算子矩阵及其应用

李愿 著

科学出版社

算子矩阵及其应用

李 愿 著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

在算子理论的研究中，很多问题涉及算子矩阵的结构特征．算子矩阵是以算子为元素的矩阵，对其内在结构、性质和进一步的应用是作者多年来的研究课题．本书主要围绕算子矩阵的谱结构与广义逆，算子的序结构以及算子矩阵在量子信息论等问题中的应用，介绍作者在算子矩阵的谱及其应用方面所取得的主要成果．全书共 6 章，第 1 章是预备知识；第 2 章介绍算子矩阵的谱扰动；第 3 章介绍幂等算子与算子矩阵；第 4 章介绍特殊算子类的广义逆；第 5 章介绍算子的序与算子矩阵；第 6 章主要介绍算子矩阵的应用．

本书可作为泛函分析相关研究人员的参考书，也可作为数学专业研究生和高年级本科生的参考用书．

图书在版编目(CIP)数据

算子矩阵及其应用/李愿著．—北京：科学出版社，2016. 9

ISBN 978-7-03-049976-9

Ⅰ. ①算…　Ⅱ. ①李…　Ⅲ. ①算子－研究　Ⅳ. ①O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 227430 号

责任编辑：李　萍　孙翠勤／责任校对：李　影
责任印制：张　伟／封面设计：红叶图文

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2016 年 9 月第　一　版　开本：720 × 1000　B5
2016 年 9 月第一次印刷　印张：15 7/8
字数：317 000

定价：85.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

算子理论是泛函分析中一个重要的研究领域, 自从 20 世纪初 Hilbert, Banach 和 Riesz 等建立算子理论以来, 算子理论已得到了迅速发展并渗透到数学的各个分支, 其研究内容涉及基础数学与应用数学的多个分支, 如代数学、几何理论、矩阵理论、逼近论、优化理论与量子信息论等. 算子矩阵是以算子为元素的矩阵, 缺项算子矩阵就是一些元素是已知的, 其余元素都是未知的算子矩阵. 2×2 上三角算子矩阵作为最简单也最基本的缺项算子矩阵, 对它的研究有着重要的意义.

全书共 6 章. 第 1 章是预备知识, 介绍 Banach 空间和 Hilbert 空间算子理论的基本概念和基础理论, 如算子几种谱的概念、算子的谱分解定理和算子的序等. 第 2 章介绍算子矩阵的谱扰动, 主要研究 2×2 上三角算子矩阵的谱、左谱和本性近似点谱的扰动问题. 同时, 对其他形式的 2×2 算子矩阵的本性谱和左谱的扰动问题也进行了研究. 投影算子是结构最简单和最重要的算子之一. 由投影算子的和、差与乘积及其线性组合所生成算子的结构特征是重要的算子理论问题. 第 3 章介绍幂等算子与算子矩阵, 主要应用投影的算子矩阵形式, 给出了两个子空间之间的极大和极小交角的表达式, 并给出了投影的和、差和乘积的 Fredholm 性的等价刻画. 算子的广义逆, 特别是 Moore-Penrose 逆和 Drazin 逆, 是近年来算子与矩阵理论研究非常活跃的领域之一. 随着广义逆理论研究的深入, 国内外多名研究者在 Banach 代数与 C^* 代数上研究 Moore-Penrose 逆和 Drazin 逆的表示和特征. 第 4 章介绍特殊算子类的广义逆, 主要给出下三角算子矩阵的 Moore-Penrose 逆的表示及其应用, 并进一步在 C^* 代数上研究投影的和与积的 Moore-Penrose 逆及 Drazin 逆的表示. 算子序结构的研究, 不仅在算子理论的研究中是值得研究的问题, 而且在量子信息理论等方面有着重要的应用. 例如, Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上量子效应是指 $\mathcal{H}$ 上的全体正压缩算子, 量子态是指 Hilbert 空间上的正的迹为 1 的迹类算子. 在算子之间可以定义多种序关系, 形成多种序结构, 而刻画两个算子在这些序下的上、下确界是比较困难的问题. 第 5 章介绍算子的序与算子矩阵, 主要运用算子矩阵和谱理论的方法, 研究两个量子效应在算子序和逻辑序下的上、下确界的存在条件及表示. 第 6 章介绍算子矩阵的应用, 将算子矩阵的方法应用到多个研究问题之中, 主要包括算子矩阵方法在三角等式 $|A+B| = |A| + |B|$, Hua- 型算子矩阵范数及正性, 完全正映射及其对偶映射的不动点的刻画方面的应用.

本书的部分内容来自于作者的硕士与博士学位论文, 其余内容均是作者近年来关于算子理论与量子信息论方面的研究成果, 这也是作者近十五年来主要研究成果

的整理和总结. 本书的写作是在导师杜鸿科教授的支持和鼓励下完成的, 感谢杜老师多年来的悉心指导. 同时, 感谢吉国兴教授在作者研究生学习和科研过程中所给予的指导和帮助. 感谢陕西师范大学数学与信息科学学院的老师与同事: 曹怀信教授、吴保卫教授、张建华教授、曹小红教授、任芳国副教授、陈峥立副教授、窦艳妮副教授和郭志华副教授等, 在作者教学科研中所给予的热情帮助. 感谢同窗邓春源教授、庞永锋教授、王月清副教授、徐小明副教授、张海燕副教授及孙秀红、陈艳妮博士等在本书涉及的研究问题中, 给予过的交流和讨论. 感谢研究生郑梅、胡莎莎、崔梦倩、吴娇在本书文字录入和校对方面提供的帮助. 最后, 感谢科学出版社李萍编辑细致的工作.

由于作者水平有限, 加之算子矩阵的新成果不断出现, 本书不足之处在所难免, 热忱欢迎读者批评指正.

李　愿

2016 年 5 月于陕西师范大学

主要符号表

$\mathbb{C}$	复数域
$\mathcal{H}$	无穷维复可分 Hilbert 空间
$\mathcal{B}(\mathcal{H})$	$\mathcal{H}$ 上全体有界线性算子空间
$\mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})$	从 $\mathcal{K}$ 到 $\mathcal{H}$ 全体有界线性算子空间
$B_l(\mathcal{K},\mathcal{H})$	$\mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})$ 中左可逆算子之集
$\mathrm{Inv}(\mathcal{K},\mathcal{H})$	$\mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})$ 中可逆算子之集
$N(A)$	算子 A 的核空间
$R(A)$	算子 A 的值域
$n(A)$	算子 A 核空间的维数
$d(A)$	算子 A 值域空间的余维数
$\mathrm{asc}(A)$	算子 A 的升标
$\mathrm{des}(A)$	算子 A 的降标
$\mathrm{ind}(A)$	算子 A 的 Fredhlom 指标
$\sigma(A)$	算子 A 的谱
$\rho(A)$	算子 A 的预解集
$\mathrm{acc}\sigma(A)$	算子 A 的谱的聚点之集
$\mathrm{dist}(x,y)$	向量 x,y 之间的距离
$\sigma_e(A)$	算子 A 的本性谱
$\sigma_{le}(A)$	算子 A 的左本性谱
$\sigma_{ea}(A)$	算子 A 的本性近似点谱
$\sigma_w(A)$	算子 A 的 Weyl 谱
$\gamma(A)$	算子 A 约化极小模
$E(\cdot)$	谱测度
$A\wedge B$	算子 A 和 B 的下确界
$A\sqcap B$	算子 A 和 B 的广义下确界
A^+	算子 A 的 Moore-Penrose 逆
A^D	算子 A 的 Drazin 逆
$\mathrm{Re}(A)$	算子 A 的实部
$\mathrm{Im}(A)$	算子 A 的虚部

目 录

第 1 章　预 备 知 识

本章主要介绍本书所需要的算子理论与算子代数的基本概念和基础理论. 对于最基础的概念, 如可分的 Hilbert 空间、Banach 空间和 Banach 代数的定义等, 可以参看文献 [1]~[4], 这里不再赘述.

1.1　算子几种谱的概念

设 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{K}$ 是复可分的 Hilbert 空间, $\dim\mathcal{H}$ 表示 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 的维数. 定义 $B(\mathcal{H})$ 和 $B(\mathcal{H},\mathcal{K})$ 分别为 $\mathcal{H}$ 上和从 $\mathcal{H}$ 到 $\mathcal{K}$ 上的有界线性算子构成的 Banach 代数. 设 m 为正整数, 用 $F(\mathcal{K},\mathcal{H})$ 和 $F^m(\mathcal{K},\mathcal{H})$ 分别表示 $B(\mathcal{K},\mathcal{H})$ 上的有限秩算子集和秩为 m 的有限秩算子集, 用 $K(\mathcal{K},\mathcal{H}),B_c(\mathcal{K},\mathcal{H})$ 和 $B_l(\mathcal{K},\mathcal{H})(B_r(\mathcal{K},\mathcal{H}))$ 分别表示从 $\mathcal{K}$ 到 $\mathcal{H}$ 的紧算子之集、闭值域算子之集和左 (右) 可逆算子之集. 设 $T\in B(H,K)$, 用 $T^*,N(T)$ 和 $R(T)$ 分别表示 T 的共轭算子、核空间和值域空间, 用 $n(T)$ 和 $d(T)$ 分别表示算子 T 的核空间 $N(T)$ 的维数和值域的正交补 $R(T)^\perp$ 的维数, 即有 $n(T)=\dim N(T)$ 与$d(T)=\dim R(T)^\perp=n(T^*)$.

设 $\mathcal{A}$ 表示含有单位元 e 的 Banach 代数, $T\in\mathcal{A}$, 若存在元 $T'\in\mathcal{A}$ 使得 $T'T=e$, 则称 T 是左可逆元. 类似地, T 右可逆元是指存在元 $S\in\mathcal{A}$ 使得 $TS=e$. 若 T 既是左可逆元又是右可逆元, 则称 T 是可逆元.

容易证明: 当 $\mathcal{A}=B(\mathcal{H},\mathcal{K})$ 时, T 是左可逆元当且仅当 $n(T)=0$ 且 $R(T)$ 是 $\mathcal{K}$ 的闭子空间; T 是右可逆元当且仅当 $R(T)=\mathcal{K}$.

定义 1.1.1　设 $T\in\mathcal{A}$, 则定义 T 的谱 $\sigma(T)$ 为

$$\sigma(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:T-\lambda e\ \text{不是可逆元}\}.$$

定义 1.1.2　设 $T\in\mathcal{A}$, 则定义 T 的左 (右) 谱 $\sigma_l(T)(\sigma_r(T))$ 为

$$\sigma_l(T)(\sigma_r(T))=\{\lambda\in\mathbb{C}:T-\lambda e\ \text{不是左（右）可逆元}\}.$$

定义 1.1.3　设 $T\in B(\mathcal{H},\mathcal{K})$, 则算子 T 的近似点谱是复平面子集:

$$\sigma_\pi(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:\ \text{存在}\mathcal{H}\text{中的单位向量列}\{x_n\}_{n=1}^\infty\ \text{使得}\ (T-\lambda)x_n\to0,n\to\infty\}.$$

由定义 1.1.1~ 定义 1.1.3 可以验证: 定义中的集合都是复平面上的紧子集, 满足: $\sigma(T)=\sigma_l(T)\cup\sigma_r(T)$, 且当 $\mathcal{A}=B(\mathcal{H},\mathcal{K})$ 时, 有 $\sigma_l(T)=\sigma_\pi(T)$. 也用 $\mathrm{acc}(\sigma(T))$ 表示 $\sigma(T)$ 聚点的全体.

定义 1.1.4　设 $T \in B(\mathcal{H},\mathcal{K})$, 若存在 $T' \in B(\mathcal{K},\mathcal{H})$ 和 $K \in K(\mathcal{H})$ 使得 $T'T = I + K$, 则称 T 是左 Fredholm 算子.

若 T^* 是左 Fredholm 算子, 则称 T 是右 Fredholm 算子. 若 T 是左 Fredholm 算子或右 Fredholm 算子, 则称 T 是半 Fredholm 算子, 记为 $\mathcal{SF}$. 如果 $T \in \mathcal{SF}$, 定义 T 的指标 $\mathrm{ind}(T)$ 为: $\mathrm{ind}(T) = n(T) - d(T)$. 由 Fredholm 理论, 可以证明: T 是左 (右)Fredholm 算子当且仅当值域 $R(T)$ 是闭的且 $n(T) < \infty(n(T^*) < \infty)$. 若 T 既是左 Fredholm 算子, 又是右 Fredholm 算子, 则称 T 是 Fredholm 算子.

定义 1.1.5　设 $T \in B(\mathcal{H})$, 则 T 的左 (右) 本性谱是复平面上的紧子集:

$$\sigma_{le}(T)(\sigma_{re}(T)) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ 不是左 (右) Fredholm 算子}\}.$$

T 的本性谱是复平面上的紧子集:

$$\sigma_e(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ 不是 Fredholm 算子}\}.$$

容易证明: 商代数 $B(\mathcal{H})/K(\mathcal{H})$ 是 Banach 代数. 用 $\varGamma$ 表示由 $B(\mathcal{H})$ 到 $B(\mathcal{H})/K(\mathcal{H})$ 的典型映射, 若 $T \in B(\mathcal{H})$, 由经典的 Fredholm 理论, 可以知道

$$\sigma_e(T) = \sigma(\varGamma(T)),\quad \sigma_{le}(T) = \sigma_l(\varGamma(T)),\quad \sigma_{re}(T) = \sigma_r(\varGamma(T)).$$

定义 1.1.6　设 $T \in B(\mathcal{H},\mathcal{K})$, 如果 T 是左 (右)Fredholm 算子且指标 $\mathrm{ind}(T) \leqslant 0(\mathrm{ind}(T) \geqslant 0)$, 则称算子 T 是左 (右)Weyl 算子.

若 T 既是左 Weyl 算子又是右 Weyl 算子, 则称 T 是 Weyl 算子. 因此, T 是 Weyl 算子当且仅当 T 是 Fredholm 算子且指标 $\mathrm{ind}(T) = 0$.

定义 1.1.7　设 $T \in B(\mathcal{H})$, 则 T 的左 (右)Weyl 谱 $\sigma_{lw}(T)(\sigma_{rw}(T))$ 是复平面紧子集:

$$\sigma_{lw}(T)(\sigma_{rw}(T)) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ 不是左（右）Weyl 算子}\}.$$

T 的 Weyl 谱 $\sigma_w(T)$ 是复平面紧子集:

$$\sigma_w(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ 不是 Weyl 算子}\}.$$

设 $\mathrm{asc}(T)$ 表示算子 $T \in B(\mathcal{X})$ 的升标, 则存在最小的正整数 n 使得 $N(T^n) = N(T^{n+1})$. 类似地, $\mathrm{des}(T)$ 表示算子 $T \in B(\mathcal{X})$ 的降标, 即存在最小的正整数 n 使得 $R(T^n) = R(T^{n+1})$. 具有有限的升标和降标的 Fredholm 算子称作 Browder 算子. 可以证明: T 为 Browder 算子等价于 T 是 Fredholm 算子且当复数 $\lambda \neq 0$ 并充分小时有 $T - \lambda$ 可逆.

定义 1.1.8　设 $T \in B(\mathcal{H})$, T 的 Browder 谱 $\sigma_b(T)$ 是复平面紧子集:

$$\sigma_b(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ 不是 Browder 算子}\}.$$

引理 1.1.9 设 $T \in B(\mathcal{H})$, 则下列命题相互等价:

(1) $R(T)$ 是闭值域;

(2) $R(TT^*)$ 是闭值域;

(3) $R(T^*T)$ 是闭值域;

(4) $0 \notin \operatorname{acc}(\sigma(TT^*))$;

(5) $R(T^*)$ 是闭值域.

1.2 算子的谱投影、广义逆及函数演算

本节主要介绍算子的谱投影、广义逆及函数演算.

定义 1.2.1 设 $\mathcal{A}$ 是 Banach 代数, 且 $\mathcal{A}$ 中具有对合运算 $*$, 并满足下面四个条件:

(1) $(\alpha A+\beta B)^* = \overline{\alpha}A^* + \overline{\beta}B^*, \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{C}, \ \ \forall A, B \in \mathcal{A}$;

(2) $(AB)^* = B^*A^*$;

(3) $(A^*)^* = A$;

(4) $\|A^*A\| = \|A\|^2$,

则称 $\mathcal{A}$ 是 C^* 代数.

定义 1.2.2 设 $\mathcal{A}$ 是 C^* 代数, 且 $A \in \mathcal{A}$.

(1) 若 $A^* = A$, 则称 A 是自伴元;

(2) 若 $A^* = A$ 且 $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$, 则称 A 是正元, 其中 $\mathbb{R}^+$ 表示正实数集合;

(3) 若 $A^2 = A$, 则称 A 是幂等元;

(4) 若 A 是自伴的幂等元, 则称 A 是投影;

(5) 若 $A^*A = AA^*$, 则称 A 是正规元.

注 1.2.3 当 $\mathcal{A} = B(\mathcal{H})$, 且 $A \in \mathcal{A}$ 时,

(1) A 是投影一般指 A 是正交投影, 等价于 A 是幂等元且 $R(A) \perp N(A)$.

(2) A 是正元 (正算子) 当且仅当 $\langle Ax, x\rangle \geqslant 0$ 对所有的 $x \in \mathcal{H}$ 成立, 其中 $\langle\ ,\ \rangle$ 表示 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的内积. 用 $B(\mathcal{H})^+$ 和 $S(\mathcal{H})$ 分别表示 $B(\mathcal{H})$ 中的全体正元和全体自伴元. 若 A 是正元, 则其有唯一的正的平方根, 用 $A^{\frac{1}{2}}$ 表示.

(3) 若 A 是幂等算子, 则值域 $R(A)$ 是闭的且 $\mathcal{H} = R(A) \dotplus N(A)$, 即有 $R(A) \cap N(A) = \{0\}$ 且 $\mathcal{H} = R(A) + N(A)$. 此时, A 有算子矩阵形式

$$A = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : R(A) \dotplus N(A) \to R(A) \dotplus N(A)$$

或者算子矩阵形式

$$A=\begin{pmatrix} I & S \\ 0 & 0 \end{pmatrix}: R(A)\oplus R(A)^{\perp}\to R(A)\oplus R(A)^{\perp},$$

其中 I 表示 $R(A)$ 的恒等算子. 特别地, 在第二个矩阵形式的分解中, $S=0$ 当且仅当 A 是正交投影.

引理 1.2.4　设 $a,b\in\mathcal{A}$, 则 $\sigma(ab)\setminus\{0\}=\sigma(ba)\setminus\{0\}$.

引理 1.2.5　设 $A\in B(\mathcal{H})$ 有算子矩阵形式

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}: \mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2\to\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2, \tag{1.2.1}$$

则 $A\geqslant 0$ 当且仅当下面三个条件同时成立.

(1) 对 $i=1,2$, 都有 $A_{ii}\in B(\mathcal{H}_i)^+$;

(2) $A_{21}=A_{12}^*$;

(3) 存在一个从 $\mathcal{H}_2$ 到 $\mathcal{H}_1$ 的压缩算子 D 使得 $A_{12}=A_{11}^{\frac{1}{2}}DA_{22}^{\frac{1}{2}}$ (当算子 D 满足条件: $N(D)\supseteq N(A_{22})$ 和 $N(D^*)\supseteq N(A_{11})$ 时是唯一的).

定义 1.2.6　设 $a\in\mathcal{A}$, 如果存在元 $x\in\mathcal{A}$ 使得

$$axa=a,\quad xax=x,\quad (ax)^*=ax,\quad (xa)^*=xa, \tag{1.2.2}$$

则 a 称作 Moore-Penrose 可逆. 若 $a\in\mathcal{A}$ 是 Moore-Penrose 可逆的, 容易证明式 (1.2.2) 中四个方程只有唯一解, 此时唯一解称为 a 的 Moore-Penrose 逆元, 记作 $a^{\dagger}$.

定义 1.2.7　设 $a\in\mathcal{A}, b\in\mathcal{A}$, 如果下面三个等式

$$ab=ba,\quad b=b^2a,\quad a^k=ba^{k+1} \tag{1.2.3}$$

(其中 k 为正整数) 成立则 b 被称作是 a 的 Drazin 逆. 容易证明: 若 a Drazin 可逆, 则其 Drazin 逆元唯一, 记作 $b=a^D$.

引理 1.2.8　设 $A\in B(\mathcal{H},\mathcal{K})$, 若对所有的 $x\in N(A)^{\perp}$ 都有 $\|Ax\|=\|x\|$ 成立, 则称 A 是部分等距算子. 特别地, 若 A 是部分等距算子且 $n(A)=n(A^*)=0$, 则称 A 是酉算子.

引理 1.2.9　设 $U\in B(\mathcal{H})$, 则下面四个命题等价:

(1) $U=UU^*U$;

(2) U^*U 是正交投影;

(3) UU^* 是正交投影;

(4) U 是部分等距算子.

定义 1.2.10　设 $\{E_\lambda\}$ 是含实参数 λ 的正交投影算子族, 且满足

(1) 单调性: 当 $\lambda<\mu$ 时, $E_\lambda\leqslant E_\mu$;

(2) 右连续: 对任一实数 λ, 都有 $\lim\limits_{\mu\to\lambda^+}E_\mu=E_\lambda$;

(3) $\lim\limits_{\mu\to-\infty} E_\mu = 0$, $\lim\limits_{\mu\to+\infty} E_\mu = I$,
则称 $\{E_\lambda\}$ 为谱测度, 其中上面的极限都是强算子收敛.

谱测度 $\{E_\lambda\}$ 具有以下性质:

(1) 若 $\lambda < \mu$, 则 $E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_\lambda$;

(2) $\langle E_\lambda x, x\rangle = \|E_\lambda x\|$ 是关于 λ 的非负单调增函数.

定义 1.2.11 设 $\mathcal{B}$ 表示复平面上全体 Borel 子集构成的集合, $P(\mathcal{H})$ 表示 $\mathcal{H}$ 上正交投影的全体, 且 E 是 $\mathcal{B}$ 到 $P(\mathcal{H})$ 的映射, 满足下面两个条件:

(1) $E(\mathbb{C}) = I$, $E(\varnothing) = 0$;

(2) 对于两两互不相交的Borel集序列$\{A_i\}$,有$E(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)=s-\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} E(A_i)$, 其中 $s-\lim$ 表示强算子极限, 并称二元组 $(\mathcal{B}, E)$ 是一个谱族.

谱族 $(\mathcal{B}, E)$ 具有以下性质:

(1) 若 $A_i \in \mathcal{B}(i=1,2,\cdots,n)$ 两两不相交, 则 $E(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} E(A_i)$;

(2) 若 $A_1, A_2 \in \mathcal{B}$, 则 $E(A_1 \cap A_2) = E(A_1)E(A_2)$.

因此, E 是测度空间 $(\mathbb{C}, \mathcal{B})$ 上一个取值于 $P(\mathcal{H})$ 的测度.

引理 1.2.12 设 $N \in B(\mathcal{H})$ 是正规算子, 则存在谱族 $(\mathcal{B}, E)$, 使得在算子范数收敛下 $f(N) = \displaystyle\int_{\sigma(N)} f(z)\mathrm{d}E(z)$, 其中 $E(z) = E(\Omega_z)$, 且

$$\Omega_z = \{s + \sqrt{-1}t \in \sigma(N) : s \leqslant \mathrm{Re}(z), t \leqslant \mathrm{Im}(z)\}.$$

对正规算子 N, 上面的谱族 $(\mathcal{B}, E)$ 也记为 $(\mathcal{B}, P^N)$.

引理 1.2.13 设 $A \in B(\mathcal{H})$ 是自伴算子, 则存在谱测度 $\{E_\lambda\}$, 使得

$$f(A) = \int_{\sigma(A)} f(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda \quad \text{与} \quad E_\lambda = E((-\infty, \lambda] \cap \sigma(A))$$

成立, 其中 E 是上面引理中的谱测度.

引理 1.2.14 设 $A \in K(\mathcal{H})$ 是自伴算子, 则

(1) $\sigma(A)$ 是包含在实轴上的至多可数集且只能以 0 为聚点;

(2) $\sigma(A)$ 的非零谱点只能是有限重的特征值.

设 $A \in B(\mathcal{H})$ 是紧自伴算子, 则 A 的非零特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$ 为实轴上的点. 将 A 的非零特征值按绝对值单调减小, 排成

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_n| \geqslant \cdots,$$

则

$$A = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n e_n \otimes e_n, \quad m \leqslant \infty,$$

其中 $\{e_n\}_{n=1}^m$ 是 λ_n 对应的特征向量, 故 $\{e_n\}_{n=1}^m$ 是 $\mathcal{H}$ 的正交集. 也可以重排上面的非零特征值, 按绝对值严格单调减小, 排成序列

$$|\mu_1| > |\mu_2| > \cdots > |\mu_n| > \cdots,$$

则

$$A = \sum_{n=1}^{s} \mu_n P_n, \quad s \leqslant \infty,$$

其中 $\{P_n\}_{n=1}^s$ 是两两正交的正交投影所构成的集合, 且满足 $R(P_n)$ 是 μ_n 的特征子空间.

定义 1.2.15　设 $A \in K(\mathcal{H})$, $s_1, s_2, \cdots$ 为 $|A|$ 的特征值, 其全体 (包含重数) 用一个不增序列 $\{s_i(A)\}$ 表示, 若

$$\sum_{i=1}^{\infty} s_i(A)^p < \infty,$$

则称 A 为 Schatten p- 类算子 $(1 \leqslant p < \infty)$. 全体 Schatten p- 类算子构成的集合记为 $C_p(\mathcal{H})$.

特别地, 当 $p=1$ 时, 称 A 为迹类算子, 且记 $T(\mathcal{H})$ (或 $C_1(\mathcal{H})$) 为全体迹类算子. 也分别用 $T(\mathcal{H})^+(C_1(\mathcal{H})^+)$ 和 $C_1(\mathcal{H})^h$ 表示正的迹类算子全体和自伴的迹类算子全体.

定义 1.2.16　设 $A \in C_p(\mathcal{H})$ $(1 \leqslant p < \infty)$, 算子 A 的 Schatten p- 范数定义为

$$\|A\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} s_i(A)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

特别地, 称 $\|A\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} s_i(A)$ 为 A 的迹范数, $\|A\|_2$ 为 A 的 Hilbert-Schmidt 范数.

定义 1.2.17[2]　设 $A \in C_1(\mathcal{H})$, 算子 A 的迹定义为

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle Ae_i, e_i \rangle,$$

其中 $\{e_i\}$ 为 $\mathcal{H}$ 的一组标准正交基. 容易验证 $\operatorname{tr}(A)$ 与基的选取无关.

迹类算子的迹和迹范数的重要性质如下.

引理 1.2.18　设 $A \in C_1(\mathcal{H})$, 且 $B \in B(\mathcal{H})$, 则有

(1) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, $\operatorname{tr}(A^*) = \overline{\operatorname{tr}(A)}$;

(2) 若 $A \geqslant 0$, 则 $\operatorname{tr}(A) \geqslant 0$, 且等号成立当且仅当 $A = 0$;

(3) $|\operatorname{tr}(A)| \leqslant \operatorname{tr}(|A|)$;

(4) $|\operatorname{tr}(A)| = \operatorname{tr}(|A|)$ 当且仅当存在 $\theta \in [0, 2\pi)$, 使得 $\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\theta} A \geqslant 0$.

证明 (1)~(3) 是迹类算子的主要性质, 证明见文献 [4].

(4) 充分性. 若存在 $\theta\in[0,2\pi)$ 使得 $\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\theta}A\geqslant 0$, 则有

$$\mathrm{tr}(\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\theta}A)\geqslant 0 \text{ 且 } \mathrm{e}^{\sqrt{-1}\theta}A=|\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\theta}A|=|A|,$$

进一步也有 $|\mathrm{tr}(\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\theta}A)|=\mathrm{tr}(\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\theta}A)=\mathrm{tr}(|A|)$. 又由于

$$|\mathrm{tr}(\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\theta}A)|=|\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\theta}\mathrm{tr}(A)|=|\mathrm{tr}(A)|,$$

则有 $|\mathrm{tr}(A)|=\mathrm{tr}(|A|)$.

必要性. 由于 $|\mathrm{tr}(A)|=\mathrm{tr}(|A|)$, 则存在 $\theta\in[0,2\pi)$ 使得

$$\mathrm{tr}(|A|)=|\mathrm{tr}(A)|=\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\theta}\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\theta}A).$$

故有

$$\mathrm{tr}(\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\theta}A)=\mathrm{tr}(|A|)=\mathrm{tr}(|\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\theta}A|).$$

因此, 不失一般性, 可以假设 $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(|A|)$. 又由于 $A\in C_1(\mathcal{H})$, 则存在两列正交的单位向量列 $\{e_i\}_{i=1}^s$ 与 $\{f_i\}_{i=1}^s$ 使得

$$A=\sum_{i=1}^s\lambda_i e_i\otimes f_i \text{ 与 } |A|=\sum_{i=1}^s\lambda_i f_i\otimes f_i$$

成立, 其中 $\lambda_i>0$ 且 $s\leqslant\infty$. 因此

$$\begin{aligned}0\leqslant \mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^s\lambda_i\langle e_i,f_i\rangle&=\left|\sum_{i=1}^s\lambda_i\langle e_i,f_i\rangle\right|\\&\leqslant\sum_{i=1}^s\lambda_i|\langle e_i,f_i\rangle|\leqslant\sum_{i=1}^s\lambda_i=tr(|A|),\end{aligned}$$

故 Cauchy-Schwarz 不等式蕴涵: 对所有的 i, 都有 $e_i=\mu_i f_i$, 且 $|\mu_i|=1$ 成立. 由于

$$\left|\sum_{i=1}^s\lambda_i\langle e_i,f_i\rangle\right|=\sum_{i=1}^s\lambda_i|\langle e_i,f_i\rangle|,$$

因此对所有i, 存在相同的角$\theta\in[0,2\pi)$使得$\mu_i=\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\theta}$, 再由不等式$\sum_{i=1}^s\lambda_i\langle e_i,f_i\rangle\geqslant 0$ 得 $\theta=0$, 即有 $e_i=f_i$. 故 $A=|A|\geqslant 0$. 证毕.

引理 1.2.19 设 $A\in B(\mathcal{H},\mathcal{K})$, 则有

(1) 存在部分等距算子 $U\in B(\mathcal{H},\mathcal{K})$, 使得 $A=U(A^*A)^{\frac{1}{2}}$ 与 $N(U)=N(A)$ 都成立, 此时也有 $U^*A=(A^*A)^{\frac{1}{2}}$;

(2) 若 $N(U)=N(A)$, 则 (1) 中的 U 是唯一的;

(3) 若 $n(A)=n(A^*)$, 则存在酉算子 $U\in B(\mathcal{H},\mathcal{K})$, 使得 $A=U(A^*A)^{\frac{1}{2}}$.

引理 1.2.20(Riesz 函数演算)　设 $\mathcal{A}$ 是有单位元 e 的 Banach 代数, 且 $a\in\mathcal{A}$, 令 $\mathrm{Hol}(a)$ 表示在 $\sigma(a)$ 的某邻域上解析函数的全体.

(1) 定义 $f(a):=\dfrac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\displaystyle\int_\gamma f(z)(ze-a)^{-1}\mathrm{d}z$, 其中 γ 是可求长的曲线且取正向, $\sigma(a)$ 包含于 γ 的内部, 则映射 $f\to f(a)$ 是从 $\mathrm{Hol}(a)$ 到 $\mathcal{A}$ 的代数同态;

(2) 若 $f\in\mathrm{Hol}(a)$, 则 $\sigma(f(a))=f(\sigma(a))$;

(3) 若 $f\in\mathrm{Hol}(a)$, $b=f(a)$ 与 $g\in\mathrm{Hol}(b)$ 都成立, 则 $g\circ f\in\mathrm{Hol}(a)$, 且 $g\circ f(a)=g(f(a))$.

命题 1.2.21　设 X 是 Banach 空间, $T\in B(X)$, $\sigma(T)$ 有有限个连通分支 $F_1,\cdots,F_n$, 开集 $G_i\supseteq F_i$, 且 $G_i\cap G_j=\varnothing$, $i\neq j$. 令 $E_i=\chi G_i(T)$, 且 $X_i=E_iX$, $i=1,2,\cdots,n$, 则

(1) $X=X_1\dotplus\cdots\dotplus X_n$, 即 $X_1,\cdots,X_n$ 是 X 的非平凡的拓扑互补的闭子空间.

(2) 若 $T_i=T\,|_{X_i}$, 则对 $i=1,2,\cdots,n$, 都有 $\sigma(T_i)=F_i$.

(3) 定义算子 $R:X=X_1\dotplus\cdots\dotplus X_n\to X_1\oplus\cdots\oplus X_n$, 满足 $R(x_1+\cdots+x_n)=x_1\oplus\cdots\oplus x_n$, $(x_i\in X_i)$, 则 R 是可逆的, 且 $RTR^{-1}=T_1\oplus\cdots\oplus T_n$, 其中 $X_1\oplus\cdots\oplus X_n$ 上范数定义为 $\|x_1\oplus\cdots\oplus x_n\|=(\|x_1\|^2\oplus\cdots\oplus\|x_n\|^2)^{\frac{1}{2}}$.

1.3　算子的偏序及拓扑

令 $S(\mathcal{H})$ 表示自伴算子构成的实线性空间. 设 $A,B\in S(\mathcal{H})$, 则 $A\leqslant B$ 是指

$$\langle Ax,x\rangle\leqslant\langle Bx,x\rangle \text{ 对所有的 } x\in\mathcal{H},$$

称在算子序下 $A\leqslant B$. 若满足 $-A\leqslant -B$, 则称在算子序下 $A\geqslant B$. 容易验证: $S(\mathcal{H})$ 在算子序下是偏序集.

定义 1.3.1　设 $A,B\in B(\mathcal{H})^+$, 则下确界 $A\wedge B$ 是 $B(\mathcal{H})^+$ 中的算子, 且满足下面两个条件:

(1) $A\wedge B\leqslant A$ 且 $A\wedge B\leqslant B$;

(2) 若算子 $D\in B(\mathcal{H})^+$ 满足 $D\leqslant A$ 且 $D\leqslant B$, 则 $D\leqslant A\wedge B$.

在文献 [5] 中, Gudder 介绍了 $S(\mathcal{H})$ 上的另一种偏序, 称为逻辑序 (用符号 $\preceq$ 表示). 若存在 $C\in S(\mathcal{H})$ 使得 $AC=0$ 且 $A+C=B$, 则记 $A\preceq B$. 当 P^A 表示 A 的谱测度时, 可以证明: $A\preceq B$ 当且仅当对每一个 Borel 子集 $\triangle$ 使 $0\notin\triangle$, 都有 $P^A(\triangle)\leqslant P^B(\triangle)$. 类似地, 下面给出逻辑序下的下确界定义.

定义 1.3.2　设 $A,B\in S(\mathcal{H})$, 则下确界 $A\wedge B$ 是 $S(\mathcal{H})$ 中的算子, 且同时满足下面两个条件:

(1) $A \wedge B \preceq A$ 且 $A \wedge B \preceq B$;

(2) 若算子 $D \in S(\mathcal{H})$ 满足 $D \preceq A$ 且 $D \preceq B$, 则 $D \preceq A \wedge B$.

类似地, 在偏序集 $(B(\mathcal{H})^+, \leqslant)$ 与 $(S(\mathcal{H}), \preceq)$ 上可以定义上确界, 记为 $A \vee B$ 表示在偏序 $\leqslant$ 或 $\preceq$ 下的最小上界.

作为逻辑序的拓广, 在 $B(\mathcal{H})$ 上可以定义 $*$ 偏序[6−8]. 设 $A, B \in B(\mathcal{H})$, 若 $A^*A = A^*B$ 且 $AA^* = BA^*$, 则称 $A * \leqslant B$. $B(\mathcal{H})$ 上还可以定义其他的偏序, 如减偏序 (minus) 和核偏序 (core) 等[9].

定义 1.3.3 设 $A, B \in S(\mathcal{H})$, 则广义下确界[10] $A \sqcap B$ 定义为

$$A \sqcap B := \frac{1}{2}(A + B - |A - B|).$$

显然, $A \sqcap B \in S(\mathcal{H})$. 但是, 对于 $A, B \in B(\mathcal{H})^+$, 由于 $A \sqcap B$ 可能不是正算子, 则 $A \sqcap B \in B(\mathcal{H})^+$ 不一定成立. 然而, 若 A 与 B 是可交换或可比较的 ($A \leqslant B$ 或 $A \geqslant B$), 则 $A \sqcap B \in B(\mathcal{H})^+$.

在本书中, 涉及算子 $B(\mathcal{H})$ 上的拓扑主要有: 范数拓扑、强算子拓扑、弱算子拓扑和 W* 拓扑, 这四类范数拓扑产生的一个序列或网的收敛性关系为

$$\text{范数拓扑收敛} \Longrightarrow \text{强算子拓扑收敛} \Longrightarrow \text{弱算子拓扑收敛;}$$
$$\text{范数拓扑收敛} \Longrightarrow \text{W}^*\text{拓扑收敛} \Longrightarrow \text{弱算子拓扑收敛.}$$

一个序列或网 A_τ 在强算子拓扑下收敛于 A 的定义为: 对任意向量 $x \in \mathcal{H}$, 都有 $\|(A_\tau - A)x\| \longrightarrow 0$, 记为: $A_\tau \underset{\text{SOT}}{\longrightarrow} A$. 而 A_τ 在弱算子拓扑下收敛于 A 的定义为: 对任意向量 $x, y \in \mathcal{H}$, 都有 $\|\langle (A_\tau - A)x, y\rangle\| \longrightarrow 0$, 记为 $A_\tau \underset{\text{WOT}}{\longrightarrow} A$.

令 V^* 表示赋范线性空间 V 的对偶空间, 即 V 上的有界线性泛函的全体, 由于紧算子构成的赋范空间 $K(\mathcal{H})$ 迹类算子构成的赋范空间 $T(\mathcal{H})$ 与全体算子构成空间 $B(\mathcal{H})$ 之间存在重要的对偶关系, 即 $K(\mathcal{H})^* \simeq T(\mathcal{H}), T(\mathcal{H})^* \simeq B(\mathcal{H})$, 其中 $\simeq$ 表示赋范空间之间的等距同构, 故 $B(\mathcal{H})$ 中的一个序列或网 A_τ 在 W* 拓扑下收敛于 A 的定义为: 对任意的 $X \in T(\mathcal{H})$, 都有 $\mathrm{tr}[(A_\tau - A)X] \longrightarrow 0$; 而 $T(\mathcal{H})$ 中的一个序列或网 A_τ 在 W* 拓扑下收敛于 $A \in T(\mathcal{H})$ 的定义为: 对任意的 $X \in K(\mathcal{H})$, 都有 $\mathrm{tr}[(A_\tau - A)X] \longrightarrow 0$. 因此, 若 $T(\mathcal{H})$ 中的一个序列或网 A_τ 在 W* 拓扑下收敛于 $A \in T(\mathcal{H})$, 则该序列或网 A_τ 可看作 $B(\mathcal{H})$ 中的序列或网, 仍在 $B(\mathcal{H})$ 上的 W* 拓扑下收敛于 $A \in T(\mathcal{H})$. 著名的 Banach-Alaoglu 定理证明了: $B(\mathcal{H})$ 中范数有界集在弱算子拓扑下是紧致集. 另一个重要的结论是: $B(\mathcal{H})$ 中范数有界集上 W* 拓扑与弱算子拓扑的收敛性相同.