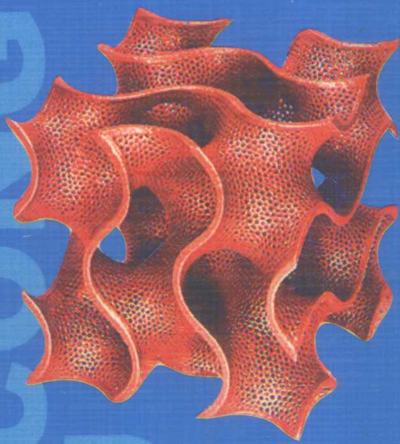
数学奥林匹克小丛书 高中卷 1

Shuxue Aolinpike XIAOCONGSHU



集合

刘诗雄 编著

华东师范大学出版社

olinpike

数学奥林匹克小丛书

高中卷 1

集合

olinpike Xiao Congshu

刘诗雄 编著

华东师范大学出版社

图书在版编目（C I P）数据

数学奥林匹克小丛书．高中卷．集合／刘诗雄编著．—上海：华东师范大学出版社，2005.3
ISBN 7-5617-4142-1

I.数... II.刘... III.数学课-高中-教学参考资料 IV.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第019487号

数学奥林匹克小丛书·高中卷

集　合

编　　著　刘诗雄
策划组稿　倪　明
责任编辑　审校部编辑工作组
特约编辑　胡海霞
封面设计　高　山
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
市场部 电话 021-62865537
门市(邮购) 电话 021-62869887
门市地址 华东师大校内先锋路口
业务电话　上海地区 021-62232873
华东 中南地区 021-62458734
华北 东北地区 021-62571961
西南 西北地区 021-62232893
业务传真　021-62860410 62602316
http://www.ecnupress.com.cn
社　　址　上海市中山北路3663号
邮编 200062

印 刷 者　江苏如东印刷厂
开　　本　787×960 16开
印　　张　10
字　　数　170千字
版　　次　2005年4月第一版
印　　次　2005年6月第二次
印　　数　11 001-16 100
书　　号　ISBN 7-5617-4142-1/G·2371
定　　价　12.00元

出 版 人　朱杰人

（如发现本版图书有印订质量问题，请寄回本社市场部调换或电话021-62865537联系）

数学奥林匹克小丛书 编委会

Shuxue A

Xiao

Congshu

Shuxue

总序

数学竞赛像其他竞赛活动一样，是青少年学生的一种智力竞赛. 在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中，数学竞赛的历史最悠久、国际性强，影响也最大. 我国于1956年开始举行数学竞赛，当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动，并组织出版了一系列青少年数学读物，激励了一大批青年学生立志从事科学事业. 我国于1986年起参加国际数学奥林匹克，多次获得团体总分第一，并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克，这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位，为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明，凡是开展好的地区和单位，都能大大激发学生的学习数学的兴趣，有利于培养创造性思维，提高学生的学习效率. 这项竞赛活动，将健康的竞争机制引进数学教学过程中，有利于选拔人才. 由数学竞赛选拔的优胜者，既有踏实广泛的数学基础，又有刻苦钻研、科学的学习方法，其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者. 在美国，数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺 (J.W.Milnor)、芒福德 (D.B.Mumford)、奎伦 (D.Quillen) 等都是菲尔兹数学奖的获得者；在波兰，著名数论专家辛哲尔 (A.Schinzel) 学生时代是一位数学竞赛优胜者；在匈牙利，著名数学家费叶尔 (L.Fejér)、里斯 (M.Riesz)、舍贵 (G.Szegö)、哈尔 (A.Haar)、拉多 (T.Radó) 等都曾是数学竞赛获奖者. 匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家，产生了同它的人口不成比例的许多大数学家！

在开展数学竞赛的活动同时，各学校能加强联系，彼此交流数学教学经验，从这种意义上来说，数学竞赛可能成为数学课程改革的“催化剂”，成为培养优秀人才的有力措施.

不过，应当注意在数学竞赛活动中，注意普及与提高相结合，而且要以普及为主，使竞赛具有广泛的群众基础，否则难以持久.

当然，现在有些人过于关注数学竞赛的成绩，组织和参与都具有很强的功利目的，过分扩大数学竞赛的作用，这些都是不正确的，违背了开展数学竞赛活动的本意．这些缺点有其深层次的社会原因，需要逐步加以克服，不必因为有某些缺点，就否定这项活动．

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版．这套书，规模大、专题细．据我所知，这样的丛书还不多见．这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述，而且对竞赛题作了精到的分析解答，不少出自作者自己的研究所得，是一套很好的数学竞赛专题教程，也是中小学生和教师的参考书．

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员，不少是国家集训队的教练和国家队的领队．他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在IMO上取得成绩、为国争光作出了贡献，为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动．华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向IMO》等竞赛图书基础上，策划组织了这套丛书，花了不少心血．我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作，并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好．

王元

王元，著名数学家，中国科学院院士，曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席．

目　录

1 元素与集合

一、集合的概念

集合是一个原始的概念，是数学中一个不定义的概念. 尽管如此，对一个具体的集合而言，很多情况下我们还是可以采用列举法或描述法给出它的一个准确而清晰的表示.

用描述法表示一个集合基于下面的概括原则：

概括原则 对任给的一个性质 P，存在一个集合 S，它的元素恰好是具有性质 P 的所有对象，即

$$S=\{x \mid P(x)\},$$

其中 $P(x)$ 表示"x 具有性质 P".

由此，我们知道集合的元素是完全确定的，同时它的元素之间具有互异性和无序性.

集合的元素个数为有限数的集合称为有限集，元素个数为无限数的集合称为无限集. 如果有限集 A 的元素个数为 n，则称 A 为 n 元集，记作 $|A|=n$. 空集不含任何元素.

例 1 设集合 $M=\left\{x\left|\dfrac{ax-5}{x^2-a}<0,\ x\in\mathbf{R}\right.\right\}$.

(1) 当 $a=4$ 时，化简集合 M；

(2) 若 $3\in M$，且 $5\notin M$，求实数 a 的取值范围.

分析 化简集合 M，实际上就是解不等式 $\dfrac{ax-5}{x^2-a}<0$.

解 (1) 因为 $a=4$，所以

$$\frac{4x-5}{x^2-4}<0,$$

即
$$\left(x-\frac{5}{4}\right)(x+2)(x-2)<0.$$

由图 1－1 知，$x<-2$ 或 $\frac{5}{4}<x<2$.

所以 $M=(-\infty,\ -2)\cup\left(\frac{5}{4},\ 2\right)$.

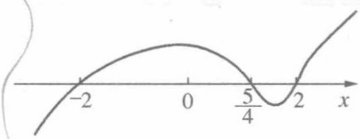


图 1－1

(2) 由 $3\in M$，得 $\frac{3a-5}{3^2-a}<0$，即

$$\left(a-\frac{5}{3}\right)(a-9)>0,\text{所以}$$

$$a<\frac{5}{3}\text{ 或 }a>9. \qquad ①$$

由 $5\notin M$ 得，$\frac{5a-5}{5^2-a}\geqslant 0$ 或 $5^2-a=0$，所以

$$1\leqslant a\leqslant 25. \qquad ②$$

由 ①、② 得，$a\in\left[1,\ \frac{5}{3}\right)\cup(9,\ 25]$.

说明 $5\notin M$ 隐含了条件 $5^2-a=0$，这是容易被忽视的.

由概括原则我们知道，判断一个对象 x 是否为集合 S 的元素，等价于判断 x 是否具有性质 P.

例 2 设 A 是两个整数平方差的集合，即 $A=\{x\mid x=m^2-n^2,\ m,\ n\in\mathbf{Z}\}$. 证明：

(1) 若 $s,\ t\in A$，则 $st\in A$.

(2) 若 $s,\ t\in A,\ t\neq 0$，则 $\frac{s}{t}=p^2-q^2$，其中 p、q 是有理数.

分析 (1) 想办法将 st 表示为两个整数的平方差.

证明 (1) 由 $s,\ t\in A$，可设

$$s=m_1^2-n_1^2,\ t=m_2^2-n_2^2,$$

其中 m_1、n_1、m_2、n_2 均为整数. 于是

$$\begin{aligned}st&=(m_1^2-n_1^2)(m_2^2-n_2^2)\\&=m_1^2m_2^2+2m_1m_2n_1n_2+n_1^2n_2^2-m_1^2n_2^2-2m_1m_2n_1n_2-m_2^2n_1^2\end{aligned}$$

$$=(m_1m_2+n_1n_2)^2-(m_1n_2+m_2n_1)^2,$$

即 st 是两个整数的平方差，故 $st\in A$.

(2) 由于 $s,t\in A$，由(1)知 $st\in A$. 令 $st=m^2-n^2$，m、n 是整数. 又 $t\neq 0$，因此

$$\frac{s}{t}=\frac{st}{t^2}=\left(\frac{m}{t}\right)^2-\left(\frac{n}{t}\right)^2.$$

而 $\frac{m}{t}$、$\frac{n}{t}$ 均为有理数，故命题得证.

二、集合与集合的关系

在两个集合的关系中，子集是一个重要的概念，它的两个特例是真子集和集合相等. 从下面"充分必要条件"的角度来理解子集、真子集和集合相等的概念无疑是十分有益的：

子集：$A\subseteq B\Leftrightarrow$ 对任意 $x\in A$，恒有 $x\in B$；

真子集：$A\subsetneqq B\Leftrightarrow\begin{cases}A\subseteq B,\\ \text{且存在 } x'\in B\text{，但 } x'\notin A;\end{cases}$

集合相等：$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$.

容易证明两个集合关系的如下性质：

1. $\varnothing\subseteq A$, $\varnothing\subsetneqq A\ (A\neq\varnothing)$;
2. $A\subseteq B,\ B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$;
3. n 元集 A 总共有 2^n 个不同的子集.

例3 设函数 $f(x)=x^2+ax+b\ (a,\ b\in\mathbf{R})$，集合 $A=\{x\mid x=f(x),\ x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid x=f(f(x)),\ x\in\mathbf{R}\}$.

(1) 证明：$A\subseteq B$；

(2) 当 $A=\{-1,\ 3\}$ 时，求集合 B.

分析 欲证 $A\subseteq B$，只需证明方程 $x=f(x)$ 的根必是方程 $x=f(f(x))$ 的根.

解 (1) 对任意的 $x_0\in A$，有 $x_0=f(x_0)$，$x_0\in\mathbf{R}$.

于是

$$f(f(x_0))=f(x_0)=x_0.$$

故 $x_0\in B$，所以 $A\subseteq B$.

(2) 因 $A=\{-1,\ 3\}$，所以

$$\begin{cases}(-1)^2+a\cdot(-1)+b=-1,\\ 3^2+a\cdot 3+b=3,\end{cases}$$

解之得 $a=-1$, $b=-3$,故 $f(x)=x^2-x-3$. 由 $x=f(f(x))$ 得

$$(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-x-3=0.$$

因为 $A\subseteq B$,故 -1 和 3 是上面方程的两个根,从而因式分解可得

$$(x^2-2x-3)(x^2-3)=0,$$

解得 $x=-1$, 3, $\pm\sqrt{3}$.

所以,$B=\{-1, 3, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$.

例 4 设关于 x 的不等式 $\left|x-\dfrac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\dfrac{(a-1)^2}{2}$ 和 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0$ $(a\in\mathbf{R})$ 的解集依次为 A、B,求使 $A\subseteq B$ 的实数 a 的取值范围.

分析 要由 $A\subseteq B$ 求出 a 的范围,必须先求出 A 和 B.

解 由 $\left|x-\dfrac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\dfrac{(a-1)^2}{2}$,得

$$-\frac{(a-1)^2}{2}\leqslant x-\frac{(a+1)^2}{2}\leqslant\frac{(a-1)^2}{2},$$

解之,得 $2a\leqslant x\leqslant a^2+1$. 所以,$A=\{x \mid 2a\leqslant x\leqslant a^2+1\}$.

由 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0$,得

$$(x-2)[x-(3a+1)]\leqslant 0.$$

当 $a\geqslant\dfrac{1}{3}$ 时,$B=\{x \mid 2\leqslant x\leqslant 3a+1\}$;当 $a<\dfrac{1}{3}$ 时,$B=\{x \mid 3a+1\leqslant x\leqslant 2\}$.

因为 $A\subseteq B$,所以

$$\begin{cases}a\geqslant\dfrac{1}{3},\\ 2a\geqslant 2,\\ a^2+1\leqslant 3a+1,\end{cases} \quad\text{或}\quad \begin{cases}a<\dfrac{1}{3},\\ 2a\geqslant 3a+1,\\ a^2+1\leqslant 2.\end{cases}$$

解之,得 $1\leqslant a\leqslant 3$ 或 $a=-1$.

所以,a 的取值范围是 $[1, 3]\cup\{-1\}$.

说明 上述解答是通过对参数 a 的分类讨论完成的,其实还有更直接的解法.从方程的角度看,$A\subseteq B$ 等价于方程 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)=0$ 在区间 $(-\infty,\ 2a]$ 和 $[a^2+1,\ +\infty)$ 内各有一个实根.设 $f(x)=x^2-3(a+1)x+2(3a+1)$,由 $A\subseteq B$,得

$$\begin{cases}f(2a)\leqslant 0,\\ f(a^2+1)\leqslant 0\end{cases}\Rightarrow 1\leqslant a\leqslant 3 \text{ 或 } a=-1.$$

如果 A、B 是两个相等的数集,那么可以得到 $A=B$ 的两个非常有用的必要条件:

(1) 两个集合的元素之和相等;

(2) 两个集合的元素之积相等.

例 5 求所有的角 α,使得集合

$$\{\sin\alpha,\ \sin 2\alpha,\ \sin 3\alpha\}=\{\cos\alpha,\ \cos 2\alpha,\ \cos 3\alpha\}.$$

解 设 $\alpha\in[0,\ 2\pi)$.由已知得

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha=\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha,$$

即 $$2\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha+\sin 2\alpha=2\cos 2\alpha\cdot\cos\alpha+\cos 2\alpha,$$

$$\sin 2\alpha\cdot(2\cos\alpha+1)=\cos 2\alpha(2\cos\alpha+1).$$

所以 $$\sin 2\alpha=\cos 2\alpha \text{ 或 } \cos\alpha=-\frac{1}{2}(\text{舍去}).$$

从而 $$\begin{aligned}0&=\sin 2\alpha-\cos 2\alpha\\ &=\sin 2\alpha-\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)\\ &=2\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

于是 $\alpha=\frac{\pi}{8},\ \frac{5\pi}{8},\ \frac{9\pi}{8},\ \frac{13\pi}{8}$.

又 $\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha\cdot\sin 3\alpha=\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 3\alpha$,且 $\sin 2\alpha=\cos 2\alpha$,因此

$$\cos 4\alpha=0,$$

$$\alpha=\frac{(2k-1)\pi}{8},\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ 8.$$

经验证,$\alpha=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\ (k\in\mathbf{Z})$ 满足题意.

说明 元素之和(积)相等只是两个集合相等的必要条件,因此还必须检查集合的元素是否互异.

三、相关问题举例

我们来研究一些与元素和集合有关的稍难的问题,解决这些问题需要借助其他数学工具.

例6 设 S 为非空数集,且满足:(i) $2\notin S$;(ii) 若 $a\in S$,则 $\frac{1}{2-a}\in S$.

证明:

(1) 对一切 $n\in\mathbf{N}^*$, $n\geqslant 3$,有 $\frac{n}{n-1}\notin S$;

(2) S 或者是单元素集,或者是无限集.

分析 对于(1),因为 $n\in\mathbf{N}^*$,可以考虑采用数学归纳法.

证明 (1) 因为 S 非空,所以存在 $a\in S$,且 $a\neq 2$.

我们用数学归纳法证明下面的命题:

若 $a\in S$,则对 $k\in\mathbf{N}^*$, $\frac{(k-1)-(k-2)}{k-(k-1)a}\in S$,且 $a\neq\frac{k+1}{k}$.

当 $k=1$ 时,显然 $a\in S$,且 $a\neq 2$ 成立.

设 $k\in\mathbf{N}^*$, $\frac{(k-1)-(k-2)a}{k-(k-1)a}\in S$ 且 $a\neq\frac{k+1}{k}$ 成立.

由(ii)得

$$\frac{1}{2-\frac{(k-1)-(k-2)a}{k-(k-1)a}}\in S,$$

化简得
$$\frac{k-(k-1)a}{(k+1)-ka}\in S.$$

又 $\frac{k-(k-1)a}{(k+1)-ka}\neq 2$,所以 $a\neq\frac{k+2}{k+1}$.

综上,由归纳原理知,对 $k\in\mathbf{N}^*$ 命题成立.从而,对一切 $n\in\mathbf{N}^*$, $n\geqslant 3$, $\frac{n}{n-1}\notin S$ 成立.

(2) 由(1)知,若 $a\in S$, $a\neq\frac{m}{m-1}$ $(m\in\mathbf{N}^*,\ m\geqslant 3)$,则 $\frac{(m-1)-(m-2)a}{m-(m-1)a}\in S$.

所以，当 $n \geqslant 2$，$m \geqslant 2$，$m \neq n$ 时，

$$\frac{(n-1)-(n-2)a}{n-(n-1)a}=\frac{(m-1)-(m-2)a}{m-(m-1)a}$$

$$\Leftrightarrow m(n-1)-(n-1)(m-1)a-m(n-2)a+(m-1)(n-2)a^2$$

$$=n(m-1)-(n-1)(m-1)a-n(m-2)a+(n-1)(m-2)a^2$$

$$\Leftrightarrow n-m+2(m-n)a+(n-m)a^2=0$$

$$\Leftrightarrow (n-m)(1-2a+a^2)=0$$

$$\Leftrightarrow a=1(\text{因为 } n\neq m).$$

因为 $\mathbf{N}^*$ 是无限集，所以 S 或者为单元素集 $\{1\}$（当且仅当 $a=1$），或者为无限集.

例 7 用 $\sigma(S)$ 表示非空的整数集合 S 的所有元素的和. 设 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_{11}\}$ 是正整数的集合，且 $a_1<a_2<\cdots<a_{11}$；又设对每个正整数 $n\leqslant 1\,500$，都存在 A 的子集 S，使得 $\sigma(S)=n$. 求 a_{10} 的最小可能值.

分析 要求 a_{10} 的最小值，显然应使 $\sigma(A)=1\,500$. 又由题设，应使 a_{11} 尽可能大，且前 10 个数之和不小于 750，故取 $a_{11}=750$. 考虑整数的二进制表示，由 $1+2+\cdots+2^7=255$ 知，前 8 个数应依次为 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128. 这时 $a_9+a_{10}=495$，从而有 $a_{10}=248$.

解 取 $A_0=\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 247, 248, 750\}$，易知 A_0 满足题目要求，且 $a_{10}=248$. 故 a_{10} 的最小可能值不超过 248.

另一方面，a_{10} 不可能比 248 更小. 这是因为前 10 个数之和不能小于 750，否则设 $\sum\limits_{i=1}^{10}a_i=m$，$m<750$，则 $a_{11}=1\,500-m$，对 $n\in(m, 1\,500-m)$，显然不存在 A 的子集 S，使 $\sigma(S)=n$. 因 $1+2+\cdots+2^7=255$，由整数的二进制表示知，其前 8 个数之和最大为 255. 故 a_9+a_{10} 的最小可能值为 495，从而 a_{10} 至少为 248.

综上知，a_{10} 的最小可能值为 248.

说明 本例采用了构造法. 直接构造一个符合题设的 A_0，然后证明 A_0 具有所要求的性质. 这种方法在解有关集合和组合的问题中经常用到.

例 8 设 S 是由 $2n$ 个人组成的集合. 求证：其中必定有两个人，他们的公共朋友的个数为偶数.

证明 用反证法：设 S 为一个由 $2n$ 个人组成的集合，S 中每两个人的

公共朋友数为奇数.

对 S 中的任意一个人 A,记 $M=\{F_1, \cdots, F_k\}$ 为 A 的朋友集,可以证明:对每个 A,k 都为偶数.

事实上,对每个 $F_i \in M$, 考虑他在 M 中的朋友数,所有这 k 个 F_i 的这些朋友数之和为偶数(因为朋友是相互的),而对 A、F_i 而言,其公共朋友数为奇数,故每个 F_i 的这样的朋友数为奇数,故 k 为偶数.

设 $k=2m$,现在考虑每个 $F_i \in M$, 他的所有朋友集不包括 A,但不局限于 M 中,他的这样的朋友数为奇数(因为 F_i 的朋友数为偶数,而 A 不算在内). 因此,所有 $2m$ 个这样的朋友集的元素个数之和为偶数. 从而在 $2n-1$ 个人(A 除外)中,必有一个人在偶数个这样的朋友集中出现,他与 A 的公共朋友数为偶数.

这个矛盾表明:有两个 S 中的人,他们的公共朋友数为偶数.

说明 上述解法采用了奇偶性分析来"制造"矛盾.

例 9 设 n 是大于 1 的正整数,证明存在一个集合 $A \subsetneqq \{1, 2, \cdots, n\}$, 使得

(1) $|A| \leqslant 2[\sqrt{n}]+1$;

(2) $\left\{|x-y| \,\middle|\, x, y \in A, x \neq y\right\}=\{1, 2, \cdots, n-1\}$.

分析 由 $|A| \leqslant 2[\sqrt{n}]+1$ 想到,设 $n=k^2+b$, $0 \leqslant b \leqslant 2k$.

证明 设 $n=k^2+b$, $0 \leqslant b \leqslant 2k$.

① 当 $b \leqslant k$ 时,考虑集合

$$A=\{1, 2, \cdots, k, 2k, 3k, \cdots, k^2, k^2+b\} \subsetneqq \{1, 2, \cdots, n\},$$

$$|A|=2k \leqslant 2[\sqrt{n}]+1=2k+1,$$

而易知 $\left\{|x-y| \,\middle|\, x, y \in A, x \neq y\right\}=\{1, 2, \cdots, k^2+b-1\}$.

② 当 $b>k$ 时,考虑集合

$$A=\{1, 2, \cdots, k, 2k, 3k, \cdots, k^2, k^2+k, k^2+b\} \subsetneqq \{1, 2, \cdots, n\},$$

同样有

$$|A|=2k+1 \leqslant 2[\sqrt{n}]+1,$$

且 $\left\{|x-y| \,\middle|\, x, y \in A, x \neq y\right\}=\{1, 2, \cdots, k^2+b-1\}$.

综上知,原命题成立.

习 题 1

1 已知三元实数集 $A=\{x, xy, x+y\}$，$B=\{0, |x|, y\}$，且 $A=B$，则 $x^{2005}+y^{2005}$ 等于(　　).

(A) 0　　(B) 2　　(C) 1　　(D) -1

2 设集合 $S=\left\{(x, y)\,\middle|\, x-\dfrac{1}{2}y^2 \text{ 为奇数}, x, y\in \mathbf{R}\right\}$，$T=\{(x, y)\mid \sin(2\pi x)-\sin(\pi y^2)=\cos(2\pi x)-\cos(\pi y^2), x, y\in\mathbf{R}\}$. 则 S 与 T 的关系是(　　).

(A) $S\subsetneqq T$　　(B) $T\subsetneqq S$　　(C) $S=T$　　(D) 不确定

3 集合 $M=\{u\mid u=12m+8n+4l, m,n,l\in\mathbf{Z}\}$ 与 $N=\{u\mid u=20p+16q+12r, p,q,r\in\mathbf{Z}\}$ 的关系为(　　).

(A) $M=N$　　(B) $M\not\subseteq N$, $N\not\subseteq M$

(C) $M\subsetneqq N$　　(D) $M\supsetneqq N$

4 设 $A=\{(x, y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 2\}$，$B=\{(x, y)\mid x\leqslant 10, y\geqslant 2, y\leqslant x-4\}$ 是直角坐标平面 xOy 上的点集. 则 $C=\left\{\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)\,\middle|\,(x_1, y_1)\in A, (x_2, y_2)\in B\right\}$ 所成图形的面积是(　　).

(A) 6　　(B) 6.5　　(C) 2π　　(D) 7

5 已知非空数集 $M\subseteq\{1, 2, 3, 4, 5\}$，则满足条件"若 $x\in M$，则 $6-x\in M$"的集合 M 的个数是(　　).

(A) 3 个　　(B) 7 个　　(C) 15 个　　(D) 31 个

6 设 $a\in\mathbf{R}^+$，$A=\left\{(x, y)\mid (x-1)^2+(y-2)^2\leqslant\dfrac{4}{5}\right\}$ 与 $B=\left\{(x, y)\,\middle|\, |x-1|+2|y-2|\leqslant a\right\}$ 是直角坐标平面 xOy 内的点集. 则 $A\subseteq B$ 的充要条件是(　　).

(A) $a\geqslant 2$　　(B) $a\geqslant\sqrt{5}$　　(C) $a\geqslant\sqrt{6}$　　(D) $a\geqslant 3$

7 集合 $\left\{x\,\middle|\,-1\leqslant\log_{\frac{1}{x}}10<-\dfrac{1}{2}, x>1 \text{ 且 } x\in\mathbf{N}\right\}$ 的真子集的个数是________.