微积分解题分析

微积分解题分析

上 册

沈树民 秦 淦 周 英

江苏科学技术出版社

特约编辑：戴朝寿

微积分解题分析

上 册

沈树民 秦 淦 周 英

出版：江苏科学技术出版社

发行：江苏省新华书店

印刷：淮 海 印 刷 厂

开本 787×1092 毫米 1/32 印张 19.25 字数 410,000

1980 年 8 月第 1 版 1980 年 8 月第 1 次印刷

印数 1—18,000 册

书号 13196·037 定价 1.60 元

《大学生之友》丛书出版说明

大学理工科的学生，包括电视大学、职工大学的学生，在学习过程中往往要演算大量的习题，以加深对课程内容的理解和记忆。但在解题时，经常会遇到各种各样的困难。《大学生之友》丛书就是为了帮助他们提高解题能力，熟练演算技巧，牢固地掌握学科知识而出版的。

丛书以解题分析为主。为了便于阅读，每节首先简要介绍有关的概念、定律和公式。然后，用较大的篇幅选择有代表性的例题进行剖析，讲述解题的思路，归纳解题的规律，指出必须注意的事项。最后，附以适量的习题，并提供答案或提示。

丛书内容密切配合大学教材，选题以数理化基础课和专业基础课为主，兼顾各专业课。各书的出版时间，也基本上按此顺序安排，逐步配套。

我们的愿望，想使这套丛书成为大学生喜爱的“朋友”。能否如愿，还有待于广大师生的检验。我们诚恳地欢迎读者对每一本书提出宝贵意见，使它们成为名副其实的“大学生之友”。

江苏科学技术出版社

前　　言

本书通过数量较多的例题，介绍了微积分中的一些解题方法和技巧。本书分上、下两册，上册所涉及的内容，包括一元函数的微积分部分，以及级数、微分方程的初步知识。至于极限理论和多元函数微积分的内容，将在下册中介绍。

作为变量数学的基础，微积分所包含的内容与方法是极为丰富的。因此我们在选题过程中，尽管力求注意到例题类型、解题方法的典型性与一定的广泛性，但是由于水平所限，加上编写时间比较仓促，错误与不足之处一定不少，我们诚恳地欢迎同志们批评指正。

本书上册在分工执笔的基础上由沈树民整理定稿。书中插图均为徐志鹏同志绘制。南京大学何崇佑老师对本书初稿提出了许多宝贵的修改意见，我们在此表示衷心的感谢。

编者

1979年10月

目　录

第一章　函数与极限

第一节　函　数

一、内 容 提 要

1．函数概念

在某一变化过程中，有两个变量 x 和 y，如果对于变量 x 的变化范围中的每一个值，变量 y 就按照一定的规律（对应法则）有确定的值与它对应，则称 y 是 x 的函数，一般用符号

$$y=f(x)$$

表示．其中 x 称为自变量，y 称为因变量．自变量 x 的取值范围，称为函数的定义域；因变量 y 相应的取值范围，称为函数的值域．

对于 x 取的某一定值 x_0，相应的 y 所取的确定的值 $y_0=f(x_0)$，称为函数在 $x=x_0$ 处的函数值．例如，对于函数 $f(x)=x^2-3x+2$，在 $x=2$ 处有函数值 $f(2)=2^2-3\cdot2+2=0$．

在直角坐标系 XOY 中，适合函数 $y=f(x)$ 的数对 (x,y) 所对应的点的全体，称为函数 $y=f(x)$ 的图形．一般地，函数 $y=f(x)$ 的图形是一条平面曲线．

2．最基本的几类函数

（1）多项式函数　$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$

当 $a_0 \neq 0$ 时，n 称为多项式的次数。多项式函数的定义域是整个数轴$(-\infty, +\infty)$。由于多项式运算简单，所以它是最简单的一类函数。在研究其它较复杂的函数时，常常设法把它们表示成（或近似地表示成）多项式函数的形式。

在研究多项式函数时，经常用到二项式定理：

$$(x+a)^n = x^n + C_n^1 a x^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} + \cdots + a^n,$$

其中二项式系数由

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

确定。

(2) 指数函数 $f(x) = a^x \quad (a>0, a\neq 1)$

指数函数的定义域是$(-\infty, +\infty)$，值域是$(0, +\infty)$。

当 $a = e = 2.71828\cdots$ 时，函数 $f(x) = e^x$ 特别重要。

(3) 对数函数 $f(x) = \log_a x \ (a>0, a\neq 1)$

对数函数的定义域是$(0, +\infty)$，而值域是$(-\infty, +\infty)$，情况恰好与指数函数相反。

当 $a = e$ 时，用 $\ln x$ 表示 $\log_e x$，称为自然对数。

(4) 三角函数 $\sin x$，$\cos x$，$\mathrm{tg} x$，$\mathrm{ctg} x$

正弦函数 $f(x) = \sin x$ 与余弦函数 $f(x) = \cos x$的定义域是$(-\infty, +\infty)$，值域是$[-1, 1]$。

正切函数$f(x) = \mathrm{tg} x$的定义域是整个数轴除去$\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$的点$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$；余切函数$f(x) = \mathrm{ctg} x$ 的定义域是整个数轴除去 $k\pi$ 的点$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$。它们的值域均为$(-\infty, +\infty)$。

以上四个三角函数都是周期函数。$\sin x$，$\cos x$的周期是2π；$\mathrm{tg} x$，$\mathrm{ctg} x$的周期是π。

必须注意，当三角函数的变量x作为角度看待时，如果没有特别声明，总是表示角的弧度。

3．反函数与复合函数

（1）反函数：如果在函数$y=f(x)$中，将y当作自变量，x当作y的函数，则由关系式$y=f(x)$确定的函数$x=g(y)$（或$x=f^{-1}(y)$）称为函数$f(x)$的反函数。习惯上，用字母x表示自变量，字母y表示因变量，则$y=f(x)$的反函数是$y=g(x)$（或$y=f^{-1}(x)$）。

在同一坐标系中，反函数$y=g(x)$的图形与函数$y=f(x)$的图形关于直线$y=x$对称。

指数函数$y=a^x$与对数函数$y=\log_a x$互为反函数。特别地，函数$y=e^x$与函数$y=\ln x$互为反函数。

三角函数$\sin x$，$\cos x$，$\mathrm{tg}x$等的反函数称为反三角函数，分别记作$\sin^{-1}x$，$\cos^{-1}x$，$\mathrm{tg}^{-1}x$等，它们都是多值函数。如果分别取主值范围为

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\sin^{-1}x\leqslant\frac{\pi}{2}，\quad 0\leqslant\cos^{-1}x\leqslant\pi，\quad -\frac{\pi}{2}<\mathrm{tg}^{-1}x<\frac{\pi}{2}，$$

那末它们可作为单值函数看待。

（2）复合函数：如果y是u的函数$y=f(u)$，同时u又是x的函数$u=\varphi(x)$，而且当x在某一范围内取值时，相应的u值可使y有意义，则称y是x的复合函数，记作

$$y=f[\varphi(x)],$$

其中u称为中间变量。

要注意的是，在进行函数的复合时，函数$\varphi(x)$的值不能超出函数$f(u)$的定义域的范围。例如，设$y=\lg u$，而$u=\sin x$，我们就只能考察使$\sin x>0$的x的那些值，否则复合函数$y=\lg(\sin x)$就会没有意义。

由多项式函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数通过有限次的代数运算（加减乘除及开方运算）与函数复合所得到的函数，通常称为初等函数。

4．函数的性质

（1）有界性：对于函数$y=f(x)$，如果存在一个正数M，使当x取定义域内的每一个值时，都有$|f(x)|\leqslant M$成立，则称函数$y=f(x)$为有界函数，否则称为无界函数。

（2）奇偶性：对于函数$y=f(x)$，如果有$f(-x)=-f(x)$，则称为奇函数；如果有$f(-x)=f(x)$，则称为偶函数。

（3）周期性：如果对于函数$y=f(x)$有一个数$T(T\neq 0)$，对x在定义域内的一切值，都有$f(x+T)=f(x)$成立，则称函数$y=f(x)$为周期函数，T为函数的周期．习惯上，函数的周期是指使上式成立的T的最小正值。

（4）单调性：如果函数$y=f(x)$，对于区间$[a, b]$内的任意两点$x_1<x_2$，有$f(x_1)<f(x_2)$（或$f(x_1)>f(x_2)$），则称函数$y=f(x)$在$[a, b]$内是单调递增（或递减）函数；如果有$f(x_1)\leqslant f(x_2)$（或$f(x_1)\geqslant f(x_2)$），则称函数$y=f(x)$在$[a, b]$内是不减（或不增）函数，有时为了方便，也称为增（或减）函数。

二、例题分析

例1　求下列函数的定义域：

（1）$f(x)=\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{x-3}+\lg(5-x)$；

（2）$f(x)=\sin^{-1}\dfrac{x^2+1}{5}$；

(3) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2-2x-3}}$.

解 在微积分中，函数是在实数范围内进行讨论的，自变量和因变量都只能取实数值. 求函数的定义域，就是在实数范围内求能使函数解析表达式中有意义的自变量的数值的全体.

(1) 因为在实数范围内，根号内的代数式的值不能小于零，要使$\sqrt{x-2}$有意义，必须有$x-2\geqslant 0$；由于分式的分母不能为零，所以$\dfrac{1}{x-3}$当$x\neq 3$时有意义；负数与零没有对数，所以$\lg(5-x)$当$5-x>0$时有意义. 综合起来，函数$f(x)$的定义域，就是适合下列不等式组的解：

$$\begin{cases} x-2\geqslant 0, \\ x\neq 3, \\ 5-x>0. \end{cases}$$

解之，得 $2\leqslant x<3$ 与 $3<x<5$.

因此函数$f(x)$的定义域是$[2,3)$与$(3,5)$.

(2) 由三角学知道，$\sin^{-1}u$ 当 $-1\leqslant u\leqslant 1$ 时有定义. 因此，函数$f(x)$对所有满足不等式

$$-1\leqslant\frac{x^2+1}{5}\leqslant 1$$

的 x 都有意义. 解这个不等式，得

$$-2\leqslant x\leqslant 2.$$

所以函数$f(x)$的定义域是$[-2,2]$.

(3) 要使函数$f(x)$有意义，必须有

$$\frac{x-2}{x^2-2x-3}\geqslant 0,\quad 即\frac{x-2}{(x+1)(x-3)}\geqslant 0.$$

此不等式的解，我们介绍两种求法.

方法一 不等式可化为下列两个不等式组：

$$\begin{cases} x-2 \geqslant 0, \\ (x+1)(x-3)>0 \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} x-2 \leqslant 0, \\ (x+1)(x-3)<0. \end{cases}$$

第一个不等式组的解是$x>3$；第二个不等式组的解是$-1<x\leqslant 2$. 所以原不等式的解是$x>3$与$-1<x\leqslant 2$.

方法二 解含有多项式或有理分式的不等式，当其因式很多时，利用方法一求解是很繁复的. 通常可以采用列表定符号的方法，来确定各个因式与函数在不同区间上的正负号. 如下表所示，其中各因式按其零值由小到大依次排列，表中的正负号表示该因式（及函数）在这一范围内的取值符号：

x	$-\infty$	-1		2		3	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{x-2}{(x+1)(x-3)}$	$-$	无意义	$+$	0	$-$	无意义	$+$

由表上可以看出：

当$-\infty<x<-1$时，$\dfrac{x-2}{(x+1)(x-3)}<0$；

当 $-1<x\leqslant 2$ 时，$\dfrac{x-2}{(x+1)(x-3)}\geqslant 0$；

当 $2<x<3$ 时，$\dfrac{x-2}{(x+1)(x-3)}<0$；

当$3<x<+\infty$时，$\dfrac{x-2}{(x+1)(x-3)}>0$；

当$x=-1, x=3$时，$\dfrac{x-2}{(x+1)(x-3)}$无意义。

所以不等式的解是$-1<x\leqslant 2$与$3<x<+\infty$，函数$f(x)$的定义域是$(-1,2]$与$(3,+\infty)$.

由上面的讨论可以知道，求由解析式表达的函数的定义域问题，通常可以归结为不等式(组)的求解问题. 至于由实际问题所确定的函数，则其定义域还需由具体问题的要求所决定.

例2 讨论函数$f(x)=\sin x$在区间$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上的单调性.

解 设x_1，x_2为$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$内的任意两点，且有$x_1<x_2$，则

$$f(x_1)=\sin x_1,\quad f(x_2)=\sin x_2,$$

$$f(x_2)-f(x_1)=\sin x_2-\sin x_1$$

$$=2\cos\frac{x_2+x_1}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2}.$$

因为x_1，$x_2\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$（符号“$\in$”表示“属于”），且有$x_2-x_1>0$，所以

$$0<\frac{x_2+x_1}{2}<\frac{\pi}{2},\quad 0<\frac{x_2-x_1}{2}<\frac{\pi}{2},$$

从而 $\cos\dfrac{x_2+x_1}{2}>0$，$\sin\dfrac{x_2-x_1}{2}>0$，

因此有 $f(x_2)-f(x_1)>0$，

即 $f(x_2)>f(x_1)$.

由函数单调性的定义，可知函数 $\sin x$ 在$\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$上单调递增。

通常还可以采用下面的方法：

设 x 为$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$内的任意一点，$\Delta x$ 是它的增量（可正可负）。当 x 与$x+\Delta x$ 均属于$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，若有

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}>0\ \left(\text{或}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}<0\right),$$

则$f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增（或单调递减）。

由 $$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}$$

$$=\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x},$$

注意到在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$内，$\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)>0$，$\sin\frac{\Delta x}{2}$与$\Delta x$同号，所以有

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}>0,$$

这就表明，函数$f(x)=\sin x$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上是单调递增的。

例3 证明函数 $f(x)=\frac{\lg x}{x}$ 分别在区间$\left[\frac{1}{2},\ 1\right]$与$[1,+\infty)$上有界。

证 欲证函数$f(x)$在某一区间$[a,b]$上有界，只要找到一个正数M，使得对于所有的$x\in[a,b]$，有$|f(x)|\leqslant M$；或

者找到两个数 m，M（其中 $m<M$），使得对于所有的 $x\in[a,b]$，有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$ 成立。m,M 分别称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的下界与上界。

一般地说，如果一个函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调，那么它的上下界分别可以选作 $f(a)$ 与 $f(b)$（或相反）。对于函数 $f(x)=\dfrac{\lg x}{x}$，我们不能判断出它在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 与 $[1,+\infty)$ 上是否单调，但是显然，$\lg x$ 与 x 分别在相应区间上单调递增。由此出发，可以讨论它的有界性。

若 $x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$，则有

$$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1,\quad 1\leqslant\frac{1}{x}\leqslant 2;$$

又因为
$$\lg\frac{1}{2}\leqslant\lg x\leqslant\lg 1=0,$$
注意到 $\lg x\leqslant 0$，所以
$$2\lg\frac{1}{2}\leqslant 2\lg x\leqslant\frac{\lg x}{x}\leqslant\lg x\leqslant 0.$$

这就证明了 $f(x)=\dfrac{\lg x}{x}$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上有界，$2\lg\dfrac{1}{2}$ 与 0 分别是它的下界与上界。

对于 $x\in[1,+\infty)$，$f(x)=\dfrac{\lg x}{x}$ 有下界是明显的，因为 $\dfrac{\lg x}{x}\geqslant 0$。为了证明它有上界，从直观上考虑，当 x 很大时，似应有 $\lg x\leqslant x$，即 $\dfrac{\lg x}{x}\leqslant 1$，现在就来证明这一点。

对于任一 $x\in[1,+\infty)$，必存在一个自然数 n，使

$n \leqslant x < n+1$，因此有

$$10^x \geqslant 10^n = (1+9)^n > 1+9n > 1+n > x,$$

所以 $\lg x < x$,

即 $\dfrac{\lg x}{x} < 1$,

从而证明了 $f(x)=\dfrac{\lg x}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上的有界性.

例4 讨论函数 $f(x)=\sin x+\cos x$ 的奇偶性与周期性.

解 必须注意，只有对于所有的 x，$f(-x)=f(x)$ 或 $f(-x)=-f(x)$ 都成立，$f(x)$ 才称为偶函数或奇函数。如果两式仅对特定的 x 值成立，则不能得出它们是偶函数或奇函数的结论.

对于函数 $f(x)=\sin x+\cos x$，有

$$f(-x)=\sin(-x)+\cos(-x)=-\sin x+\cos x.$$

显然，对于所有的 x，$f(-x)$ 不恒等于 $f(x)$，而仅当 $x=n\pi$ 时才相等，所以 $f(x)$ 不是偶函数. 同理，对于所有的 x，$f(-x)$ 不恒等于 $-f(x)$，而仅当 $x=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi$ 时才相等，所以 $f(x)$ 也不是奇函数.

下面讨论函数的周期性.

因为 $\sin x$，$\cos x$ 都是周期为 2π 的周期函数，所以函数 $f(x)=\sin x+\cos x$ 也是周期为 2π 的周期函数。事实上，有

$$\begin{aligned} f(x+2n\pi) &= \sin(x+2n\pi)+\cos(x+2n\pi) \\ &= \sin x+\cos x = f(x), \end{aligned}$$

2π 是它的最小正周期.

也可以将 $\sin x+\cos x$ 变形为 $2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，显然，它是周期为 2π 的周期函数.