等学校教材

数学分析讲义

下册

(第三版)

刘玉琏 傅沛仁 编

高等教育出版社

高等学校教材

数学分析讲义

(第三版)

下　册

刘玉琏　傅沛仁　编

高等教育出版社

(京)112号

本版内容和体例，较第二版未作大的变动。因此，刘玉琏等编的《数学分析学习指导书——附解题方法提要》一书仍能与本版配套使用。此次修订，主要改动有：改正了第二版中的错漏，对个别内容作了增删，对练习题作了小量调整和精简，引入了量词符号。

本书阐述细致，范例较多，通俗易懂，便于自学，可作高等师范本科教材，也可作高等理科院校函授教材及高等教育自学用书。

为了更好地保证教学效果，未经我社和编者同意，请不要为本书练习题配备题解公开出版。

高等学校教材

数学分析讲义

(第三版)

下 册

刘玉琏 傅沛仁 编

*

高等教育出版社出版

新华书店总店北京科技发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 14.25 字数 340 000

1966年3月第1版 1992年7月第3版 1992年7月第1次印刷

印数 0001—12 595

ISBN 7-04-003849-8/O·1122

定价4.65元

目　　录

第九章 级 数

级数分为数值级数与函数级数.函数级数是表示函数,特别是表示非初等函数的一个重要的数学工具. 例如, 有的微分方程的解不是初等函数, 但其解却可表为函数级数. 函数级数又是研究函数(初等函数与非初等函数)性质的一个重要手段. 因此, 函数级数在自然科学、工程技术和数学本身都有广泛的应用. 数值级数是函数级数的特殊情况, 它又是函数级数的基础. 本章首先讨论数值级数的基本理论.

§9.1. 数 值 级 数

一、收敛与发散概念

设有数列$\{u_n\}$,即

$$u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots. \tag{1}$$

将数列(1)的项依次用加号连接起来,即

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots, \quad 或 \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{2}$$

称为**数值级数**,简称**级数**, 其中 u_n 称为级数(2) 的**第n项**或**通项**.

级数(2)是无限多个数的和. 我们只会计算有限个数的和,不仅不会计算无限多个数的和,甚至都不知道何谓无限多个数的和.因此,无限多个数的和是一个未知的新概念.这个新概念也不是孤立的,它与我们已知的有限个数的和联系着. 不难想到,由有限个数的和转化到"无限多个数的和"应借助极限这个工具来完成.

设级数(2)前 n 项的和是S_n,即

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n \quad 或 \quad S_n=\sum_{k=1}^{n} u_k,$$

称为级数(2)的 n 项**部分和**. 显然,对给定级数(2),其任意 n 项部分和 S_n 都是已知的. 于是,级数(2)对应着一个部分和数列 $\{S_n\}$.

定义 若级数(2)的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛,设

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} u_k = S,$$

则称级数(2)**收敛**, S 是级数(2)的**和**,表为

$$S=\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots.$$

若部分和数列 $\{S_n\}$ **发散**,则称级数(2)**发散**, 此时级数(2)没有和.

定义 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,其和是 S,而 $S-S_n$ 表为 r_n,即

$$r_n = S-S_n=\sum_{k=1}^{\infty} u_k-\sum_{k=1}^{n} u_k = u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots,$$

称为收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的 **n 项余和**,简称**余和**. 显然, 有

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}(S-S_n)=0.$$

由此可见,级数的敛散性(收敛与发散) 是借助于它的部分和数列的敛散性定义的. 反之, 数列的敛散性也可归结为级数的敛散性. 事实上,设有数列 $\{S_n\}$. 令

$$a_1=S_1,\ a_2=S_2-S_1,\ \cdots,\ a_n=S_n-S_{n-1},\ n=2,3,\cdots.$$

显然,
$$\begin{aligned} S_n &= S_1+(S_2-S_1)+\cdots+(S_n-S_{n-1}) \\ &= a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k, \end{aligned}$$

即数列 $\{S_n\}$ 的敛散性可归结为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性.

因此，研究收敛级数及其和数只不过是研究收敛数列及其极限的一种新形式. 因为级数是有限和的推广，有鲜明的直观性，所以，这种新形式不是收敛数列及其极限的简单重复，它使我们处理不同形式的极限具有更大的灵活性，并提供了新的工具.

例1. 讨论几何级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$$

的敛散性，其中 $a\neq 0$，r是公比.

解 1)当$|r|\neq 1$时，已知几何级数的 n 项部分和

$$S_n=a+ar+\cdots+ar^{n-1}=\frac{a-ar^n}{1-r}.$$

(i) 当$|r|<1$时，极限

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a-ar^n}{1-r}\text{①}=\frac{a}{1-r}.$$

因此，当$|r|<1$时，几何级数收敛，其和是$\frac{a}{1-r}$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=\frac{a}{1-r}.$$

(ii) 当$|r|>1$时，极限

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a-ar^n}{1-r}=\infty.$$

因此，当$|r|>1$时，几何级数发散.

2) 当$|r|=1$时，有两种情况：

(i) 当 $r=1$时，几何级数是

$$a+a+a+\cdots+a+\cdots.$$

$$S_n=\underbrace{a+a+\cdots+a}_{n\text{个}}=na.$$

① 见§2.1例4，当$|r|<1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}r^n=0$.

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}na=\infty \quad (a\neq 0),$$

即部分和数列$\{S_n\}$发散.

(ii) 当$r=-1$时,几何级数是

$$a-a+a-a+\cdots+(-1)^{n-1}a+\cdots.$$

$$S_n=\begin{cases}0, & n\text{是偶数},\\ a, & n\text{是奇数},\end{cases}$$

即部分和数列$\{S_n\}$发散.

于是,当$|r|=1$时,几何级数发散.

综上所述,几何级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$,当$|r|<1$时收敛,其和是$\frac{a}{1-r}$;当$|r|\geqslant 1$时发散.

例2. 证明,级数

$$\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 16}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}+\cdots$$

收敛,并求其和.

证明 通项u_n可改写为

$$u_n=\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right).$$

级数的n项部分和

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}\\&=\frac{1}{5}\left[\left(1-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)\right]\\&=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right).\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right)=\frac{1}{5}.$$

于是,级数收敛,其和是$\frac{1}{5}$,即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}=\frac{1}{5}.$$

例 3. 证明，调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

是发散的.

证明 设调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$的 n 项部分和是 y_n，即

$$y_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

由§2.2 例 11，已知数列$\{y_n\}$发散，从而，调和级数发散.

二、收敛级数的性质

因为级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的收敛与它的部分和数列$\{S_n\}$的收敛是等价的，所以数列$\{S_n\}$收敛的必要充分条件也就是级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的必要充分条件. 已知数列$\{S_n\}$的柯西收敛准则：

数列$\{S_n\}$收敛$\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N},\forall n>N,\forall p\in\mathbf{N}$，有

$$|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon.$$

设 S_n 是级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的 n 项部分和，有 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的核心

$$S_{n+p}-S_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}.$$

于是，有下面级数的柯西收敛准则：

定理 1.（柯西收敛准则） 级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛$\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N}$，$\forall n>N,\forall p\in\mathbf{N}$，有

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon.$$

根据定理 1 的必要性，若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}$，$\forall n>N$，取 $p=1$，有 $|u_{n+1}|<\varepsilon$. 于是，有

推论 1. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

推论 1 的等价命题是，若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

例如，级数

$$\frac{1}{101}+\frac{2}{201}+\frac{3}{301}+\cdots+\frac{n}{100\cdot n+1}+\cdots,$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{100\cdot n+1}=\frac{1}{100}\neq 0$，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{100\cdot n+1}$ 发散.

注 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 仅是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的必要条件而不是充分条件，即 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也可能发散. 例如，调和级数(见例 3)

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots,$$

有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，而调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 却是发散的.

定理 1 指出，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛等价于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的充分远(即 $n>N$)的任意片段(即 $\forall p$，$u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}$) 的绝对值可以任

意小．由此可见，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的敛散性仅与级数充分远的任意片段有关，而与级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$前面有限多个项无关．于是，又有

推论 2． 若去掉、增添或改变级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的有限项，则不改变级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的敛散性．

例如，去掉发散级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$的前面 100 项，而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{100+n}=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\cdots+\frac{1}{100+n}+\cdots$$

仍是发散的．

根据数列极限运算定理可得级数运算定理：

定理 2． 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，其和是$S$，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}cu_n=cu_1+cu_2+\cdots+cu_n+\cdots$$

也收敛，其和是cS，其中c是常数（$c\neq0$）．

证明 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}cu_n$的$n$项部分和分别是$S_n$与$\sigma_n$，有

$$\sigma_n=cu_1+cu_2+\cdots+cu_n=c(u_1+u_2+\cdots+u_n)=cS_n.$$

已知$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$，有

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}cS_n=cS,$$

即级数$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$收敛，其和是 cS. □

定理 2 的结果可改写为

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = cS = c\sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

即收敛级数(无限个数的和)满足数(非零)的分配律.

定理 3. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，其和是 S，则不改变级数每项的位置，按原有的顺序将某些项结合在一起，构成的新级数

$$(u_1+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})+\cdots+(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k})+\cdots ① \tag{3}$$

也收敛，其和也是 S.

证明 设级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的 n 项部分和是 S_n，新级数(3)的 k 项部分和是 σ_k，有

$$\begin{aligned}\sigma_k &= (u_1+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})+\cdots\\&\quad+(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k})\\&= u_1+u_2+\cdots+u_{n_k}=S_{n_k},\end{aligned}$$

即新级数(3)的部分和数列$\{\sigma_k\}$是级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的部分和数列$\{S_n\}$的子数列. 根据§2.2定理 9，已知$\lim_{n\to\infty} S_n = S$，则$\lim_{k\to\infty}\sigma_k = S$. 于是，新级数(3)收敛，其和也是 S. □

定理 3 说明：收敛级数(无限个数的和)满足结合律.

注 一个级数的项经过结合之后构成的新级数收敛，去掉括

① 每个括号内的和数作为新级数的一项，新级数的第 k 项是

$$(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k}).$$

号之后的级数不一定收敛. 例如,级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$$

收敛于 0 ,但去掉括号之后的级数

$$1-1+1-1+\cdots+1-1+\cdots$$

却是发散的.

定理 4. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛, 其和分别是 A 与 B, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)=(u_1 \pm v_1)+(u_2 \pm v_2)+\cdots+(u_n \pm v_n)+\cdots$$

也收敛,其和是 $A \pm B$.

证明 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 的 n 项部分和分别是 A_n, B_n 与 C_n, 有

$$C_n=\sum_{k=1}^{n}(u_k \pm v_k)=(u_1 \pm v_1)+(u_2 \pm v_2)+\cdots+(u_n \pm v_n)$$

$$=(u_1+u_2+\cdots+u_n) \pm (v_1+v_2+\cdots+v_n)=A_n \pm B_n.$$

已知 $\lim\limits_{n \to \infty} A_n=A$ 与 $\lim\limits_{n \to \infty} B_n=B$, 有

$$\lim_{n \to \infty} C_n=\lim_{n \to \infty} A_n \pm \lim_{n \to \infty} B_n=A \pm B,$$

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 收敛,其和是 $A \pm B$. □

练 习 题 9.1(一)

1. 求下列级数的和:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$,

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$,

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$.

2. 证明：m 是固定的自然数，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+m)}=\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right).$$

3. 证明：若 $\lim_{n\to\infty} na_n=a>0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

4. 证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\ (a_n\geqslant 0)$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 也收敛. 反之是否成立?

5. 证明：若 $\{a_n\}$ 是整数数列，且 $0\leqslant a_n\leqslant 9$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n 10^{-n}$ 收敛，其和是 $0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$.

6. 证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，且

$$a_n\leqslant c_n\leqslant b_n \qquad (n=1,2,\cdots),$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 也收敛.（提示：应用级数的柯西收敛准则.）

7. 证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 发散.

8. 证明：若级数 $\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k-1}$ 与 $\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k}$ 都收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

*　　　*　　　*　　　*

9. 证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.（提示：证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 部分和数列 $\{S_n\}$ 的两个子数列 $\{S_{2n}\}$ 与 $\{S_{2n-1}\}$

有相同的极限)

10. 证明:若数列$\{na_n\}$收敛,且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$收敛,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$也收敛.

11. 证明:若$a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant\cdots\geqslant 0$,且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,则$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$.

12. 证明:若将级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$依次若干项结合得新级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k$收敛,其中$A_k=a_{n_{k-1}+1}+\cdots+a_{n_k}$,且$A_k$的项有相同的符号,则原级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,且两个收敛级数的和相等.

小本丈 68 97.2

三、同号级数

同号级数是指级数

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

的每一项u_n的符号都是非负或都是非正. 若$u_n\geqslant 0(n=1,2,\cdots)$,称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$是**正项级数**;若$u_n\leqslant 0\ (n=1,2,\cdots)$,称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$是**负项级数**.

将负项级数每项乘以-1,负项级数就变成了正项级数,根据定理2,负项级数与正项级数具有相同的敛散性. 于是,讨论负项级数的敛散性可以归结为讨论正项级数的敛散性. 因此,下面只讨论正项级数敛散性及其敛散性的判别法.

若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$是正项级数,则此级数的部分和数列$\{S_n\}$单调增加,即

$$S_1\leqslant S_2\leqslant\cdots\leqslant S_n\leqslant\cdots.$$

根据§2.2公理,有判别正项级数收敛性的定理: