所以对 $\forall x\in\mathbb{R}$ 有 $|x-1|+|x-2|\geqslant 1$.

法二 由于 $1=(x-1)-(x-2)$, 由绝对值不等式得 $1=|(x-1)-(x-2)|\leqslant|x-1|+|x-2|$.

(2) **法一** 由于 $\mathbb{R}=(-\infty,1]\cup(1,2]\cup(2,3]\cup(3,+\infty)$, 由绝对值的几何意义知:

当 $x\in(-\infty,1]$ 时,

$$\begin{aligned}|x-1|+|x-2|+|x-3|&=(1-x)+(2-x)+(3-x)\\&=6-3x\geqslant 3;\end{aligned}$$

当 $x\in(1,2]$ 时,

$$\begin{aligned}|x-1|+|x-2|+|x-3|&=(x-1)+(2-x)+(3-x)\\&=4-x\geqslant 2;\end{aligned}$$

当 $x\in[2,3)$ 时,

$$\begin{aligned}|x-1|+|x-2|+|x-3|&=(x-1)+(x-2)+(3-x)\\&=x\geqslant 2;\end{aligned}$$

当 $x\in[3,+\infty)$ 时,

$$\begin{aligned}|x-1|+|x-2|+|x-3|&=(x-1)+(x-2)+(x-3)\\&=3x-6\geqslant 3.\end{aligned}$$

所以对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 有

$$|x-1|+|x-2|+|x-3|\geqslant 2.$$

法二 由于 $2=(3-x)+(x-1)$, 由绝对值不等式得

$$\begin{aligned}2&=|(3-x)+(x-1)|\leqslant|x-3|+|x-1|\\&\leqslant|x-1|+|x-2|+|x-3|.\end{aligned}$$

例 1-1-7 设 $a,b,c\in\mathbb{R}^+$, 证明:

$$|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}|\leqslant|b-c|.$$

证 建立坐标系, 如图 1.1 所示.

当 $b=c$ 时, 显然成立;

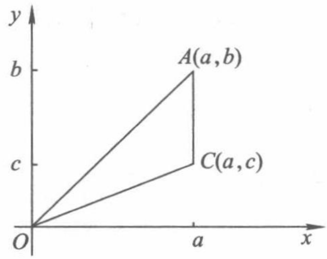

图 1.1

当 $b \neq c$ 时, 在 $\triangle_{OAC}$ 中, $|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{a^2+b^2}$, $|\overrightarrow{OC}| = \sqrt{a^2+c^2}$, $|\overrightarrow{AC}| = |b-c|$. 由绝对值的几何意义及三角形两边之差小于第三边, 有 $|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}| \leqslant |b-c|$.

例 1-1-8 设 $x \neq 0$, 试证 $\left|x+\dfrac{1}{x}\right| \geqslant 2$, 并说明等号何时成立?

证 由于 x 与 $\dfrac{1}{x}$ 同号, 因此

$$\left|x+\frac{1}{x}\right| = |x| + \left|\frac{1}{x}\right| \geqslant 2\sqrt{|x| \cdot \left|\frac{1}{x}\right|} = 2.$$

等号成立的充要条件是

$$x = \frac{1}{x} \Longleftrightarrow x = \pm 1.$$

例 1-1-9 求下列不等式的解集:

(1) $x(x^2-1) > 0$; (2) $|x-1| < |x-3|$;

(3) $\sqrt{x-1} - \sqrt{2x-1} \geqslant \sqrt{3x-2}$.

解 (1) 由不等式得

$$\begin{cases} x > 0, \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x < 0, \\ x^2 - 1 < 0, \end{cases}$$

由此可得不等式得解集为 $(-1,0) \cup (1,+\infty)$, 如图 1.2 所示.

(2) 由绝对值的几何意义知 $|x-1| < |x-3|$ 的解集为到 1 的距离小于到 3 的距离的点的集合, 即所求点集为 $\{x|x<2\}$, 如图 1.3 所示.

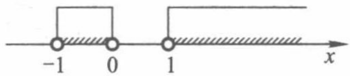

图 1.2

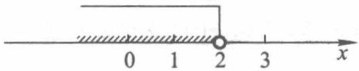

图 1.3

(3) 不等式 $\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}\geqslant\sqrt{3x-2}$ 左右两边有意义点的集合为 $\{x|x\geqslant 1\}$, 此时 $\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}<0$, $\sqrt{3x-2}\geqslant 1$, 因此不等式的解集为空集 $\varnothing$.

例 1-1-10 设 a,b 为给定实数, 试用不等式 (不用绝对值符号) 表示下面不等式的解集:

(1) $|x-a|<|x-b|$; (2) $|x-a|<x-b$; (3) $|x^2-a|<b$.

解 (1) **法一** 由绝对值的几何意义知:

当 $a<b$ 时, 不等式的解集为 $\left\{x\middle|x<\dfrac{b+a}{2}\right\}$;

当 $a>b$ 时, 不等式的解集为 $\left\{x\middle|x>\dfrac{b+a}{2}\right\}$;

当 $a=b$ 时, 不等式的解集为空集 $\varnothing$.

法二 由

$$\begin{aligned}|x-a|<|x-b| &\Longleftrightarrow (x-a)^2<(x-b)^2\\ &\Longleftrightarrow (a-b)x>\frac{a^2-b^2}{2},\end{aligned}$$

可知:

当 $a<b$ 时, 不等式的解集为 $\left\{x\middle|x<\dfrac{b+a}{2}\right\}$;

当 $a>b$ 时, 不等式的解集为 $\left\{x\middle|x>\dfrac{b+a}{2}\right\}$;

当 $a=b$ 时, 不等式的解集为空集 $\varnothing$.

(2) 由绝对值的几何意义可知:

当 $a\leqslant b$ 时, 不等式 $|x-a|<x-b$ 的解集为空集 $\varnothing$;

当 $a > b$ 时, 不等式 $|x-a| < x-b$ 的解集为 $\left\{x \middle| x > \dfrac{a+b}{2}\right\}$.

思考 对不等式两边平方是否能直接平方求解?

(3) 当 $b \leqslant 0$ 时, 显然不等式解集为空集 $\varnothing$.

当 $b > 0$ 时, 由不等式的性质知原不等式等价于 $a-b < x^2 < b+a$, 故:

当 $a-b \geqslant 0$, 即 $a \geqslant b > 0$ 时, 不等式的解集为 $\{x \mid \sqrt{a-b} < |x| < \sqrt{a+b}\}$;

当 $a-b<0$ 且 $a+b \geqslant 0$ 时, 即 $-b \leqslant a < b$ 时不等式的解集为 $\{x \mid |x| < \sqrt{a+b}\}$;

当 $a+b<0$, 即 $a<-b$ 时, 不等式的解集为空集 $\varnothing$.

注 要学会寻找求解不等式分类讨论的突破口.

§ 1.2 数集、确界原理

内容要求 掌握实数集的上、下界的数学语言的肯定叙述和否定叙述; 牢固掌握确界概念、直观描述及应用; 掌握上、下确界和最值关系、理解确界原理的证明思路.

例 1-2-1 设 S 为非空数集, 试对下列概念给出定义:

(1) S 无上界; (2) S 无下界; (3) S 无界.

解 (1) 若对 $\forall M>0$, $\exists x_0 \in S$, 使得 $x_0 > M$, 则称 S 无上界.

(2) 若对 $\forall L<0$, $\exists x_0 \in S$, 使得 $x_0 < L$, 则称 S 无下界. 也可以叙述为: 若对 $\forall L>0$, $\exists x_0 \in S$, 使得 $x_0 < -L$, 则称 S 无下界.

(3) 若对 $\forall M>0$, $\exists x_0 \in S$, 使得 $|x_0| > M$, 则称 S 无界.

注 概念或命题的否定叙述是在肯定的基础上把 "$\forall$ 改为 $\exists$, $\exists$ 改为 $\forall$, 且次序不变".

例 1-2-2 设 S 为非空有下界数集, 证明: $\inf S = \xi \in S \Longleftrightarrow \xi = \min S$.

证 $(\Rightarrow)$ 设 $\inf S = \xi \in S$, 则对 $\forall x \in S$, 有 $x \geqslant \xi$, 而 $\xi \in S$, 故 ξ 是数集 S 中的最小值, 即 $\xi = \min S$.

$(\Leftarrow)$ 设 $\xi = \min S$, 则 $\xi \in S$. 下证 $\xi = \inf S$, 事实上

对 $\forall x \in S$, 有 $x \geqslant \xi$, 即 ξ 是 S 的下界;

对 $\forall \beta > \xi, \exists x_0 = \xi \in S$, 使得 $x_0 < \beta$. (可等价叙述为对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0 = \xi \in S$, 使得 $x_0 < \xi + \varepsilon$.)

由下确界的定义可知 $\xi = \inf S$.

例 1-2-3 设 S 为非空数集, 定义 $S^- = \{x | -x \in S\}$. 证明:

(1) $\inf S^- = -\sup S$; (2) $\sup S^- = -\inf S$.

证 (1) 设 $\eta = \sup S$, 下证 $\inf S^- = -\eta$. 事实上, 由上确界 $\eta = \sup S$ 定义得对 $\forall x \in S$, 有 $x \leqslant \eta$; 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in S$ 使得 $x_0 > \eta - \varepsilon$. 从而对 $\forall y \in S^-, x := -y \in S$, 由于 $x \leqslant \eta$, 则 $y \geqslant -\eta$; 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists y_0 := -x_0 \in S^-$, 使得 $y_0 := -x_0 < -\eta + \varepsilon$.

再由下确界定义可知 $\inf S^- = -\eta$, 即 $\inf S^- = -\sup S$.

(2) 设 $\xi = \inf S$, 下证 $\sup S^- = -\xi$. 事实上, 由下确界 $\xi = \inf S$ 定义得对 $\forall x \in S$, 有 $x \geqslant \xi$; 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in S$ 使得 $x_0 < \xi + \varepsilon$. 从而对 $\forall y \in S^-, x := -y \in S$, 由 $x \geqslant \xi$, 可知 $y \leqslant -\xi$; 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists y_0 := -x_0 \in S^-$ 使得 $y_0 := -x_0 > -\xi - \varepsilon$.

再由上确界定义可知 $\sup S^- = -\xi$, 即 $\sup S^- = -\inf S$.

注 上述结果揭示了上、下确界之间的关系, 因此可以将下确界的问题转化为上确界讨论.

例 1-2-4 设 A, B 为非空有界数集, 定义数集

$$A + B = \{z | z = x + y, x \in A, y \in B\}.$$

证明: (1) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$; (2) $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

证 (1) 因为 A, B 为非空有界数集, 由确界存在原理知 $\sup A$ 和 $\sup B$ 都存在. 对 $\forall z \in A + B$, 由 $A + B$ 定义知 $\exists x \in A, y \in B$, 使得 $z = x + y$. 由于 $x \leqslant \sup A, y \leqslant \sup B$, 故 $z = x + y \leqslant \sup A + \sup B$, 即 $\sup A + \sup B$ 是数集 $A + B$ 的一个上界.

由上确界的定义, 对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0 \in A$, 使得 $x_0 > \sup A - \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\exists y_0 \in B$, 使得 $y_0 > \sup B - \dfrac{\varepsilon}{2}$, 即 $\exists z_0 = x_0 + y_0 \in A + B$, 使得 $z_0 = x_0 + y_0 > \sup A + \sup B - \varepsilon$. 由此可知 $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

(2) 因为 A, B 为非空有界数集, 由确界存在原理知 $\inf A$ 和 $\inf B$ 都存在. 对 $\forall z \in A + B$, 由 $A + B$ 定义知 $\exists x \in A, y \in B$, 使得

$z=x+y$. 由于 $x\geqslant\inf A$, $y\geqslant\inf B$, 故 $z=x+y\geqslant\inf A+\inf B$, 即 $\inf A+\inf B$ 是数集 $A+B$ 的一个下界.

由下确界的定义, 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists x_0\in A$, 使得 $x_0<\inf A+\dfrac{\varepsilon}{2}$, $\exists y_0\in B$, 使得 $y_0<\inf B+\dfrac{\varepsilon}{2}$, 即 $\exists z_0=x_0+y_0\in A+B$, 使得 $z_0=x_0+y_0<\inf A+\inf B+\varepsilon$. 由此可知 $\inf(A+B)=\inf A+\inf B$.

例 1-2-5 试证明数集 $S=\{y|y=2-x^2,x\in R\}$ 有上界而无下界.

证 $\forall y\in S$, 有 $y=2-x^2\leqslant 2$, 故 2 是 S 的一个上界. 而对 $\forall M>0$, 取 $x_0=\sqrt{4+M}$, $y_0=2-x_0^2=-2-M\in S$, 但 $y_0<-M$. 故数集 S 无下界.

例 1-2-6 求下列数集的上、下确界, 并依定义加以验证:

(1) $S=\{x|x^2<2,x\in\mathbb{R}\}$; (2) $S=\{x|x=n!,n\in\mathbb{N}^+\}$;

(3) $S=\{x|x\in(0,1)\cap\overline{\mathbb{Q}}\}$, 其中 $\overline{\mathbb{Q}}$ 为无理数集;

(4) $S=\left\{x\left|x=1-\dfrac{1}{2^n},n\in\mathbb{N}^+\right.\right\}$.

解 (1) 由于 $S=\{x|x^2<2,x\in\mathbb{R}\}=\{x|-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}\}$, 因此 $\sup S=\sqrt{2}$, $\inf S=-\sqrt{2}$.

下面依定义加以验证 $\sup S=\sqrt{2}$:

(i) 对 $\forall x\in S$, 有 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$, 即 $\sqrt{2}$ 是 S 的一个上界; (ii) 对 $\forall\varepsilon>0$, 由实数的稠密性知 $\exists x_0\in(\sqrt{2}-\varepsilon,\sqrt{2})\subset S$, 即 $x_0>\sqrt{2}-\varepsilon$.

下面再依定义加以验证 $\inf S=-\sqrt{2}$:

(i) 对 $\forall x\in S$, 有 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$, 即 $-\sqrt{2}$ 是 S 的一个下界; (ii) 对 $\forall\varepsilon>0$, 由实数的稠密性知 $\exists x_0\in(-\sqrt{2},-\sqrt{2}+\varepsilon)\subset S$, 即 $x_0<-\sqrt{2}+\varepsilon$.

(2) 先证 $\sup S=+\infty$, 事实上, 对 $\forall M>0,\exists x_0=([M]+1)!\in S$, 使得

$$([M]+1)!\geqslant[M]+1>M,$$

即 S 无上界, 故无上确界, 因此非正常上确界为 $\sup S=+\infty$.

再证 $\inf S=1$. 事实上:

(i) 对 $\forall x\in S$, 有 $x=n!\geqslant 1$, 即 1 是 S 的一个下界;

(ii) 对 $\forall\varepsilon>0$, 因为 $\exists 1=1!\in S$, 使得 $1!<1+\varepsilon$.