"十三五"移动学习型规划教材

# 线性代数

张新华　张浩　王勇　编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

“十三五”移动学习型规划教材

# 线性代数

张新华 张 浩 王 勇 编

机 械 工 业 出 版 社

本书是依据《工科本科线性代数课程教学基本要求》编写的，内容包括：线性方程组、矩阵及其运算、行列式、矩阵的秩与线性方程组的解、向量组的线性相关性以及相似矩阵与二次型，书中除每一节配有习题外，各章均配有一定数量的总习题. 在编写中，以问题为主线，注重知识的形成过程，力求提供一本与研究性教学相适应的教材. 为便于学生研究问题，本书提供了补充材料——MATLAB 软件简介.

本书可供高等院校工程类各专业使用，也可供自学者、考研者和科技工作者阅读.

**图书在版编目（CIP）数据**

线性代数/张新华，张浩，王勇编. —北京：机械工业出版社，2016. 8

“十三五”移动学习型规划教材

ISBN 978-7-111-53788-5

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①张…②张…③王… Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ. ①O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 161463 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）

策划编辑：韩效杰 责任编辑：韩效杰 王 芳 郑 玫

责任校对：刘秀芝 封面设计：路恩中

责任印制：乔 宇

保定市中画美凯印刷有限公司印刷

2016 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

190mm×215mm · 10. 5 印张 · 210 千字

0001—3000 册

标准书号：ISBN 978-7-111-53788-5

定价：26.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

| 电话服务 | 网络服务 |
|---|---|
| 服务咨询热线：010-88379833 | 机 工 官 网：www. cmpbook. com |
| 读者购书热线：010-88379649 | 机 工 官 博：weibo. com/cmp1952 |
| | 教育服务网：www. cmpedu. com |
| **封面无防伪标均为盗版** | 金 书 网：www. golden-book. com |

# 前　言

为了更好地满足课程研究性教学改革的需要，编者编写了这本旨在培养学生自主学习能力、与研究性教学相适应的教材。本书依据《工科本科线性代数课程教学基本要求》编写而成，可供高等院校各工科类专业使用，包括电子信息、自动化、机械制造、管理工程等新兴工程专业，也可供自学者、考研者和科技工作者阅读。

线性代数是高等院校一门重要的基础数学课程，具有较强的逻辑性、抽象性，其应用领域越来越广泛。本书具有以下几个特点：

(1) 以问题为中心逐层展开叙述，介绍有关概念和方法，使学生了解知识的来龙去脉及其内在联系；

(2) 通过一些实例的介绍，激发学生学习线性代数的兴趣；

(3) 通过大量的例题阐明线性代数的思想。

本书承南京大学秦厚荣教授、南京理工大学刘东升教授和南京航空航天大学张钦教授审阅，谨此表示感谢！

本书系中华农业科教基金教材建设研究项目和南京农业大学工学院研究性教学改革项目研究成果。

限于编者的水平，书中错误和不妥之处在所难免，恳请广大读者和同行批评指正。

编　者

# 绪 论

线性方程组和二次函数是线性代数课程的两个研究对象．绝大多数科学研究和工程应用中的数学问题在某个阶段都涉及线性方程组或二次函数．利用数学方法，通常可以将较为复杂的问题转化为线性方程组或二次函数模型进行处理．线性方程组和二次函数广泛应用于商业、经济学、社会学、生态学、人口统计、遗传学、电工学、工程学以及物理学等领域．探究线性方程组解的结构和二次函数的标准形是本课程研究的两个基本问题．课程在解决问题的过程中向读者介绍向量空间、特征值和特征向量等现代数学的基本概念，为后续课程的学习和工作实践奠定基础．

**实例 1：** 经济学与工程中的线性模型．

一个国家的经济体系包括上百个部门，这些部门中有些生产商品和提供服务，其余部门不生产商品和提供服务，仅仅消费商品和服务，例如，消费者的需求、政府消费、超额生产、出口和其他外部需求．有些部门除了生产商品以满足消费者的需求之外，本部门也需要这些产品作为生产部门的投入，部门之间的关系相当复杂．

对每个部门，我们可以写出一个描述该部门的产出如何分配给其他经济部门的线性方程．对于整个经济体系而言，要描述各个部门之间的这些关系，一般需要构建含有几百个未知数的数学模型．现在用超级计算机可以处理如此大规模的数学模型．由于所涉及的数据量庞大，这些模型通常是线性的，即它们是用线性方程组描述的．

线性代数在应用中的重要性随着计算机功能的增大而迅速增加．同时，人们对于极其复杂的问题的研究也引发了对计算机能力的更大需求．计算机并行处理和大规模计算的爆炸性增长与线性代数的应用是密不可分的．

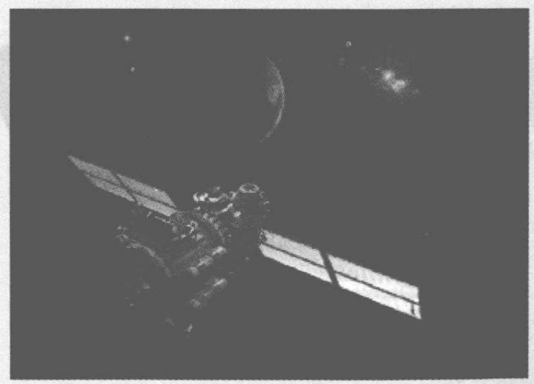
本课程的基本知识是其他领域进一步研究的基础．列举三例如下：

石油探测. 当勘探船寻找海底石油储藏时，它的计算机每天要解几千个线性方程组. 方程组的地震数据从气喷枪的爆炸引起水下冲击波获得. 这些冲击波引起海底岩石的震动，人们利用由几千米长的电缆拖着的船后的地震测波器采集数据.

线性规划. 许多重要的管理决策是在线性规划模型的基础上做出的，这些模型包括几百个变量，例如，航运业使用线性规划调度航班，监视飞机的飞行位置，或计划维修和机场运作.

电路. 工程师使用仿真软件来设计电路和微芯片，它们包含数百万的晶体管. 这样的软件技术依赖于线性代数与线性方程组的方法.

**实例 2**：多波段的图像处理.



地球资源探测卫星所拍到的图像有很多用途，研究人员和城市规划人员利用它们研究城市发展速度和方向，工业发展和土地使用的变化. 在农村可用于分析土壤湿度，对偏远地区植被进行分类，确定内陆的湖泊和河流的位置. 政府部门可检测和评估自然灾害的破坏程度，如森林火灾、火山熔岩的流动、洪水和飓风等. 环保部门可以确定来自烟囱的污染，测量水力发电站附近的湖泊和河流的温度.

为了用于研究，卫星上的传感器可同步取得地球上任何地区的七种图像，传感器通过不同的波段来记录能量，包括三种可见光谱、四种红外光谱，每幅图像都被数字化且存储为矩阵，每一个数表示图像上对应点（像素）的信号强度，这七幅图像当中的每一幅都是多波段或多光谱图像的一个波段的图像.

一个固定区域的七幅地球资源探测卫星图像通常包括大量冗余的信息，原因是一些特性会表现在几幅图像中. 然而其他特性由于它们的颜色或温度会反射出只被一个或两个传感器记录的光线.

多波段图像处理的一个目标是用一种比研究每幅图像更好的方式来提取信息去观察数据.

主成分分析法是一种从原始数据中消除冗余信息的方法，因而只需要一幅或两幅合成图像就可以提供大部分信息. 粗略地说，其目的是找出一个特殊的图像线性组合，即给七种像素中每一个赋予权值，然后再综合得到一个新的图像值. 权值选取的方式使得合成图像中的光线强度的变化幅度或景象差异比任何原始图像的都要大.

这种方法用数学语言可表述为将采集到的数据用多维空间中的点表示，将一个二次齐次函数转化为一个不含乘积项的标准形式.

# 目　录

# 第 1 章 线性方程组

线性方程组是线性代数的核心. 本章主要介绍线性方程组及其解的有关概念, 介绍求解线性方程组的一个系统方法, 探讨线性方程组有解、无解的条件.

## 1.1 线性方程组

含有未知量的等式:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

称为线性方程, 其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 $b$ 为常数 (若没有特别说明, 本书中的常数皆为实数), $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为未知量或变量.

例如, $2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 1$ 是线性方程, 但 $x_1 + 2x_2 - x_1x_2 = 9$ 不是线性方程, 因其中包含 $x_1x_2$ 项.

含有 $m$ 个方程、$n$ 个未知量的线性方程组定义为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

其中 $a_{ij}$ 及 $b_i$ 均为常数 ($i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n$).

若用一组有序的数 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 分别代替方程组中的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 每个方程的两边都相等, 则称这一数组为方程组的解. 例如:

(i) $\begin{cases} x_1 - x_2 = -1, \\ x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1, \\ -2x_1 + 4x_2 = 2. \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 = -4 \end{cases}$

都是线性方程组. 有序数 $(1,2)$ 是方程组（ⅰ）的解. 这是因为

$$1\cdot(1)-1\cdot(2)=-1,$$
$$1\cdot(1)+1\cdot(2)=3$$

同时成立. 易知，对任意实数 $c$，有序数 $(2c-1,c)$ 都是方程组（ⅱ）的解，即方程组（ⅱ）有无穷多解. 由于不存在两个实数同时满足方程组（ⅲ）中的两个方程，故方程组（ⅲ）无解.

线性方程组的解有三种情况：1）有唯一解；2）有无穷多解；3）无解.

下面给出含有两个方程、两个变量方程组的解的几何意义.

方程组（ⅰ），（ⅱ），（ⅲ）中每个方程对应于一条直线. 数对 $(c_1,c_2)$ 是方程组的解，当且仅当点 $(c_1,c_2)$ 是两条直线的公共点. 方程组（ⅰ）有唯一解，对应于两条直线有一交点；方程组（ⅱ）有无穷多解，对应于两条直线重合；方程组（ⅲ）无解，对应于两条直线平行. 如图 1-1 所示

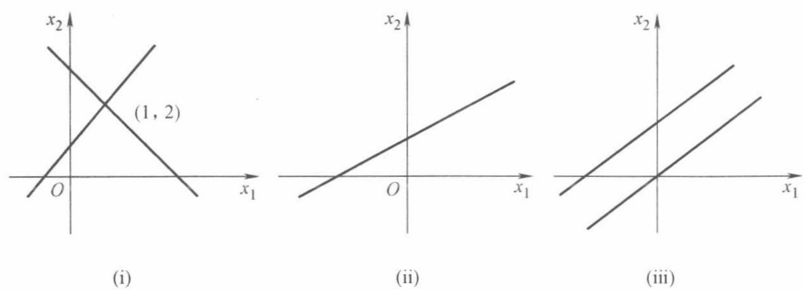



**图 1-1**

寻求方程组解的过程称为解方程组，方程组所有解的集合称为方程组的解集.

考虑两个方程组：

$$(\text{iv})\begin{cases}x_1-2x_2=-1,\\ \qquad\ \ x_2=2.\end{cases}\qquad (\text{v})\begin{cases}x_1-2x_2=-1,\\ x_1+x_2=5.\end{cases}$$

显然，具有阶梯形状的方程组（ⅳ）容易求解，将 $x_2$ 的值代入第一个方程可得 $x_1=3$，这个过程称为回代，于是方程组（ⅳ）的解为 $(3,2)$. 求解方程组（ⅴ）略复杂一点. 其实方程组（ⅴ）与

方程组（ⅳ）有相同的解. 事实上，将第一个方程的（$-1$）倍加到第二个方程上后，得 $x_2=2$，再将 $x_2=2$ 回代到第一个方程，得 $x_1=3$.

若两个方程组具有相同的解集，则称它们同解.

显然，通过下列三种运算可以得到一个同解的方程组：

1）交换任意两个方程的次序；

2）任一方程的两边同乘以一个非零的常数；

3）任一方程的倍数加到另一方程上.

可以使用上述运算将给定的方程组化成具有阶梯形状易于求解的方程组进行求解.

### 习题 1.1

1. 问 $x_1=1, x_2=-2, x_3=-1$ 是否为下列方程组的解？

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-4, \\ -2x_1+3x_2+7x_3=-3, \\ 3x_1+x_2+5x_3=0. \end{cases}$$

2. 利用回代法解方程组：

(1) $\begin{cases} x_1-2x_2=1, \\ 2x_2=-2; \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=5, \\ 2x_2+x_3=7, \\ 3x_3=3. \end{cases}$

3. 在直角坐标系中，画出每个方程表示的曲线，利用直线间的相互关系确定方程组解的个数：

(1) $\begin{cases} x_1+x_2=2, \\ x_1-x_2=0; \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x_1-2x_2=1, \\ -2x_1+4x_2=-2; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1+2x_2=3, \\ -2x_1-4x_2=5; \end{cases}$　(4) $\begin{cases} x_1+x_2=1, \\ x_1-x_2=0, \\ 3x_1+x_2=2. \end{cases}$

## 1.2 矩阵记号

如果知道了一个线性方程组的全部系数和常数项，那么这个方程组就基本上确定了. 确切地说，一个线性方程组与一个称为矩阵的数表相对应. 例如，把线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2-6x_3=4, \\ x_1-x_2+4x_3=1, \\ -x_1+2x_2-7x_3=0 \end{cases} \tag{1-1}$$

变量的系数依次写在一个数表中，矩阵$\begin{pmatrix}3&4&-6\\1&-1&4\\-1&2&-7\end{pmatrix}$称为方程组（1-1）的系数矩阵，矩阵$\begin{pmatrix}3&4&-6&4\\1&-1&4&1\\-1&2&-7&0\end{pmatrix}$称为方程组（1-1）的增广矩阵. 实际上，有了这个增广矩阵之后，除去代表未知量的文字外，线性方程组（1-1）就确定了，而采用什么文字来代表未知量当然不是实质性的.

系数矩阵有3行3列，称为$3\times3$矩阵. 同样，称上述方程组的增广矩阵为$3\times4$矩阵. 矩阵记号为方程组的求解带来便利.

求解方程组的基本思路是把方程组转化为一个更容易求解的等价方程组. 粗略地讲，就是用第一个方程中含$x_1$的项消去其他方程中含$x_1$的项. 然后用第二个方程中含$x_2$的项消去其他方程中含$x_2$的项. 以此类推，最后得到一个简单的方程组. 该方法称为消元法.

下面通过一个例子说明如何用矩阵描述求解方程组的过程.

**例 1.1** 解线性方程组（1-1）.

**解** 线性方程组可用其增广矩阵表示. 为便于比较，在求解该方程组时，我们特别地将求解过程与增广矩阵的变化过程列于左右两侧.

$$\begin{cases}3x_1+4x_2-6x_3=4 & ①\\x_1-x_2+4x_3=1 & ②\\-x_1+2x_2-7x_3=0 & ③\end{cases}\qquad\begin{pmatrix}3&4&-6&4\\1&-1&4&1\\-1&2&-7&0\end{pmatrix}$$

将第一个方程与第二个方程交换位置　　　交换矩阵的第一行与第二行

$$\xrightarrow{①\leftrightarrow②}\begin{cases}x_1-x_2+4x_3=1 & ①\\3x_1+4x_2-6x_3=4 & ②\\-x_1+2x_2-7x_3=0 & ③\end{cases}\qquad\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&-1&4&1\\3&4&-6&4\\-1&2&-7&0\end{pmatrix}$$

第一个方程的（−3）倍加到第二个方程，第一个方程加到第三个方程　　　第一行的（−3）倍加到第二行，第一行加到第三行

$$\xrightarrow[③+①]{②-3①}\begin{cases}x_1-x_2+4x_3=1 & ①\\ 7x_2-18x_3=1 & ②\\ x_2-3x_3=1 & ③\end{cases}$$

$$\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&-1&4&1\\0&7&-18&1\\0&1&-3&1\end{pmatrix}$$

交换第二个方程与第三个方程的位置

交换第二行与第三行

$$\xrightarrow{②\leftrightarrow③}\begin{cases}x_1-x_2+4x_3=1 & ①\\ x_2-3x_3=1 & ②\\ 7x_2-18x_3=1 & ③\end{cases}$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&-1&4&1\\0&1&-3&1\\0&7&-18&1\end{pmatrix}$$

第二个方程的（-7）倍加到第三个方程

第二行的（-7）倍加到第三行

$$\xrightarrow{③-7②}\begin{cases}x_1-x_2+4x_3=1 & ①\\ x_2-3x_3=1 & ②\\ 3x_3=-6 & ③\end{cases}$$

$$\xrightarrow{r_3-7r_2}\begin{pmatrix}1&-1&4&1\\0&1&-3&1\\0&0&3&-6\end{pmatrix}$$

方程组化简为同解的阶梯形方程组，将第三个方程的两边乘以 $\frac{1}{3}$

矩阵经过行变换后化为阶梯形矩阵，将第三行乘以 $\frac{1}{3}$

$$\xrightarrow{③\times\frac{1}{3}}\begin{cases}x_1-x_2+4x_3=1 & ①\\ x_2-3x_3=1 & ②\\ x_3=-2 & ③\end{cases}$$

$$\xrightarrow{r_3\times\frac{1}{3}}\begin{pmatrix}1&-1&4&1\\0&1&-3&1\\0&0&1&-2\end{pmatrix}$$

至此，已求得 $x_3$，再用回代法消去前两个方程中的 $x_3$

将第三行的（-4）倍及 3 倍分别加到第一行和第二行

$$\xrightarrow[②+3③]{①-4③}\begin{cases}x_1-x_2=9 & ①\\ x_2=-5 & ②\\ x_3=-2 & ③\end{cases}$$

$$\xrightarrow[r_2+3r_3]{r_1-4r_3}\begin{pmatrix}1&-1&0&9\\0&1&0&-5\\0&0&1&-2\end{pmatrix}$$

利用第二个方程，用回代法消去第一个方程中的 $x_2$

第二行加到第一行

$$\xrightarrow{①+②}\begin{cases}x_1=4\\ x_2=-5\\ x_3=-2\end{cases}$$

$$\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&4\\0&1&0&-5\\0&0&1&-2\end{pmatrix}$$

即方程组的解为 $x_1 = 4, x_2 = -5, x_3 = -2$.

上例说明，线性方程组的变换，即求解方程组的过程对应于方程组的增广矩阵的行变换．上节方程组的三种变换对应于增广矩阵的下列三种初等行变换．

**定义 1.1** 下列三种变换称为矩阵的行变换：

1）对调两行（对调 $i,j$ 两行，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$）；

2）以数 $k \neq 0$ 乘以某一行中的所有元素（第 $i$ 行元素乘以 $k$，记作 $r_i \times k$）；

3）把某一行所有元素的 $k$ 倍加到另一行对应的元素上去（第 $j$ 行的 $k$ 倍加到第 $i$ 行上，记作 $r_i + kr_j$）．

如果一个矩阵经过有限次的初等行变换变成另一矩阵，则称这两个矩阵是行等价的．矩阵的行变换是可逆的．例如，若对调两行，则再次对调这两行就会还原为原来的矩阵．由此可见：若两个方程组的增广矩阵是行等价的，则它们同解．

通过求解，我们会知道方程组有唯一解还是有无穷多解或是无解．问题是：方程组解的情况到底与什么相联系？或者说，什么样的因素制约了方程组解的情形？怎样判断一个方程组是否有解？有解时是否唯一？下节我们利用矩阵的行阶梯形的概念讨论这些问题．

## 习题 1.2

1. 回答下列问题：

（1）写出方程组的系数矩阵和增广矩阵：

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -4, \\ -2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

（2）下列矩阵是某个方程组的增广矩阵，请写出该方程组：

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. 下列矩阵是某个线性方程组的增广矩阵．说明在解方程组时下一步应进行的初等行变换，然后继续进行适当的行变换并说明原方程组的解集．

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -7 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 9 \end{pmatrix}.$$

3. 解方程组：

（1）$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6; \end{cases}$

（2）$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 11x_1 + 3x_2 = 8. \end{cases}$

## 1.3 矩阵的行阶梯形

本节研究方程组解的存在性和唯一性问题.

从上节的例 1.1 中可以看出解方程组的过程实际上就是化其增广矩阵为更简单的形式的过程.

若矩阵中某一行的元素都是零，则称该行为零行. 若某行至少有一个非零元素，则称之为非零行.

**定义 1.2** 满足下列条件的矩阵称为行阶梯形矩阵：

1）每一非零行都在零行之上；

2）自上而下每一行的第一个非零元素的列标严格递增.

若一个行阶梯形矩阵还满足：所有非零行的第一个非零元素为 1，且其所在的列的其余元素都是零，则称它为行最简形矩阵.

例如：

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\0&0&3&4\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\text{是行阶梯形矩阵；}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\text{是行最简形矩阵.}$$

行阶梯形矩阵的特点是可画出一条阶梯线，线的下方全为 0；每个台阶只有一行，台阶数即是非零行数，阶梯线的竖线（每段竖线的长度为 1 行）后面的元素为非零元素. 而行最简形矩阵除了具备行阶梯形矩阵的特点外，还具有非零行的第一个非零元素为 1，且这些非零元素所在的列的其他元素都是 0 的特点.

一般地，任一矩阵经过若干次初等行变换都可以化为行阶梯形矩阵和行最简形矩阵.

**例 1.2** 用初等行变换将下列矩阵先化为行阶梯形矩阵，再化为行最简形矩阵：

$$\begin{pmatrix}0&3&6&4&-5\\3&-7&-5&8&9\\3&-9&-9&6&15\end{pmatrix}.$$

**解**

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & -9 & 6 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 3 & -9 & -9 & 6 & 15 \\ 3 & -7 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & 6 & 4 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -9 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & 6 & 4 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \times \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 3 & -9 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 6 & 4 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 3r_2}$$

$$\underset{\text{行阶梯形矩阵}}{\begin{pmatrix} 3 & -9 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}} \xrightarrow{\substack{r_2 - r_3 \\ r_1 - 6r_3 \\ r_1 + 9r_2}} \underset{\text{行阶梯形矩阵}}{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 & 0 & -72 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}} \xrightarrow{r_1 \div 3}$$

$$\underset{\text{行最简形矩阵}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}}.$$

由上可知，用初等行变换化矩阵为行最简形矩阵时一般先要将原矩阵化为行阶梯形矩阵，然后用回代的方法进一步将行阶梯形矩阵化为行最简形矩阵.

化线性方程组的增广矩阵为行最简形矩阵可以得到该方程组解集的一般表达式.

例如，如果某一个线性方程组的增广矩阵已化为等价的行最简形矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

那么，这个行最简形矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 - 5x_3 = 1, \\ x_2 + x_3 = 4, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

增广矩阵的行阶梯形（或行最简形）非零行的第一个非零元素对应的变量称为基本变量，如这里的 $x_1$ 和 $x_2$，其他的变量称为自由变量，如这里的 $x_3$.