SCHAUM'S ouTlines

全美经典学习指导系列

工程力学

——静力学与动力学

（原第五版）

〔美〕E. W. 纳尔逊　C. L. 贝斯特　W. G. 麦克莱恩 著

贾启芬　郝淑英 译

- 获得好成绩的帮手
- 函盖课程的所有基础，任一教材的补充
- 教授有效的解题技巧
- 460道详细解答的习题
- 860道带答案的练习题
- 理想的自学读物

科学出版社

McGraw Hill

麦格劳-希尔教育出版集团

内 容 简 介

本书是一般工程力学教材的补充读物，内容涵盖工程力学课程的各个方面. 全书共 19 章，每章开头阐述相关的定义、定理及原理，然后提供了各种类型和不同难度的例题以及补充习题. 例题用于说明和引伸理论，展示分析方法，提供实例，以引导学生抓住问题的关键. 例题中还包括了大量的定理证明和公式推导. 每章的补充习题作为全章内容的复习材料，习题后给出了参考答案.

本书可供不同层次的高等学校工科各专业的学生参考.

E. W. Nelson, C. L. Best, W. G. Mclean: Schaum's Outline of Theory and Problems of Engineering Mechanics

ISBN: 0-07-046193-7

图字：01-2001-5528 号

图书在版编目(CIP)数据

工程力学：静力学与动力学/(美)纳尔逊，(美)贝斯特，(美)麦克莱恩著；贾启芬，郝淑英译. —北京：科学出版社，2002

(全美经典学习指导系列)

ISBN 7-03-009581-2

Ⅰ.工… Ⅱ.①纳… ②贝… ③麦… ④贾… ⑤郝… Ⅲ.①工程力学：静力学-高等学校-教学参考资料 ②工程力学：动力学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.IB12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 041394 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

西源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002 年 2 月第 一 版 开本：A4 (890×1240)

2002 年 2 月第一次印刷 印张：26

印数：1—4 000 字数：745 000

定价：38.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

目　录

第 1 章　矢　　量

1.1　定义

标量只具有大小,例如,时间,体积,能量,质量,密度(比重),功.用代数的方法进行标量的求和运算,例如,2 s + 7 s = 9 s; 14 kg − 5 kg = 9 kg.

矢量具有大小和方向*,例如:力,位移,速度,冲量.矢量用一个具有已知斜度的带箭头的线段表示.箭头的指向表示了矢量的方向,其线段长短表示了矢量的大小.矢量的符号用黑斜体印刷字母表示,例如 $\boldsymbol{P}$,其大小用 $|\boldsymbol{P}|$ 或 P 表示.

自由矢量可以在空间任意移动,而不改变其大小和方向.

滑移矢量可以沿着其作用线方向自由滑动.根据力的可传性原理,滑移矢量对刚体的作用效果不变.

定位矢量的作用点不能移动.

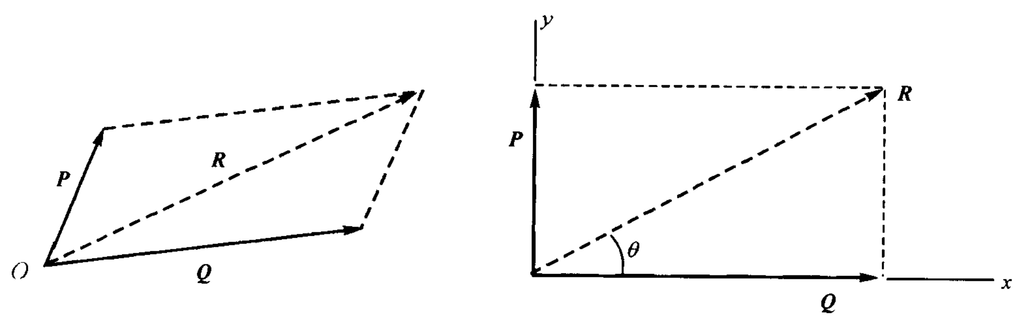
单位矢量是一个具有单位长度的矢量.

矢量 $\boldsymbol{P}$ 的负矢量用 $-\boldsymbol{P}$ 表示,其大小和作用线相同但方向相反.

矢量系统的合成结果是表示已知矢量系统的最小数目的矢量.

1.2　二矢量的加法

(a) 根据平行四边形定则,矢量 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 的合矢量 $\boldsymbol{R}$,是以 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 为边组成的平行四边形的对角线,如图 1-1(a)所示.$\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 也称合矢量 $\boldsymbol{R}$ 的分量.



(a)　　　　(b)

图 1-1

(b) 如果图 1-1(a)所示的平行四边形的边是垂直的,则矢量 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 称作矢量 $\boldsymbol{R}$ 的垂直分量,如图 1-1(b)所示.垂直分量的大小表示为

$$Q = R\cos\theta$$

和

$$P = R\cos(90^\circ - \theta) = R\sin\theta$$

(c) 三角形定则.任取一个矢量,在其末端连接另一矢量的始端,则合矢量从第一个矢量的始端连接到另一矢量的末端.三角形定则由平行四边形定则引出,因为平行四边形的对应边是自由矢量如图 1-2 所示

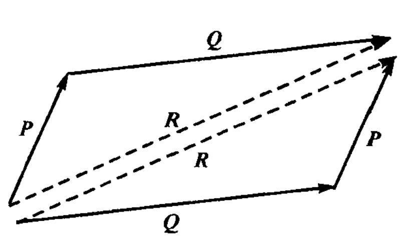


图 1-2

---

* 方向是指力作用线的方位及箭头指向.

(d) 矢量加法满足交换律,即 $\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{P}$

1.3 矢量的减法

矢量的减法是矢量加法的逆运算,即

$$\boldsymbol{P}-\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}+(-\boldsymbol{Q})$$

或

$$-(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q})=-\boldsymbol{P}-\boldsymbol{Q}$$

1.4 零矢量

零矢量是一个矢量与自身的减法运算,即,$\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}=0$. 也称之为零矢量.

1.5 矢量的合成

矢量的合成是求矢量系统的合矢量的过程.作矢量多边形,是将每个矢量依此首尾连接而成如图 1-3 所示.则合矢量从第一个矢量的始端连接到最后一矢量的末端.最后指出,不是所有的矢量系统都能简化成一个矢量.合矢量与矢量的作图顺序无关,例如 3 个已知矢量 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{S}$,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}&=\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{S}=(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q})+\boldsymbol{S}\\&=\boldsymbol{P}+(\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{S})=(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{S})+\boldsymbol{Q}\end{aligned}$$

以上方程可以扩展到具有多个矢量的系统.

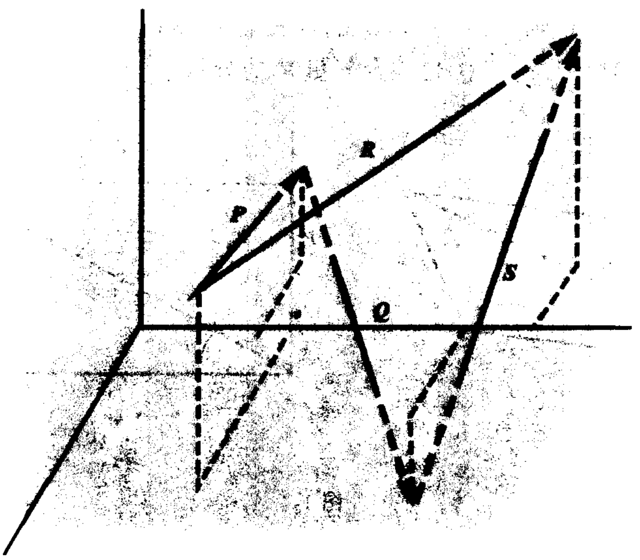


图 1-3

1.6 矢量与数量的乘法运算

(a) 矢量 $\boldsymbol{P}$ 与数量 m 相乘等于 $m\boldsymbol{P}$,其大小是矢量 $\boldsymbol{P}$ 的 m 倍,作用线与 $\boldsymbol{P}$ 相同,但方向要取决于 m 的正负.

(b) 矢量与数量 m 和 n 的运算,即

$$(m+n)\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{P}+n\boldsymbol{P}$$
$$m(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q})=m\boldsymbol{P}+m\boldsymbol{Q}$$
$$m(n\boldsymbol{P})=n(m\boldsymbol{P})=(mn)\boldsymbol{P}$$

1.7　三维正交单位矢量

沿着正交的三维坐标轴 x, y 和 z 作单位矢量 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$. 建立右手坐标系如图 1-4 所示.

矢量 $\boldsymbol{P}$ 可以写成

$$\boldsymbol{P} = P_x\boldsymbol{i} + P_y\boldsymbol{j} + P_z\boldsymbol{k}$$

这里 $P_x\boldsymbol{i}$, $P_y\boldsymbol{j}$ 和 $P_z\boldsymbol{k}$ 是 $\boldsymbol{P}$ 沿着正交坐标轴 x, y 和 z 的分矢量, 如图 1-5 所示.

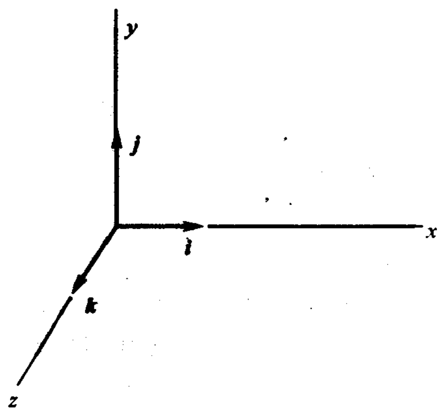


图 1-4

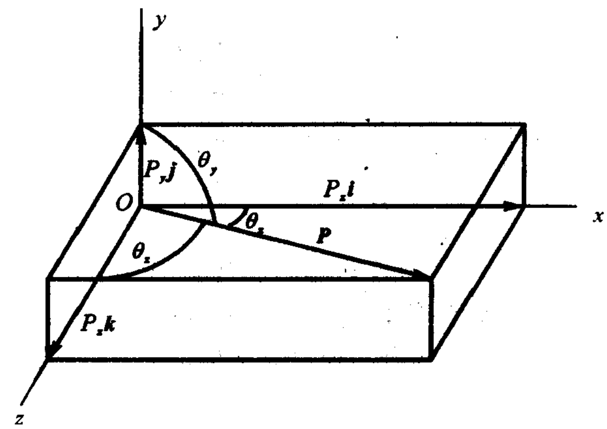


图 1-5

注意　$P_x = \boldsymbol{P}\cos\theta_x$,　$P_y = \boldsymbol{P}\cos\theta_y$,　$P_z = \boldsymbol{P}\cos\theta_z$.

1.8　矢径

坐标为(x, y, z)的矢径 $\boldsymbol{r}$ 可以写成

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \text{见图 1-6}.$$

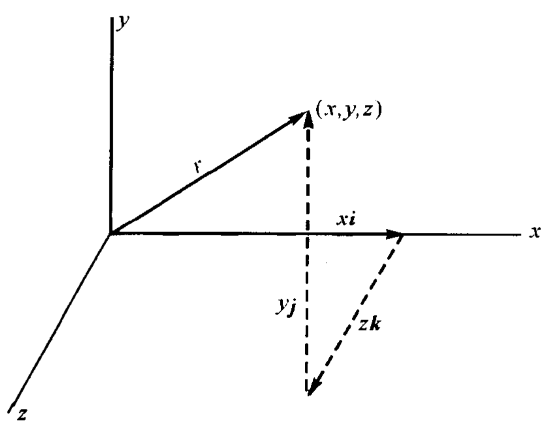


图 1-6

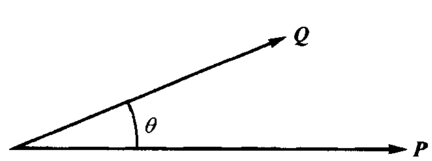


图 1-7

1.9　矢量的点积或标积

二矢量 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 的点积或标积写成 $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q}$, 是一个代数量, 其大小等于二矢量大小及其方向夹角 θ 的余弦的乘积(见图 1-7). 即

$$\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q} = PQ\cos\theta$$

下面列出标积的运算规律, 这里 m 表示标量:

$$\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{P}$$

$$\boldsymbol{P}\cdot(\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{S})=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{S}$$

$$(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q})\cdot(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T})=\boldsymbol{P}\cdot(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T})+\boldsymbol{Q}\cdot(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T})=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{S}+\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{T}+\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{S}+\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{T}$$

$$m(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{S})=(m\boldsymbol{P})\cdot\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\cdot(m\boldsymbol{Q})$$

因为 $\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 是正交的单位矢量,所以

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=(1)(1)\cos90^\circ=0$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=(1)(1)\cos0^\circ=1$$

且,如果 $\boldsymbol{P}=P_x\boldsymbol{i}+P_y\boldsymbol{j}+P_z\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{Q}=Q_x\boldsymbol{i}+Q_y\boldsymbol{j}+Q_z\boldsymbol{k}$,则

$$\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q}=P_xQ_x+P_yQ_y+P_zQ_z$$

$$\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{P}=P^2=P_x^2+P_y^2+P_z^2$$

矢量 $\boldsymbol{P}$ 沿着正交坐标轴的分矢量的大小可写成

$$P_x=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{i},\quad P_y=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{j},\quad P_z=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{k}$$

例如,

$$\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{i}=(P_x\boldsymbol{i}+P_y\boldsymbol{j}+P_z\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{i}=P_x+0+0=P_x$$

类似地,矢量 $\boldsymbol{P}$ 沿着任一条直线 L 的分矢量的大小可写成 $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{e}_L$,这里 $\boldsymbol{e}_L$ 是沿着直线 L 的单位矢量(有些作者使用 $\boldsymbol{u}$ 为单位矢量).矢量 $\boldsymbol{P}$ 的尾端 A 通过一平面,其头端 B 通过另一平面,此二平面垂直于直线 L,并与直线分别交于 C 和 D 点,如图 1-8 所示.矢量 $\boldsymbol{CD}$ 是矢量 $\boldsymbol{P}$ 沿 L 方向的分矢量,其大小等于 $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{e}_L=Pe_L\cos\theta$.

这些原理的应用见题 1.15 和 1.16.

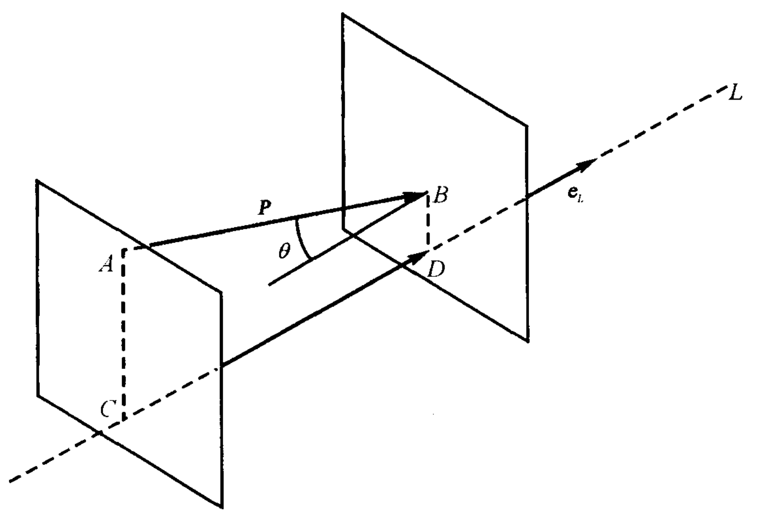


图 1-8

1.10 矢量的叉积或矢积

二矢量 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 矢积可以写成 $\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q}$,用 $\boldsymbol{R}$ 表示.其大小等于二矢量大小与其夹角正弦之积.矢量 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q}$ 沿 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 组成的平面的法向,其方向由右手螺旋法则决定,即从 $\boldsymbol{P}$ 的方向经过二矢量的最小夹角 θ 到 $\boldsymbol{Q}$ 方向.这样,如果用 $\boldsymbol{e}$ 表示已知方向 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q}$ 的单位矢量,叉积可以写成

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q}=(PQ\sin\theta)\boldsymbol{e},\quad 0\leqslant\theta\leqslant180^\circ$$

图 1-9 表明 $\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q}=-\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{P}$(不能交换).

下面列出矢积的运算法则,这里 m 是标量.

$$\boldsymbol{P}\times(\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{S})=\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{S}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q})\times(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T})&=\boldsymbol{P}\times(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T})+\boldsymbol{Q}\times(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T})\\&=\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{S}+\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{T}+\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{S}+\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{T}\end{aligned}$$

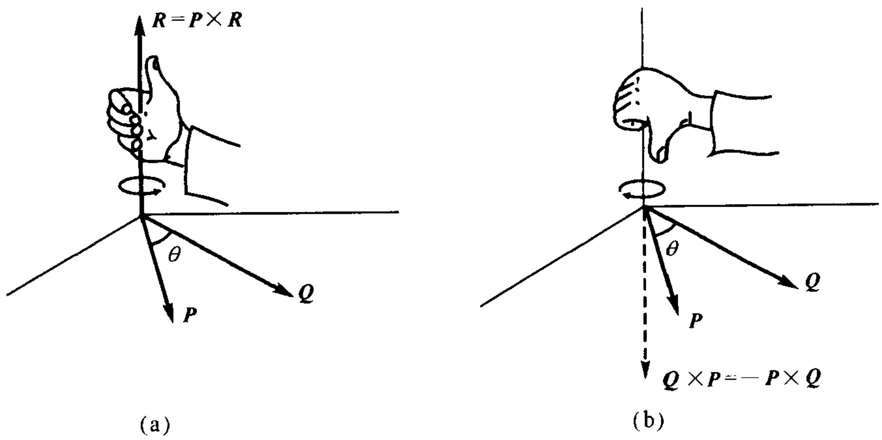


图 1-9

$$m(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q}) = (m\boldsymbol{P})\times\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}\times(m\boldsymbol{Q})$$

由于 $\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 是正交的,所以有

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k} = 0$$

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$$

并且,如果 $\boldsymbol{P} = P_x\boldsymbol{i} + P_y\boldsymbol{j} + P_z\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{Q} = Q_x\boldsymbol{i} + Q_y\boldsymbol{j} + Q_z\boldsymbol{k}$,则

$$\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q} = (P_yQ_z - P_zQ_y)\boldsymbol{i} + (P_zQ_x - P_xQ_z)\boldsymbol{j} + (P_xQ_y - P_yQ_x)\boldsymbol{k} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

矢积行列式的证明见例题 1.12.

1.11 矢量的微积分

(a) 以标量,例如时间 t 为变量的矢量 $\boldsymbol{P}$ 的微分运算规则如下.

令 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(t)$,即 $\boldsymbol{P}$ 是时间 t 的函数.$\Delta\boldsymbol{P}$ 是当时间从 t 变化到 $(t+\Delta t)$ 时 $\boldsymbol{P}$ 的增量.

$$\Delta\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(t+\Delta t) - \boldsymbol{P}(t)$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{P}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{P}(t+\Delta t) - \boldsymbol{P}(t)}{\Delta t}$$

如果 $\boldsymbol{P}(t) = P_x\boldsymbol{i} + P_y\boldsymbol{j} + P_z\boldsymbol{k}$,这里 P_x,P_y 和 P_z 是时间 t 的函数,我们有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{(P_x+\Delta P_x)\boldsymbol{i} + (P_y+\Delta P_y)\boldsymbol{j} + (P_z+\Delta P_z)\boldsymbol{k} - P_x\boldsymbol{i} - P_y\boldsymbol{j} - P_z\boldsymbol{k}}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta P_x\boldsymbol{i} + \Delta P_y\boldsymbol{j} + \Delta P_z\boldsymbol{k}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}P_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}P_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}P_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

下列运算是有效的:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{P}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{P}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\psi\boldsymbol{P}) = \psi\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{P}$$

这里 ψ 是 t 的数量函数.

(b) 关于对标量如时间 t 为变量的矢量 $\boldsymbol{P}$ 的积分运算规则如下.

让 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}(t)$，即 $\boldsymbol{P}$ 是时间 t 的函数，则

$$\int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{P}(t)\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1}(P_x\boldsymbol{i}+P_y\boldsymbol{j}+P_z\boldsymbol{k})\mathrm{d}t$$

$$=\boldsymbol{i}\int_{t_0}^{t_1}P_x\mathrm{d}t+\boldsymbol{j}\int_{t_0}^{t_1}P_y\mathrm{d}t+\boldsymbol{k}\int_{t_0}^{t_1}P_z\mathrm{d}t$$

1.12 量纲和单位制

在力学的学习中，用一套被称之为量纲的基本量，描述物体特性及其运动．在美利坚合众国，工程师们习惯用力、长度、时间的量纲作为基本系统．在全世界大部分国家，使用质量、长度和时间作为基本系统．在美国也有趋于使用第二种系统的趋势．

两套系统起源于牛顿的运动第二定律，即

$$\boldsymbol{R}=M\boldsymbol{a}$$

$\boldsymbol{R}$ 是作用在质点上的所有力的合力，$\boldsymbol{a}$ 是质点的加速度，M 是不变量被称之为质量．

美国通用单位制

在这套工程单位制中，长度的单位是英尺(ft)，时间的单位是秒(s)，力的单位是磅(lb)．质量为 M 的物体自由落到地面上，由于受重力加速度 g 的作用，产生地心引力 W．力 W 的重用磅(lb)来测量，加速度 g 用 $\mathrm{ft/s^2}$．牛顿第二定律写成标量形式为

$$W=Mg$$

重力加速度 g 的值随着地面位置的不同发生变化．在本书中取值为 32.2 $\mathrm{ft/s^2}$．表明重 1 磅的物体，自由落到地面上将获得 32.2 $\mathrm{ft/s^2}$ 的加速度．上式为

$$M=\frac{W}{g}=\frac{1\ \mathrm{lb}}{32.2\ \mathrm{ft/s^2}}=\frac{1}{32.2}\frac{\mathrm{lbs^2}}{\mathrm{ft}}=\frac{1}{32.2}\ \mathrm{slug}^{*}$$

在求解静力学问题时，不涉及到质量．但认识对于已知物体的质量的不变性是十分重要的．在月球上，对于相同质量的物体其引力是地球引力的 1/6．

国际单位制(SI)

在国际单位制(SI)** 中，质量的单位是千克(kg)，长度的单位是米(m)，时间的单位是秒(s)，力的单位是牛顿(N)，力的单位是导出单位，即质量为 1 千克的质点，获得 1 米/秒^2 的加速度时，作用于该质点的力为 1 牛顿．即

$$1\ \mathrm{N}=(1\ \mathrm{kg})(1\ \mathrm{m/s^2})=1\ \mathrm{kg\cdot m/s^2}=1\ \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-2}}$$

具有 1 kg 质量的物体自由落到地面时重力加速度的值将随位置的不同而变化．在本书中，假设重力加速度的平均值为 9.80 $\mathrm{m/s^2}$．这样 1 kg 质量的物体受到重力为

$$W=Mg=(1\ \mathrm{kg})(9.80\ \mathrm{m/s^2})=9.80\ \mathrm{kg\cdot m/s^2}=9.80\ \mathrm{N}$$

当然，在求解静力学问题的力系中，已知质量的千克数不是力，应使用作用在质量上的重力．在所有有关质量问题上，学生们应当记住以质量的千克数乘以 9.8 $\mathrm{m/s^2}$，才能得到用牛顿表示的重力．5 kg 质量受到的重力作用是 $5\times9.8=49$ N．

学生们应永远记住，在国际单位制中，毫米(mm)是工程制图标准长度单位．因此，所有工程制图量纲必须是毫米($1\ \mathrm{mm}=10^{-3}\ \mathrm{m}$)．另外，在数字与单位符号之间应留有空，例如 2.85 mm 而不是 2.85mm．当书写五位或更多数字时，应在小数点前 3 位留有空，如12 832.325．在国际单位制中不使用逗号．书写四位数字的值时，可以不留空隙，但五位或更多位数值时则留有空隙．

SI 是国际单位制缩写．附录 A 包含了国际单位制的表格及与现代米制的换算因数．在本

---

* slug 是"英尺-磅(力)-秒"单位制的质量单位，名称为斯——译注．

** SI 是国际单位制的缩写．

书中有50%的问题使用美国通用单位制,50%的问题使用国际单位制.

例 题

1.1 如图1-10(a)所示,在同一平面上,作用有与水平 x 轴夹角为30°的力120 lb和夹角90°的力−100 lb.试用平行四边形法则求此二力之合力.

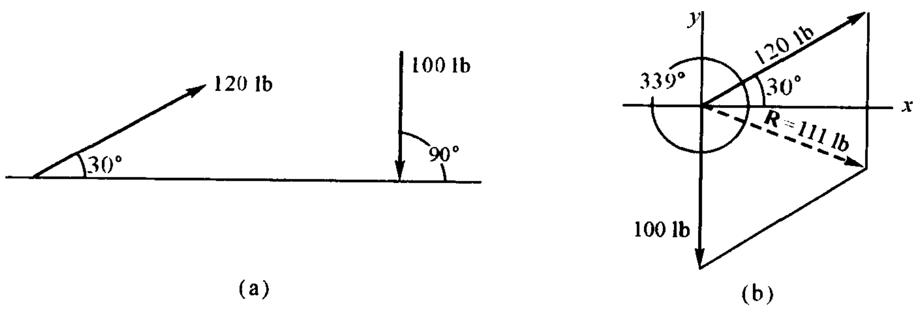


图1-10

解 ☞ 画原题中的力不必按比例,只需画一个草图.负号证明,100 lb的力沿着与水平线夹角90°的作用线铅垂向下.根据力的可传性,此力等效于与水平线夹角为270°的100 lb的力.

如图1-10(b),在平面上,让二矢量的尾端汇在一个公共点上,并选择合适的比例画出二矢量,完成平行四边形.选择比例测出合力 $\boldsymbol{R}$ 为111 lb.用量角器量出它与 x 轴的夹角为 $\theta_x = 339°$.

考虑如图1-10(b)所示的三角形,其中一边是与 y 轴重合.三角形的三边是 R,100和200.100与200两边的夹角是60°.应用余弦定理.

$$R^2 = \overline{120^2} + \overline{100^2} - 2(120)(100)\cos 60°, \quad R = 111 \text{ lb}$$

由正弦定理

$$\frac{120}{\sin\alpha} = \frac{111}{\sin 60°}, \quad \alpha = 69°$$

69°加上270°,则夹角是339°.

1.2 用三角形法则求题1.1.见图1-11.

解 ☞ 先选哪个矢量都可以.以120 lb的力为第一个矢量,在其末端连接100 lb的力的始端.最后,从120 lb力的始端连向100 lb力的末端即为合力.按选择的比例测量出大小和方向,其合力如题1.1相同.

1.3 同一平面上二力之合力为400 N,方向120°,其中一分力为200 N,方向20°.试求另一未知分力.见图1-12.

解 ☞ 选择公共点,并用方便的比例画出合力和另一已知分力.

作出已知力与合力的矢端连线,方向由力的矢端指向合力的矢端,则此连线代表未知力,用比例尺量出,此力大小为477 N,且 $\theta_x = 144°$.

此结果也可通过三角学定则的解析法解出.$\boldsymbol{R}$ 与200 N力之间的夹角是100°,因此,由余弦定理,未知力 F 为

$$F^2 = \overline{400^2} + \overline{200^2} - 2(400)(200)\cos 100°, \quad F = 477 \text{ N}$$

令力 $\boldsymbol{F}$ 与200 N之间的夹角为 α,则由正弦定理

$$\frac{477}{\sin 100} = \frac{400}{\sin\alpha}, \quad \alpha = 55.7°, \quad \theta_x = 144°$$

1.4 在同一平面中,从280 N,320°的力中减去130 N,60°的力.见图1-13.

解 ☞ 由平行四边形法则,将280 N,320°的力与−130 N,60°的力求矢量和,可获得合力为330 N,297°.所有角度都是与 x 轴的夹角.

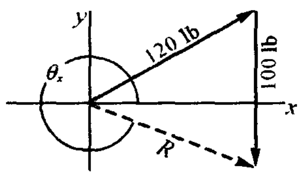


图 1-11

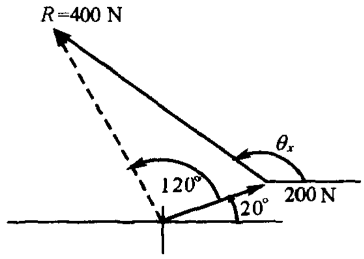


图 1-12

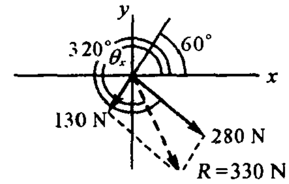
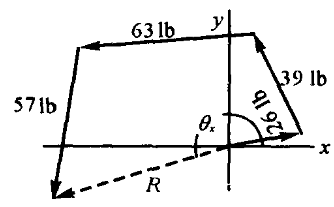


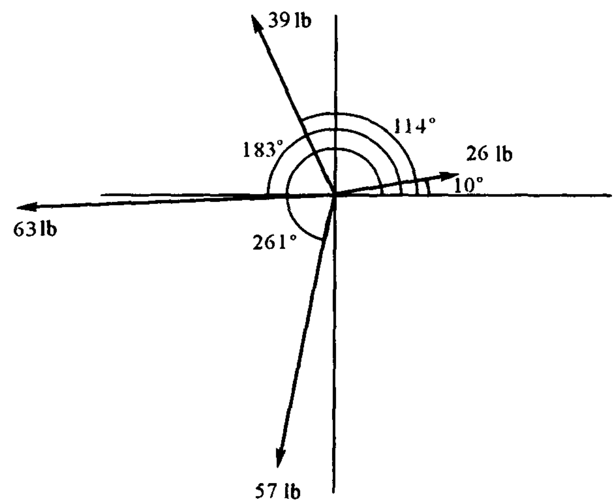
图 1-13

1.5 试求如下平面力系的合力:26 lb, 10°;39 lb, 114°;63 lb, 183°;57 lb, 261°, 见图 1-14.

解 ☞ 应用力多边形法则,将诸矢量依次首尾相接,见图 1-14(a).



(a)



(b)

图 1-14

合矢量则从第一个矢量的始端连接到最后一个矢量的头端,并用比例尺测出合力, $R = 65$ lb, $\theta_x = 197°$.

本题也可以用求解合力的正交分量的解析法解出.将图 1-14(b)中每个力求出沿 x、y 方向的垂直分量,因为沿 x 轴的各分量求和是求代数和, y 方向相同.现在,如果分别求出了 x 与 y 的分量,则相当于求出了合力在 x, y 方向的两个分量,这样

$$R_x = 26\cos 10° + 39\cos 114° + 63\cos 183° + 57\cos 261° = -62.1$$

$$R_y = 26\sin 10° + 39\sin 114° + 63\sin 183° + 57\sin 261° = -19.5$$

$$R = \sqrt{(1-62.1)^2 + (-19.5)^2}, \quad R = 65 \text{ lb}$$

$$\tan\theta_x = \frac{-19.5}{-62.1}, \quad \theta_x = 17°, \quad \theta = 180° + 17° = 197°$$

1.6 在图 1-15 中,力 $\boldsymbol{F}$ 沿 OH 方向的垂直分量为 10 lb,且力 $\boldsymbol{F}$ 与 x 轴正向夹角为 60°,试求力 $\boldsymbol{F}$ 的大小.

解 ☞ 力 $\boldsymbol{F}$ 沿 OH 的分量是 $F\cos\theta$,即 $F\cos 15° = 10$ 或 $F = 10.35$ lb.

1.7 一个重 80 kg 的人站在与水平面夹角为 20°的木板上,求人的重力(a)沿木板的法向分量,(b)平行木板的分量.见图 1-16.

解 ☞ (a) 重力矢量与木板法向夹角为 20°,大小为 80(9.8) = 784 N.有比例尺量出法向分量为 740 N,由三角学,法向分量为 784 cos20° = 737 N.

(b) 由比例尺量出其平行分量为 270 N.由三角学,应是 784cos70° = 268 N.

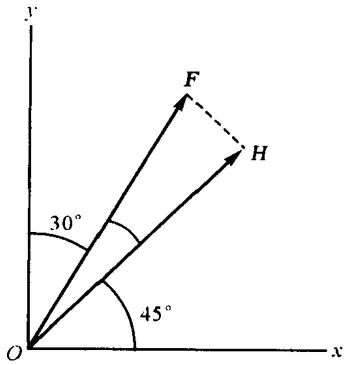


图 1-15

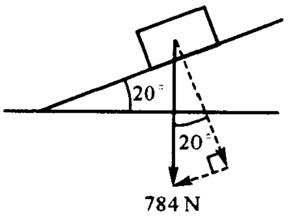


图 1-16

1.8 如图 1-17(a)所示，一木块静止放在与水平线成 22°夹角的斜面上，其上作用一与水平线夹角为 60°的力 $P = 235$ N. 试用代数方法解出(b) P 的水平及铅垂分量，(c) P 与斜面平行及垂直分量.

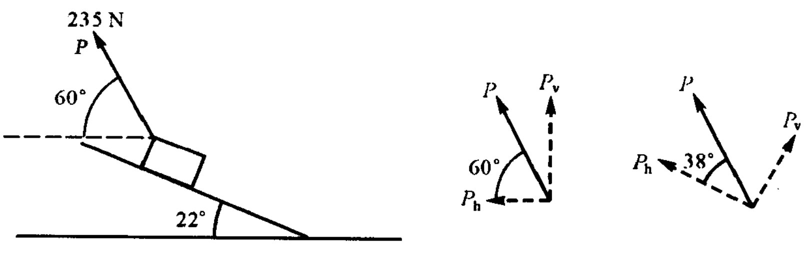


图 1-17

解 ☞ (a) 水平分量 P_h，方向指向左，大小等于 $235\cos60° = 118$ N. 垂直分量 P_v，铅垂向上，大小等于 $235\sin60° = 204$ N，如图 1-17(b)所示.

(b)分量 $P_{\parallel}$，平行与斜面，指向上，等于 $235\cos(60° - 22°) = 15$ N，分量 $P_{\perp}$ 沿斜面法向，大小等于 $235\sin38° = 145$ N，如图 1-17(c)所示.

1.9 如图 1-18 所示的 3 个力，若合力大小为 20 lb，沿 y 轴铅垂向下，试求力 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 的大小.

解 ☞ 由于合力是 20 lb，并且沿 y 轴指向上，则有 $R_{xz} = 0, R_y = 20$ lb.

分力沿 x 轴的代数和等于合力在 x 轴的投影 $R_x = P\cos30° - 90\cos40° = 0$，解出 $P = 79.6$ lb. 同样地，$R_y = P\sin30° + 90\sin40° - F = 20$，得 $F = 77.7$ lb.

1.10 如图 1-19 所示，坐标轴 x, y 和 z 沿正六面体的三个边的方向，且三边长度分别为 4，3 和 2 m. 如果对角线 OP 代表 50 N 的力，试求该力沿 x, y 和 z 的分量. 并用单位矢量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 符号表示力矢量.

解 ☞ 让 $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ 表示对角线 OP 与坐标轴 x, y, z 之间的夹角. 则

$$P_x = P\cos\theta_x, \quad P_y = P\cos\theta_y, \quad P_z = P\cos\theta_z$$

长度 $OP = \sqrt{4^2 + 3^2 + 2^2} = 5.38$ m. 这里

$$\cos\theta_x = \frac{4}{5.38}, \quad \cos\theta_y = \frac{3}{5.38}, \quad \cos\theta_z = \frac{2}{5.38}$$

每个分量均沿坐标轴的正方向，有

$$P_x = 50\cos\theta_x = 37.2 \text{ N}, \quad P_y = 50\cos\theta_y = 27.9 \text{ N}, \quad P_z = 50\cos\theta_z = 18.6 \text{ N}$$

矢量 $\boldsymbol{P} = P_x\boldsymbol{i} + P_y\boldsymbol{j} + P_z\boldsymbol{k} = 37.2\boldsymbol{i} + 27.9\boldsymbol{j} + 18.6\boldsymbol{k}$ N.

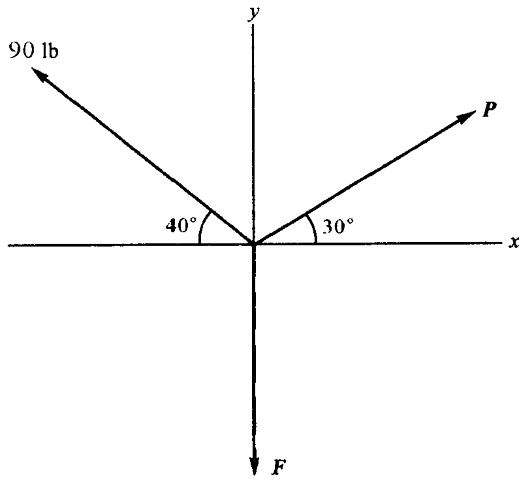


图 1-18

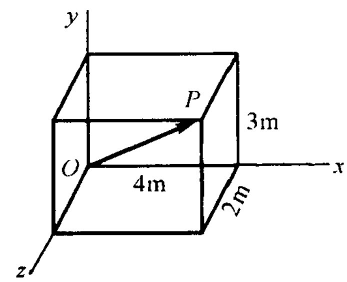


图 1-19

1.11　一力 100 N, 力的作用线通过坐标原点及点(2, −4, 1). 试求该力沿 x, y, z 轴分量. 并用单位矢量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 表示.

解　☞ 力作用线的方向余弦为

$$\cos\theta_x = \frac{2}{\sqrt{(2)^2 + (-4)^2 + (1)^2}} = 0.437,\quad \cos\theta_y = \frac{-4}{\sqrt{21}} = -0.873,\quad \cos\theta_z = 0.281$$

这里 $P_x = 43.7$ N, $P_y = -87.3$ N, $P_z = 21.8$ N;矢量 $\boldsymbol{P} = 43.7\,\boldsymbol{i} - 87.3\,\boldsymbol{j} + 21.8\,\boldsymbol{k}$ N.

1.12　试证二矢量 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 的矢积等于.

$$\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{Q} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

解　☞ 写出已知矢量的分量形式并展开矢积表达式, 得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{Q} &= (P_x\boldsymbol{i} + P_y\boldsymbol{j} + P_z\boldsymbol{k}) \times (Q_x\boldsymbol{i} + Q_y\boldsymbol{j} + Q_z\boldsymbol{k}) \\ &= (P_xQ_x)\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} + (P_xQ_y)\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} + (P_xQ_z)\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} + (P_yQ_x)\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} + (P_yQ_y)\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} \\ &\quad + (P_yQ_z)\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} + (P_zQ_x)\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} + (P_zQ_y)\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} + (P_zQ_z)\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = 0$;并且 $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k}$ 等, 有

$$\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{Q} = (P_xQ_y)\boldsymbol{k} - (P_xQ_z)\boldsymbol{j} - (P_yQ_x)\boldsymbol{k} + (P_yQ_z)\boldsymbol{i} + (P_zQ_x)\boldsymbol{j} - (P_zQ_y)\boldsymbol{i}$$

整理得

$$\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{Q} = (P_yQ_z - P_zQ_y)\boldsymbol{i} + (P_zQ_x - P_xQ_z)\boldsymbol{j} + (P_xQ_y - P_yQ_x)\boldsymbol{k}$$

写成行列式形式

$$\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{Q} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

注意, 在矢积中, 第一个矢量 $\boldsymbol{P}$ 的分量数值, 写在行列式的中间一行.

1.13　一力 $\boldsymbol{F} = 2.63\boldsymbol{i} + 4.28\boldsymbol{i} - 5.92\boldsymbol{k}$ N, 作用点过原点. 试求此力的大小及与 3 个坐标轴 x, y, z 之间的夹角.

解　☞

$$F = \sqrt{(2.63)^2 + (4.28)^2 + (-5.92)^2} = 7.75\ \text{N}$$

$$\cos\theta_x = +\frac{2.63}{7.75},\quad \theta_x = 70.2^\circ$$

$$\cos\theta_y = +\frac{4.28}{7.75},\quad \theta_y = 56.3^\circ$$

$$\cos\theta_z = -\frac{5.92}{7.75}, \quad \theta_z = 139.8°$$

1.14　试求 $\boldsymbol{P} = 4.82\boldsymbol{i} - 2.33\boldsymbol{j} + 5.47\boldsymbol{k}$ N 与 $\boldsymbol{Q} = -2.81\boldsymbol{i} - 60.9\boldsymbol{j} + 1.12\boldsymbol{k}$ m 的标积.

解 ☞

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{Q} &= P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z \\ &= (4.82)(-2.81) + (-2.33)(-6.09) + (5.47)(1.12) \\ &= 6.72 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

1.15　一直线 L 起点(2,3,0),并过点(−2,4,6),试求单位矢量为 $\boldsymbol{e}_L$ 及矢量 $\boldsymbol{P} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ 沿直线 L 的投影.

解 ☞ 直线 L 沿 x 方向由 +2 到 −2,改变量为 −4. 沿 y 方向的改变量是 4−3=1. 沿 z 方向的改变量是 6−0= +6. 则单位矢量为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_L &= \frac{-4}{\sqrt{(-4)^2 + (+1)^2 + (+6)^2}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{53}}\boldsymbol{j} + \frac{6}{\sqrt{53}}\boldsymbol{k} \\ &= -0.549\boldsymbol{i} + 0.137\boldsymbol{j} + 0.823\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

力 $\boldsymbol{P}$ 的投影为

$$\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{e}_L = 2(-0.549) + 3(0.137) - 1(0.823) = -1.41$$

1.16　试求力 $\boldsymbol{P} = 10\boldsymbol{i} - 8\boldsymbol{j} + 14\boldsymbol{k}$ lb,沿过(2, −5,3)、(5,2, −4)两点的直线 L 的投影.

解 ☞ 沿 L 方向的单位矢量为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_L &= \frac{5-2}{\sqrt{(5-2)^2 + [2-(-5)]^2 + (-4-3)^2}}\boldsymbol{i} + \frac{2-(-5)}{\sqrt{107}}\boldsymbol{j} + \frac{-4-3}{\sqrt{107}}\boldsymbol{k} \\ &= 0.290\boldsymbol{i} + 0.677\boldsymbol{j} - 0.677\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{P}$ 在 L 上的投影为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{e}_L &= (10\boldsymbol{i} - 8\boldsymbol{j} + 14\boldsymbol{k}) \cdot (0.29\boldsymbol{i} + 0.677\boldsymbol{j} - 0.677\boldsymbol{k}) \\ &= 2.90 - 5.42 - 9.478 = -12.0 \text{ lb} \end{aligned}$$

负号表明,投影方向与 L 的正向相反.

1.17　求 $\boldsymbol{P} = 2.85\boldsymbol{i} + 4.67\boldsymbol{j} - 8.09\boldsymbol{k}$ ft 与 $\boldsymbol{Q} = 28.3\boldsymbol{i} + 44.6\boldsymbol{j} + 53.3\boldsymbol{k}$ lb 的矢积.

解 ☞

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P} \times \boldsymbol{Q} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2.85 & 4.67 & -8.09 \\ 28.5 & 44.6 & 53.3 \end{vmatrix} \\ &= \boldsymbol{i}[(4.67)(53.3) - (44.6)(-8.09)] - \boldsymbol{j}[(2.85)(53.3) - (28.3)(-8.09)] \\ &\quad + \boldsymbol{k}[(2.85)(44.6) - (28.3)(4.67)] \\ &= \boldsymbol{i}(249 + 361) - \boldsymbol{j}(152 + 229) + \boldsymbol{k}(127 - 132) \\ &= 610\boldsymbol{i} - 381\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k} \text{ lb-ft} \end{aligned}$$

1.18　试求矢径 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + 6y^2\boldsymbol{j} - 3z\boldsymbol{k}$ 对时间的导数.这里 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 是常矢量.

解 ☞ 对时间的导数为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + 12y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} - 3\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

1.19　试求速度矢量 $\boldsymbol{v} = t^2\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ ft/s,从时间 $t_1 = 1$ s 到时间 $t_2 = 3$ s 的积分.这里 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 是常矢量.

解 ☞

$$\begin{aligned} \int_1^3 (t^2\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k})\mathrm{d}t &= \boldsymbol{i}\int_1^3 t^2\mathrm{d}t + \boldsymbol{j}\int_1^3 2t^2\mathrm{d}t - \boldsymbol{k}\int_1^3 \mathrm{d}t \\ &= 8.67\,\boldsymbol{i} + 8.00\,\boldsymbol{j} - 2.00\,\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

补充习题

1.20　试求平面力系 100 N,0°和 200 N,90°的合力.