严格依据2015年考研数学考试大纲编写

高教版
2015

考研数学
考试大纲配套1000题

全国考研数学大纲配套教材
专家委员会

最佳搭配：数学考试大纲解析+大纲配套1000题+冲刺模拟5套卷

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

2015 KAOYAN SHUXUE KAOSHI DAGANG PEITAO 1000 TI

高教版
2015

考研数学
考试大纲配套1000题

全国考研数学大纲配套教材
专家委员会

最佳搭配：数学考试大纲解析+大纲配套1000题+冲刺模拟5套卷

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容简介

《2015考研数学考试大纲配套1000题》在2014版的基础上做了较大修改，具有如下特色：

1. 在对试题内容的分类和命题规律研究的基础上，按照考试内容对题型和考点进行了分类，每部分内容和练习题后面对这类题型的解题方法和技巧，需要着重掌握的内容，考生答题中丢分的主要因素进行了简明扼要的小结，使读者在练习几道题后对这部分内容的解题要点、常见错误有更深的体会，进而能够获得良好的学习效果；

2. 达到或略高于考题的深度和难度，注重数学思考方法的培养，解题方法的掌握和解题技巧的训练，使得考生不但能够熟悉试题的类型，而且能够掌握解决问题的方法；

3. 题目知识点覆盖全面，融进了编者多年从事考研辅导授课经验和积累的丰富资料，某些题目是编者根据命题趋势和阅卷经验有针对性地自行命制，有较高的参考价值；

4. 体例简洁，适应学习规律，将与数学一、二、三中“考试内容”相同的部分和不同的部分做了明确的分割，使读者使用起来更加方便。

编辑推荐：

《2015考研数学考试大纲配套1000题》是《2015年全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》、《2015全国硕士研究生招生考试数学考试大纲解析》的姊妹篇，与《2015考研数学复习教程》、《2015考研数学基础过关500题》、《2015考研数学冲刺模拟5套卷》共同构成考研数学考试大纲配套权威辅导用书系列。

《2015考研数学考试大纲配套1000题》旨在帮助考生在强化复习阶段强化解题思维训练，培养和快速提高解题能力，为拿下数学高分打下坚实基础。

图书在版编目(CIP)数据

2015考研数学考试大纲配套1000题 / 全国考研数学大纲配套教材专家委员会编. --北京：高等教育出版社，2014.9

ISBN 978-7-04-040522-4

Ⅰ.①2… Ⅱ.①全… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-习题集 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第189881号

策划编辑 张耀明　责任编辑 张耀明　封面设计 王 洋　版式设计 于 婕
责任校对 陈旭颖　责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京中科印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×1092mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	25	版　　次	2014年9月第1版
字　　数	620千字	印　　次	2014年9月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	46.00元

物 料 号　40522-00

修 订 说 明

《2015 考研数学考试大纲配套 1000 题》是《2015 年全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》、《2015 全国硕士研究生招生考试数学考试大纲解析》的姊妹篇，与《2015 考研数学复习教程》、《2015 考研数学基础过关 500 题》、《2015 考研数学冲刺模拟 5 套卷》共同构成考研数学考试大纲配套权威辅导用书系列。

《2015 考研数学考试大纲配套 1000 题》旨在帮助考生在强化复习阶段强化解题思维训练，培养和快速提高解题能力，为拿下数学高分打下坚实基础。为了使读者获得良好的复习效果，在编写过程中《2015 考研数学考试大纲配套 1000 题》贯彻如下指导思想：

1. 严格按照《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》的内容和要求编写；
2. 内容上力求能够把握命题规律，追踪命题走向，立足考题特点；
3. 风格简约清新，适应学习规律，帮助考生达到高质、高效的学习效果。

按照上述指导思想，本书在 2014 版的基础上做了较大修改，具有如下特色：

1. 在对试题内容的分类和命题规律研究的基础上，按照考试内容对题型和考点进行了分类，每部分内容和练习题后面对这类题型的解题方法和技巧，需要着重掌握的内容，考生答题中丢分的主要因素进行了简明扼要的小结，使读者在练习几道题后对这部分内容的解题要点、常见错误有更深的体会，进而能够获得良好的学习效果；
2. 达到或略高于考题的深度和难度，注重数学思维方法的培养，解题方法的掌握和解题技巧的训练，使考生不但能够熟悉试题的类型，而且能够掌握解决问题的方法；
3. 题目知识点覆盖全面，融进了编者多年从事考研辅导授课经验和积累的丰富资料，某些题目是编者根据命题趋势和阅卷经验有针对性地自行命制，有较高的参考价值；
4. 体例简洁，适应学习规律，将与数学一、二、三中“考试内容”相同的部分和不同的部分做了明确的分割，使读者使用起来更加方便。

本书适用于考研数学的各个卷种，其内容上的差异书中有详细标注，请读者阅读时注意。

在编写过程中，作者参考了许多相关教材，引用了其中的一些例子，恕不一一列出，在此向有关作者表示诚挚的感谢，并致以深深的敬意。

本书仓促付梓，书中的疏漏和不足，敬请同行专家和读者不吝赐教。

编　者

2014 年 8 月

目录

第一部分 高等数学

第二部分 线性代数

第三部分 概率论与数理统计

第一部分　高等数学

第一章　函数、极限、连续

大 纲 要 求

考试内容

函数的概念及表示法，函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性，复合函数、反函数、分段函数和隐函数，基本初等函数的性质及其图形，初等函数，函数关系的建立.

数列极限与函数极限的定义与性质，函数的左极限和右极限，无穷小量和无穷大量的概念及其关系，无穷小量的性质及无穷小量的比较，极限的四则运算，极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则，两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$$

函数连续的概念，函数间断点的类型，初等函数的连续性，闭区间上连续函数的性质.

考试要求

1. 理解函数的概念、掌握函数的表示法，会建立应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.
5. 理解极限的概念，理解函数左极限和右极限的概念以及函数极限存在与左极限、右极限之间的关系.
6. 掌握（数学三为“了解”）极限的性质及四则运算法则.
7. 掌握（数学三为“了解”）极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法.
8. 理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握无穷小量的比较方法，会用等价无穷小量求极限.
9. 理解函数连续性的概念（含左连续与右连续），会判别函数间断点的类型.
10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理），并会应用这些性质.

强 化 练 习

1. 下列命题中正确的是（　　）

（A）定义在区间$(-l,l)$ $(l>0)$内的任何函数都可以表示为偶函数与奇函数之和的形式，且表示法不唯一.

（B）周期函数一定存在最小正周期.

(C) 开区间内的连续函数一定有界.

(D) 严格单调函数必有反函数.

【分析】 本题考查关于函数特性的常识性结论. 可以通过一些典型的函数形式否定错误选项.

【解】 应选(D).

定义在区间$(-l,l)$ $(l>0)$内的任何函数都可以表示为偶函数与奇函数之和的形式,但表示法是唯一的.

设有函数$f(x)$,$x\in(-l,l)$,令$\varphi_1(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$,$\varphi_2(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$,显然$\varphi_1(x)$为偶函数,$\varphi_2(x)$为奇函数,$\varphi_1(x)+\varphi_2(x)=f(x)$.

设$\psi_1(x)$为偶函数,$\psi_2(x)$为奇函数,且$f(x)=\psi_1(x)+\psi_2(x)$,

因此有$f(-x)=\psi_1(-x)+\psi_2(-x)=\psi_1(x)-\psi_2(x)$,

两式相加得$\psi_1(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]=\varphi_1(x)$,

两式相减得$\psi_2(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=\varphi_2(x)$,从而表示式是唯一的,故(A)不正确.

狄利克雷函数是周期函数,但不存在最小正周期,故(B)不正确.

$y=\frac{1}{x}$,$x\in(0,1)$显然无界,故(C)不正确,综上,应选(D).

2. 函数$f(x)=\dfrac{(e^x-1)\sin(x-1)\arctan\frac{1}{x}}{x(x-1)^2(x-2)^3}$的有界区间是(　　)

(A) $(-1,0)$.　　(B) $(0,1)$.　　(C) $(1,2)$.　　(D) $(2,3)$.

【分析】 本题考查函数有界性的判定方法. 显然函数在各个区间上是连续函数,而$x=0,1,2$是间断点,因此函数是否有界取决于这些点处的极限或单侧极限是否存在,如果存在,则有界.

【解】 应选(A).

因为$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-\frac{\pi}{16}\sin 1$,$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\frac{\pi}{16}\sin 1$,$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\infty$,$\lim\limits_{x\to2}f(x)=\infty$,

故$f(x)$在$(-1,0)$内有界,应选(A).

3. 设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$,$x\geqslant0$,判断$f(x)$是否单调,是否有界?

【分析】 本题综合考查极限存在准则和分段函数的单调性的判断. 由于没有给出函数的显式表达式,而是用幂指函数的极限形式定义了函数,因此本题的关键是利用准则法先确定函数的表达式,再判断单调性.

由于$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^n+1^n+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$,利用极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$ $(a_1,a_2,\cdots,a_k>0)$及

$$\max\left\{1,x,\frac{x^2}{2}\right\}=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant1,\\ x, & 1<x\leqslant2,\\ \frac{x^2}{2}, & x>2.\end{cases}$$

分三个区间讨论.

【解】 当$0\leqslant x\leqslant1$时,

$$1\leqslant\sqrt[n]{1^n+1^n+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}\leqslant\sqrt[n]{4},$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{4}=1$,由夹逼准则知,$f(x)=1$.

当$1<x\leqslant2$时,

$$x\leqslant\sqrt[n]{1^n+1^n+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}\leqslant\sqrt[n]{4}\ x,$$

令$n\to\infty$,得$f(x)=x$.

当 $x>2$ 时，

$$\frac{x^2}{2}\leqslant\sqrt[n]{1^2+1^2+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}\leqslant\sqrt[n]{4}\ \frac{x^2}{2},$$

令 $n\to\infty$，得 $f(x)=\frac{x^2}{2}$.

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x, & 1<x\leqslant 2,\\ \frac{x^2}{2}, & x>2.\end{cases}$$

显然，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 单调递增，是无界的.

4. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是连续的偶函数，证明 $F(x)=\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t$ 也是偶函数.

【分析】 本题考查判断函数奇偶性的方法. 按照定义，先写出 $F(-x)$，将其与 $F(x)$ 比较，由于函数 $F(x)$ 是积分上限函数，因此应结合定积分的换元法转化为 $F(-x)$ 的形式加以证明.

【证】 由已知条件 $f(-x)=f(x)$，$F(-x)=\int_0^{-x}(-x-t)f(t)\mathrm{d}t$，令 $t=-u$，则

$$F(-x)=\int_0^x(-x+u)f(-u)\mathrm{d}(-u)=\int_0^x(x-u)f(u)\mathrm{d}u=F(x),$$

故 $F(x)=\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t$ 也是偶函数.

【小结】 1—4 题练习讨论函数特性的主要方法. 奇偶性和周期性主要依据定义判定，单调性可用导数的符号判断，有界性通常要根据函数的具体形式结合定义、性质、极限和几何图形判定. 考试中的函数常为分段函数、积分上限函数或由极限、积分、级数等定义的函数形式，需要综合利用定义、性质和结论进行讨论.

5. 设 $a\neq\frac{1}{2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=(\quad)$

(A) $\frac{1}{1-2a}$.　　(B) $1-2a$.　　(C) $\frac{1}{1+2a}$.　　(D) $1+2a$.

【分析】 本题考查数列未定式 1^∞ 型的极限. 可利用重要极限结合等价无穷小量代换求极限值.

【解】 应选(A).

$$\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^n=n\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right],$$

利用等价无穷小量代换，有

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\lim_{n\to\infty}n\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n(1-2a)}=\frac{1}{1-2a}.$$

6. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\int_1^n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x}{\sqrt{n}}$.

【分析】 本题考查数列未定式 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限. 分子是积分上限函数形式，因此利用海涅定理先化数列为函数极限，再利用洛必达法则求极限值.

【解】 数列可以看成特殊的函数，从而有

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_1^{x^2}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot 2x}{1}\\&=\lim_{x\to+\infty}2x\cdot\frac{1}{x}=2.\end{aligned}$$

【小结】 5—6 题是求数列极限的常规题型，数列是定义在正整数集合上的特殊函数，因此求数列未定式的极限可以转化为求函数未定式的极限.

7. 设 $a>0, x_1>0$，且定义 $x_{n+1}=\frac{1}{4}\left(3x_n+\frac{a}{x_n^3}\right)(n=1,2,\cdots)$. 证明当 $n\to\infty$ 时，数列 $\{x_n\}$ 的极限存在并求此极限值.

【分析】 本题考查利用单调有界准则证明数列极限存在性的方法. 题设条件给出了数列的递推关系，并要求证明数列极限的存在性，因此考虑利用单调有界准则. 先将数列的一般项缩小，再利用 $x_{n+1}-x_n$ 或 $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ 证明单调性，最后利用递推关系求出极限.

【解】 因为正数的算术平均值不小于几何平均值，所以有

$$x_{n+1}=\frac{1}{4}\left(3x_n+\frac{a}{x_n^3}\right)=\frac{x_n+x_n+x_n+\frac{a}{x_n^3}}{4}\geqslant\sqrt[4]{x_n\cdot x_n\cdot x_n\cdot\frac{a}{x_n^3}}=\sqrt[4]{a}\,(n=1,2,\cdots),$$

从而 $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{4}\left(\frac{a}{x_n^3}-x_n\right)=\frac{a-x_n^4}{4x_n^3}\leqslant 0(n=1,2,\cdots)$，

故 $\{x_n\}$ 单调减少，由 $x_n\geqslant 0(n=1,2,\cdots)$，根据单调有界准则，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，令 $n\to\infty$ 对等式 $x_{n+1}=\frac{1}{4}\left(3x_n+\frac{a}{x_n^3}\right)$ 两边取极限，得 $A=\frac{1}{4}\left(3A+\frac{a}{A^3}\right)$，

解得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A=\sqrt[4]{a}$.

8. 设 $-1<x_0<0, x_{n+1}=x_n^2+2x_n(n=0,1,2,\cdots)$. 证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求此极限值.

【解】 因为 $x_1=x_0^2+2x_0=(x_0+1)^2-1$，而 $-1<x_0<0$，从而 $-1<x_1<0$.

假设 $-1<x_n<0$，则 $x_{n+1}=(x_n+1)^2-1$，即 $-1<x_{n+1}<0$，所以 $\{x_n\}$ 有界.

而 $\frac{x_{n+1}}{x_n}=x_n+2>1$，故 $x_{n+1}<x_n$，从而 $\{x_n\}$ 单调递减，

由单调有界准则，$\{x_n\}$ 的极限存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $a=a^2+2a$，解得 $a=-1, a=0$（舍去），即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-1$.

9. 设 $x_n=\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{t}{1+\sin^3 t}\mathrm{d}t$，又 $u_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$，证明当 $n\to\infty$ 时，数列 $\{u_n\}$ 收敛.

【分析】 本题考查准则法. 显然 $x_n\geqslant 0$，从而 $u_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$ 单调增加，故考虑使用单调有界准则.

【解】 因为 $x_n\geqslant 0$，所以 $u_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$ 单调增加.

又因为 $x_n=\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{t}{1+\sin^3 t}\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{\frac{1}{n}}t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$，故

$$\begin{aligned}u_n&=x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)\leqslant\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2\cdot 1}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n-1)}\right]\\&=\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{n}\right)\leqslant 1,\end{aligned}$$

即数列 $\{u_n\}$ 有上界，所以数列 $\{u_n\}$ 收敛.

10. 设 $x_1>0, x_{n+1}=1-\mathrm{e}^{-x_n}, n=1,2,\cdots$.（1）证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限；（2）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_nx_{n+1}}{x_n-x_{n+1}}$.

【解】（1）因为 $x_1>0$，所以 $x_2=1-\mathrm{e}^{-x_1}>0$.

设 $x_n>0$，则 $x_{n+1}=1-\mathrm{e}^{-x_n}>0$，从而 $\{x_n\}$ 有下界.

令 $f(x)=x-(1-\mathrm{e}^{-x})$，则 $f'(x)=1-\mathrm{e}^{-x}$，当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，从而 $f(x)>f(0)=0$，即 $x>1-\mathrm{e}^{-x}$，于是 $x_n>1-\mathrm{e}^{-x_n}=x_{n+1}$，即 $\{x_n\}$ 单调递减.

由单调有界准则，$\{x_n\}$ 收敛，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $a=1-\mathrm{e}^{-a}$，得 $a=0$.

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n\,x_{n+1}}{x_n-x_{n+1}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(1-\mathrm{e}^{-x})}{x-(1-\mathrm{e}^{-x})}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\mathrm{e}^{-x}+x\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}=2.$

11. 设函数$f(x)$处处可导，且$0\leqslant f'(x)\leqslant\dfrac{k}{1+x^2}$($k>0$为常数)，又设$x_0$为任意一点，数列$\{x_n\}$满足$x_n=f(x_{n-1})$ $(n=1,2,\cdots)$，试证：当$n\to\infty$时，数列$\{x_n\}$的极限存在.

【证】 先证$\{x_n\}$单调.

由$x_{n+1}-x_n=f(x_n)-f(x_{n-1})=(x_n-x_{n-1})f'(\xi_n)$，其中$\xi_n$在$x_n$与$x_{n-1}$之间.

又由已知条件，$f(x)$处处可导，且$0\leqslant f'(x)\leqslant\dfrac{k}{1+x^2}$，于是知$f'(\xi_n)\geqslant 0$，从而$(x_{n+1}-x_n)$与$(x_n-x_{n-1})$同号，故$\{x_n\}$单调.

$$|x_n|=|f(x_{n-1})|=\left|f(x_0)+\int_{x_0}^{x_{n-1}}f'(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant|f(x_0)|+\left|\int_{x_0}^{x_{n-1}}f'(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant|f(x_0)|+\int_{x_0}^{x_{n-1}}|f'(x)|\mathrm{d}x\leqslant|f(x_0)|+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{k}{1+x^2}\mathrm{d}x=|f(x_0)|+k\pi.$$

故由单调有界准则知，数列$\{x_n\}$的极限存在.

【小结】 7—11题练习利用单调有界准则证明数列极限的方法. 这类问题的典型特征是：

(1) 容易建立或题中给出递推关系的数列的极限，要求证明数列极限的存在性，一般考虑使用单调有界准则；

(2) 一般用归纳法或对数列一般项直接进行放缩或利用一些常用不等式进行放缩去证有界性，利用加法、除法或利用导数符号等方法判定单调性，证明单调性和有界性的先后顺序要视题而定；

(3) 利用递推关系求极限值，解方程时产生的增根要根据数列的特征舍去.

12. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$.

【分析】 本题考查利用夹逼准则求数列极限的方法. 题中所给数列的一般项是“和”的形式，又难以写成定积分定义中和式的形式，因此考虑利用夹逼准则. 通过对数列的一般项进行恰当地放缩得到两个极限相等的数列，从而得到所求数列的极限.

【解】 记$x_n=\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}$，因为

$$\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}<x_n<\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1},$$

又因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)}=\frac{1}{2},$$

由夹逼准则，得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=\frac{1}{2}.$$

13. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\dfrac{(n+k)(n+k+1)}{n^4}}$.

【分析】 本题考查求数列极限的准则法和利用定积分求极限的方法. 数列一般项由“和式”给出，考虑用定积分的定义，但不是积分和的形式，应先将一般项放缩，得到两个积分和的形式，由积分的定义得到两个数列的极限，再由夹逼准则求出极限.

【解】 因为$\sqrt{\dfrac{(n+k)(n+k+1)}{n^4}}=\dfrac{1}{n}\sqrt{\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\left(1+\dfrac{k+1}{n}\right)}$，所以

$$\frac{1}{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)<\sqrt{\frac{(n+k)(n+k+1)}{n^4}}<\frac{1}{n}\left(1+\frac{k+1}{n}\right),$$

于是$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)<\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\dfrac{(n+k)(n+k+1)}{n^4}}<\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{k+1}{n}\right)+\dfrac{1}{n^2}$，而

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(1+\frac{k+1}{n}\right)+\frac{1}{n^2}\right]=\int_0^1(1+x)\,dx=\frac{3}{2},$$

故由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{(n+k)(n+k+1)}{n^4}}=\frac{3}{2}$.

14. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

【解】 记 $u_n=\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}$,则

$$\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}<u_n<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n},$$

两边令 $n\to\infty$,由夹逼准则有

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\int_0^1\sin(\pi x)\,dx=\frac{2}{\pi}.$$

15. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n-2)(2n-1)}$.

【分析】 本题仍是考查准则法.数列一般项没有直接给出"和"的形式,但取对数后可转化为"积分和"的形式,利用积分定义求出极限.

【解】 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\ln\left[\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n-2)(2n-1)}\right]}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}[\ln n+\ln(n+1)+\cdots+\ln(2n-1)]-\ln n\right\}}$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\left(\ln\frac{n}{n}+\ln\frac{n+1}{n}+\cdots+\ln\frac{2n-1}{n}\right)\right]}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}$$

$$=e^{\int_0^1\ln(1+x)\,dx}=\frac{4}{e}.$$

16. (1) 证明当 $|x|$ 充分小时,不等式 $0\leqslant\tan^2x-x^2\leqslant x^4$ 成立;

(2) 设 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\tan^2\frac{1}{\sqrt{n+k}}$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【解】 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan^2x-x^2}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x+x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^3}$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^3}=2\lim_{x\to0}\frac{\sec^2x-1}{3x^2}=2\lim_{x\to0}\frac{\tan^2x}{3x^2}=\frac{2}{3}<1,$$

所以当 $|x|$ 充分小时,$0\leqslant\frac{\tan^2x-x^2}{x^4}\leqslant1$,

即　$0\leqslant\tan^2x-x^2\leqslant x^4$.

(2) 由(1)知,当 n 充分大时,$0\leqslant\tan^2\frac{1}{\sqrt{n+k}}-\frac{1}{n+k}\leqslant\frac{1}{(n+k)^2}$,故

$$\frac{1}{n+k}\leqslant\tan^2\frac{1}{\sqrt{n+k}}\leqslant\frac{1}{n+k}+\frac{1}{(n+k)^2},$$

即　$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\leqslant x_n\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^2}\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}+\frac{1}{n}$,而

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln2,$$

由夹逼准则,有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\ln2$.

【小结】 12—16 题是综合利用准则法求数列极限的习题，是难度较大的内容，涉及的知识点比较多. 考生由于基础知识不扎实，缺少前后知识贯通的能力，在解决这类问题时感到无从下手，非常困难. 求数列和式的极限主要是利用夹逼准则或定积分的定义进行求解，它们之间的区别主要表现为难以通过简单变形写成“积分和”形式的数列，主要利用夹逼准则；能够写成“积分和”形式的，则考虑利用定积分定义，但要灵活运用. 为此，要强调积分的定义式：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{k-1}{n}(b-a)\right)$，

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k-1}{n}\right).$$

17. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\dfrac{1+\cos x}{2}\right)^x-1}{x\ln(1+x^2)}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x(1+t^2)\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{x\mathrm{e}^{x^2}}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan 2x^2\right)x^2$；

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{2}{x}}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}x^3\left(\sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{2}{x}\right)$；

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

【分析】 本题考查函数未定式的极限，可利用等价无穷小量代换和洛必达法则求极限. 对(5)、(7)题先“指数对数化”，再利用洛必达法则，对(6)题先做变量代换 $x=\dfrac{1}{t}$，再利用泰勒公式求极限.

【解】 (1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\dfrac{1+\cos x}{2}\right)^x-1}{x\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{x\ln\frac{1+\cos x}{2}}-1}{x\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln\dfrac{1+\cos x}{2}}{x\cdot x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{\cos x-1}{2}\right)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\cos x-1}{2}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)}{x^2}=-\frac{1}{4}.$$

(2) 因 $(x^x)'=(\mathrm{e}^{x\ln x})'=\mathrm{e}^{x\ln x}(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$，所以

$$\lim_{x\to1}\frac{x-x^x}{1-x+\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{1-x^x(\ln x+1)}{-1+\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to1}\frac{-x^x(\ln x+1)^2-x^x\cdot\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\frac{-1-1}{-1}=2.$$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x(1+t^2)\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{x\mathrm{e}^{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1+x^2)\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{x^2}+x\mathrm{e}^{x^2}\cdot2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x^2}{1+2x^2}=\dfrac{1}{2}.$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan 2x^2\right)x^2=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan 2x^2}{x^{-2}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-\dfrac{1}{1+(2x^2)^2}\cdot4x}{-2x^{-3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4}{1+4x^4}=\frac{1}{2}.$$

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{2}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)}{x+\sqrt{1+x^2}}}$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}}=\mathrm{e}^0=1.$$

(6) 令 $\dfrac{1}{x}=t$，则

$$\lim_{x\to\infty}x^3\left(\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\sin\frac{2}{x}\right)=\lim_{t\to0}\frac{\sin t-\frac{1}{2}\sin 2t}{t^3}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{t-\frac{t^3}{6}+o(t^3)-\frac{1}{2}\left[2t-\frac{(2t)^3}{6}+o(t^3)\right]}{t^3}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\frac{t^3}{2}+o(t^3)}{t^3}=\frac{1}{2}.$$

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}\cdot\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)}{\frac{1}{x}}}$

$$=e^{-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}}=e^{-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}}{-\frac{1}{1+x^2}}}$$

$$=e^{-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}}=e^{-1}.$$

18. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}$，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为正常数.

【分析】 本题考查幂指函数的 1^∞ 型未定式的极限. 先“指数对数化”，再利用洛必达法则求极限；也可利用重要极限 $\lim\limits_{u\to0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$ 求极限.

【解】 (1) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{\ln(1+x^2)}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln[1+(\cos x-1)]}{\ln(1+x^2)}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

或 $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=\lim\limits_{x\to0}[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{\ln(1+x^2)}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{\ln(1+x^2)}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{n}{x}\ln\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{n[\ln(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x)-\ln n]}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}n\cdot\frac{a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_n^x\ln a_n}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}}$$

$$=e^{n\cdot\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}}=e^{\ln(a_1a_2\cdots a_n)}=a_1a_2\cdots a_n.$$

或 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}{n}\right)^{\frac{n}{x}}$

$$=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}{n}\right)^{\frac{n}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}\cdot\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}{n}\cdot\frac{n}{x}\right)}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{(a_1^x-1)+(a_2^x-1)+\cdots+(a_n^x-1)}{x}}$$

$$=e^{\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{a_1^x-1}{x}+\lim\limits_{x\to0}\frac{a_2^x-1}{x}+\cdots+\lim\limits_{x\to0}\frac{a_n^x-1}{x}\right)}$$

$$=e^{(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n)}=a_1a_2\cdots a_n.$$

19. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]$；　(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[2x+\ln(1-2x)]}$.

【分析】 本题考查利用泰勒公式求函数未定式极限. 若直接利用洛必达法则则不易求出其极限,可利用泰勒公式计算. (1)题应先利用代换 $t=\frac{1}{x}$ 转化为 $\frac{0}{0}$ 型未定式,再利用泰勒公式.

【解】 (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]$ $\left(令\ t=\frac{1}{x}\right)$

$$=\lim_{t\to0^+}\left[\left(\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{2t}\right)e^t-\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^6+1}\right]$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\left(1-t+\frac{t^2}{2}\right)e^t-\sqrt{1+t^6}}{t^3}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\left(1-t+\frac{t^2}{2}\right)\left(1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+o(t^3)\right)-(1+o(t^3))}{t^3}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{t^3}{6}+o(t^3)}{t^3}=\frac{1}{6}.$$

(2) 因为 $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$,

$$e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2+o(x^4)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4),$$

$$\ln(1-2x)=-2x-\frac{1}{2}(-2x)^2+o(x^2)=-2x-2x^2+o(x^2),$$

所以 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[2x+\ln(1-2x)]}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)-\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)\right]}{x^2[2x-2x-2x^2+o(x^2)]}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^4}{12}+o(x^4)}{-2x^4+o(x^4)}$$

$$=\frac{1}{24}.$$

20. 求 $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{e^{x^2y^2}}{\int_0^1 e^{y^2t^2}dt}$,其中 $x>0$.

【分析】 本题考查函数未定式 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限. 先用变量代换把分母的积分换成变限积分,再利用洛必达法则求极限.

【解】 令 $yt=u$,则 $\int_0^1 e^{y^2t^2}dt=\int_0^y e^{u^2}\cdot\frac{1}{y}du=\frac{1}{y}\int_0^y e^{u^2}du$. 所以

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{e^{x^2y^2}}{\int_0^1 e^{y^2t^2}dt}=\lim_{y\to+\infty}\frac{e^{x^2y^2}}{\frac{1}{y}\int_0^y e^{u^2}du}=\lim_{y\to+\infty}\frac{ye^{x^2y^2}}{\int_0^y e^{u^2}du}$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\frac{e^{x^2y^2}+y\cdot e^{x^2y^2}\cdot 2x^2y}{e^{y^2}}=\lim_{y\to+\infty}\frac{e^{x^2y^2}(1+2x^2y^2)}{e^{y^2}}$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\frac{1+2x^2y^2}{e^{y^2(1-x^2)}}.$$

当$0<x<1$时,原式$=\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{4x^2y}{2y(1-x^2)e^{y^2(1-x^2)}}=0$,

当$x\geqslant1$时,原式$=\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{1+2x^2y^2}{e^{y^2(1-x^2)}}=+\infty$.

21. 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\,dt\right]du}{x(1-\cos x)}$.

【解】 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\,dt\right]du}{x\cdot\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}\arctan(1+t)\,dt}{\frac{3}{2}x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan(1+x^2)\cdot2x}{3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2}{3}\arctan(1+x^2)$

$=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{6}$.

【小结】 17—21题是求具体函数未定式的极限问题,洛必达法则是重要并且有效的方法,但是要注意以下几点:

(1) 对于$0\cdot\infty$型、$\infty-\infty$型、0^0型、∞^0型和1^∞型未定式要转化为$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式,再使用洛必达法则.

(2) 要注意与等价无穷小量代换等方法结合起来,计算过程中要随时化简.

(3) 当$x\to0$时,函数中含有$\sin\dfrac{1}{x}$,$\cos\dfrac{1}{x}$等形式时不宜用洛必达法则.

(4) 函数表达式比较复杂,又含加减运算或是抽象函数的极限的局部逆问题,要慎用洛必达法则.一般要使用泰勒公式(或麦克劳林公式)确定极限,以避免错误.

22. 确定常数a,b,c的值,使$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=c(c\neq0)$.

【解】 若$b\neq0$,则$\lim\limits_{x\to0}\int_b^x\dfrac{\ln(1+t^3)}{t}dt\neq0$,与$c\neq0$相矛盾,故$b=0$.由洛必达法则知

$$原式左瑞=\lim_{x\to0}\frac{ax-\sin x}{\int_0^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=\lim_{x\to0}\frac{a-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{a-\cos x}{x^2},$$

若$a\neq1$,则上式右端趋于∞,矛盾,故$a=1$,再由$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$,知$c=\dfrac{1}{2}$.

23. 已知极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\arctan x-\ln\frac{1+x}{1-x}}{x^n}=c\neq0$,试确定常数$n$和$c$的值.

【解法1】 由洛必达法则,得

$$\lim_{x\to0}\frac{2\arctan x-\ln\frac{1+x}{1-x}}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2}{1+x^2}-\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}}{nx^{n-1}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2}{1+x^2}-\frac{2}{(1+x)(1-x)}}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2(-2x^2)}{1-x^4}}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to0}\frac{-4x^2}{nx^{n-1}(1-x^4)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-4}{1-x^4}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{nx^{n-3}}=-4\lim_{x\to0}\frac{1}{nx^{n-3}}=c,$$

故有　$n=3$，　$c=-\frac{4}{3}$.

【解法 2】　因为 $\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$，

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3),$$

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3),$$

所以　$2\arctan x-\ln\frac{1+x}{1-x}=2\arctan x-\ln(1+x)+\ln(1-x)=-\frac{4}{3}x^3+o(x^3)$，

故　$\lim\limits_{x\to0}\frac{2\arctan x-\ln\frac{1+x}{1-x}}{x^n}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{4}{3}x^3+o(x^3)}{x^n}=c\neq0$. 从而有　$n=3, c=-\frac{4}{3}$.

24. 已知 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{f(x)-1}{\tan x}-\frac{e^x\sin x}{\tan^2 x}\right)=2$，求 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

【解】　由于 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x\sin x}{\tan^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x\cdot x}{x^2}=\infty$，故 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-1}{\tan x}=\infty$.

又由 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{f(x)-1}{\tan x}-\frac{e^x\sin x}{\tan^2 x}\right)=2$，知存在 $x\to0$ 时的无穷小量 $\alpha(x)$，使得

$$\frac{f(x)-1}{\tan x}-\frac{e^x\sin x}{\tan^2 x}=2+\alpha(x)$$

成立. 则　$f(x)=2\tan x+\alpha(x)\tan x+\frac{e^x\sin x}{\tan x}+1$，

从而　$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(2\tan x+\alpha(x)\tan x+\frac{e^x\sin x}{\tan x}+1\right)=2.$

25. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^4+ax^2}-(x^2+bx)e^{-\frac{2}{x}}\right]=1$，试确定 a,b 的值.

【解】　令 $x=\frac{1}{t}$，则

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^4+ax^2}-(x^2+bx)e^{-\frac{2}{x}}\right]\\&=\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{1+at^2}-(1+bt)e^{-2t}}{t^2}\\&=\lim_{t\to0^+}\frac{\left(\sqrt{1+at^2}-1\right)-\left[(1+bt)e^{-2t}-1\right]}{t^2}\\&=\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{1+at^2}-1}{t^2}-\lim_{t\to0^+}\frac{(1+bt)e^{-2t}-1}{t^2}\\&=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{2at}{2\sqrt{1+at^2}}}{2t}-\lim_{t\to0^+}\frac{be^{-2t}+(1+bt)e^{-2t}(-2)}{2t}\\&=\lim_{t\to0^+}\frac{a}{2\sqrt{1+at^2}}-\lim_{t\to0^+}\frac{(b-2-2bt)e^{-2t}}{2t}\\&=\frac{a}{2}-\lim_{t\to0^+}\frac{-2be^{-2t}-2(b-2-2bt)e^{-2t}}{2}\\&=\frac{a}{2}+\frac{2b+2(b-2)}{2}=\frac{a}{2}+2b-2=1,\end{aligned}$$

故有　$b-2=0$，　$\frac{a}{2}+2b-2=1$，即 $a=-2, b=2$.

26. 设 $f(x)$ 在 $0<|x|<\delta$ 时有定义，其中 δ 为正常数，且

$$\lim_{x\to0}\left[\cos x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x^2}}=\mathrm{e},$$

求极限 $\frac{f(x)}{x^3}$.

【解】 $\lim\limits_{x\to0}\left[\cos x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\left[1+\left(\cos x-1+\frac{f(x)}{x}\right)\right]^{\frac{1}{x^2}}$

$$=\lim_{x\to0}\left[1+\left(\cos x-1+\frac{f(x)}{x}\right)\right]^{\frac{1}{\cos x-1+\frac{f(x)}{x}}\cdot\frac{\cos x-1+\frac{f(x)}{x}}{x^2}}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{\cos x-1}{x^2}+\frac{f(x)}{x^3}\right]}=\mathrm{e},$$

即 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}+\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^3}=1$，而

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2},$$

故 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^3}=\frac{3}{2}$.

27. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin3x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}\right)=0$，求 $f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$ 及 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+3}{x^2}$.

【解】 因为 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x+xf(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sin 3x}{x}+f(x)}{x^2}=0$，

所以 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin 3x}{x}+f(x)\right)=0$.

又 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导，因此 $f(x)$，$f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

从而 $f(0)=-3$.

因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sin 3x}{x}+f(x)}{x^2}=0$，所以 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sin 3x}{x}-3+f(x)+3}{x^2}=0$，

故
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)+3}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{3-\frac{\sin 3x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{3x-\sin 3x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{3-3\cos 3x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{3\sin 3x}{2x}=\frac{9}{2}.$$

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)+3}{x}=\lim_{x\to0}x\cdot\frac{f(x)+3}{x^2}=0\times\frac{9}{2}=0.$$

由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+3}{x^2}=\frac{9}{2}$，将 $f(x)$ 麦克劳林展开，得

$$\lim_{x\to0}\frac{f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+o(x^2)+3}{x^2}=\frac{9}{2},$$

因此 $\frac{1}{2}f''(0)=\frac{9}{2}$，于是 $f''(0)=9$.

28. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且 $f(x_0)\neq0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)}{f(x_0)}\right]^n$.

【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)}{f(x_0)}\right]^n=\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{f(x_0+x)}{f(x_0)}\right]^{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to0}\left[1+\frac{f(x_0+x)-f(x_0)}{f(x_0)}\right]^{\frac{f(x_0)}{f(x_0+x)-f(x_0)}\cdot\frac{f(x_0+x)-f(x_0)}{xf(x_0)}}$$