微积分

中央财政金融学院数学教研室 编

中国标准出版社

微　　积　　分

中央财政金融学院
数 学 教 研 室　编

中国标准出版社

1993 年

(京)新登字 023 号

内 容 简 介

本书按国家教委高等教育司 1989 年 10 月审定的《高等学校财经类专业核心课程教学大纲》中微积分的要求而编写。主要内容包括：函数与极限，导数与微分，不定积分与定积分，无穷级数，多元函数微积分学以及微分方程与差分方程初步等。每节后配有一定数量的练习题，每章后附有综合性习题及为适应近年来各类考试中的标准化试题而选编的客观性习题，书后附有习题答案。可作为高等学校财经专业微积分课程试用教材及财经工作人员自学用书。

微 积 分

中央财政金融学院
数 学 教 研 室 编

责任编辑 段方

*

中国标准出版社出版
（北京复外三里河）
中国标准出版社北京印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

开本 787×1092 1/32 印张 16.5 字数 365 千字
1994 年 5 月第一版 1994 年 5 月第一次印刷

*

ISBN7-5066-0783-2/O·005

印数 1-7 000 定价 10.00 元

前　　言

本书按国家教委高等教育司 1989 年 10 月审定的《高等学校财经类专业核心课程教学大纲》中微积分部分的要求所编写，可作为高等学校财经专业微积分课程的试用教材以及财经工作人员的自学用书。

本书的主要内容包括：函数与极限，导数与微分，不定积分与定积分，无穷级数，多元函数微积分学以及微分方程与差分方程初步等。

根据多年教学实践的经验，本书在编写中尽量体现数学学科的科学性与系统性，同时也充分考虑到财经专业数学教学的特点与需要。书中每节(除第一章外)配有一定数量的练习题，以利于基础知识的掌握和基本技能的训练。每章后附有一些较综合性的习题以及为适应近年来各类考试中的标准化试题而选编的客观性习题，以提高读者用数学方法分析和处理问题的能力。书中有些内容加有“ * ”标记，可根据教学需要和具体学时而选用。

本书由中央财政金融学院数学教研室集体编写。各章执笔人员是：白素芹(第一、二章)，王守祯(第三章)，车烜(第四章)，李晓林(第五章)，高筱华(第六章)，苗润生(第七章)，吴秉坚(第八章)，郑春山(第九、十章)。全书由高筱华副教授和吴秉坚副教授任主编并负责总纂。编写过程中得到李宝光教授的关心和帮助；曹克明副教授仔细审阅了部分初稿。编写中还参阅了兄弟院校的多种教材，在此一并表示衷心的感谢。

由于时间紧，经验和水平有限，书中难免有不妥之处，欢迎读者批评指正。

编者

1992年12月

目　　录

第一章　函　　数

§1.1　预备知识

一、实数及其几何表示

人们对数的认识最先是自然数，其次是有理数，然后才是无理数．正负整数、正负分数以及零，统称为有理数．有理数可以写成 p/q 的形式，其中 p 和 q 是整数，且 $q\neq0$. 而无理数（形如 $\sqrt{2}$，$\sqrt{5}+0.1$，$\lg3$，$\sin5°$，π 等）不能写成 p/q 的形式.

为了用几何方法表示数，我们引进数轴的概念．

设有一条水平直线，在这条直线上取定一点 O，称为原点. 规定由原点向右为正方向．再规定一个长度单位，称为单位长度．这种具有原点、方向及单位长度的直线为数轴．如图 1－1.

对于任意一个有理数 p/q，在数轴上可确定一点 A，使线段 $\overline{OA}$ 的长度与单位长度之比等于 p/q. 点 A 即是有理数 p/q 的

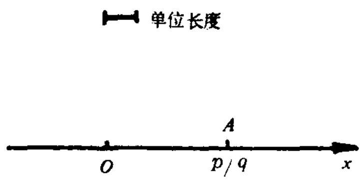

图 1－1

几何表示．p/q 是点 A 的坐标．称点 A 为有理点．

任何两个有理数 a 和 $b(a<b)$之间有无穷多个有理数(无论 b 与 a 的差多么小)．这是由于在 a 与 b 之间可以找到一个有理数，例如 $c=\frac{a+b}{2}$．同样，在 c 与 b 之间又可以找到一个有理数 $d=\frac{c+b}{2}$．依此类推，在任意两个不相等的有理数之间总存在着无穷多个有理数．即数轴上任何两个有理点之间可以插入无穷多个有理点．因此，可以说数轴上的有理点是处处稠密的．

虽然有理点在数轴上是处处稠密的，但它并没有填满整个数轴．例如，两腰为 1 的直角三角形，其斜边的长度 $\sqrt{2}$ 不是有理数．因此，数轴上坐标为 $\sqrt{2}$ 的点不是有理点．像这样的点也有无穷多个，而且在数轴上也是处处稠密的．这就是说，在数轴上除有理点之外还有许多空隙，这些空隙处的点称为无理点．与无理点相对应的数即为无理数．有理数和无理数统称为实数．因此，数轴上的全体点和全体实数之间建立了一一对应关系．即数轴上的每一个点表示一个实数；反之，每一个实数必与数轴上以该实数为坐标的点相对应．

实数充满数轴，因而它具有连续性．

二、实数的绝对值

定义 1.1 实数 a 的绝对值用符号 $|a|$ 表示，定义为

$$|a|=\begin{cases}-a, & a<0,\\ a, & a\geqslant 0.\end{cases}$$

例 1 $\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}-x, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x, & x>0.\end{cases}$

$|a|$的几何意义是：数轴上以 a 为坐标的点(称为点 a)与原点之间的距离．见图 1－2 及图 1－3.

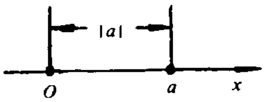

图 1－2

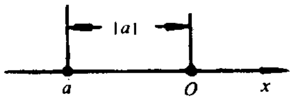

图 1－3

绝对值及其运算有下述基本性质：

1. $-|x|\leqslant x\leqslant|x|$.

当 $x>0$ 时有 $-|x|<x=|x|$；

当 $x=0$ 时有 $-|x|=x=|x|$；

当 $x<0$ 时有 $-|x|=x<|x|$.

2. 不等式 $|x|<\delta$ $(\delta>0)$ 与不等式 $-\delta<x<\delta$ 等价．即如果 $|x|<\delta$，则有 $-\delta<x<\delta$；反之，如果 $-\delta<x<\delta$，则有 $|x|<\delta$.

3. 不等式 $|x|>N(N>0)$ 与两不等式 $x>N$ 或 $x<-N$ 等价．

对任意实数 x 和 y，性质 4 至 7 成立，即

4. $|x+y|\leqslant|x|+|y|$.

证明　由性质 1 可得

$$-|x|\leqslant x\leqslant|x|, \tag{1.1}$$

$$-|y|\leqslant y\leqslant|y|. \tag{1.2}$$

将(1.1)与(1.2)两式相加得

$$-(|x|+|y|)\leqslant x+y\leqslant|x|+|y|.$$

根据性质 2 可得

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|.$$

5. $|x-y|\geqslant|x|-|y|$.

证明 因为

$$|x|=|(x-y)+y|\leqslant|x-y|+|y|,$$

移项得
$$|x-y|\geqslant|x|-|y|.$$

6. $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$.

7. $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}\quad(y\neq 0)$.

三、区间

在讨论某些问题时，常常需要限制在一部分实数范围内考虑，为此引进区间的概念．

区间是指数轴上介于某两点之间的一线段上的所有点的集合．这两点就是区间的端点，两点间的距离为区间长度．

设 a 与 b 为两个实数，且 $a<b$.

满足不等式 $a<x<b$ 的一切实数 x 的集合称为开区间，用记号 (a,b) 表示；

满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的一切实数 x 的集合称为闭区间，用记号 $[a,b]$ 表示；

满足不等式 $a\leqslant x<b$ 或 $a<x\leqslant b$ 的一切实数 x 的集合称为半开区间，分别用记号 $[a,b)$ 或 $(a,b]$ 表示．

以上区间均为有限区间．

满足不等式 $x>a$, $x\geqslant a$, $x<a$, $x\leqslant a$ 及 $-\infty<x<+\infty$ 的一切实数 x 的集合均为无穷区间，分别记为 $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,a)$, $(-\infty,a]$ 及 $(-\infty,+\infty)$.

四、邻域

定义 1.2 **设 a 和 δ 为两个实数，且 $\delta>0$，称满足不等式 $|x-a|<\delta$ 的一切实数 x 的集合为 a 的 δ 邻域．点 a 称为邻**

域的中心，δ 称为邻域的半径．由于不等式 $|x-a|<\delta$ 与不等式 $a-\delta<x<a+\delta$ 等价，因此，a 的 δ 邻域是以点 a 为中心，长度为 2δ 的开区间 $(a-\delta,a+\delta)$．如图 1－4.

若在点 a 的 δ 邻域内去掉中心点 a，则称此邻域为 a 的 δ 空心邻域，它可以用不等式表示为 $0<|x-a|<\delta$，或用区间表示为 $(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$.

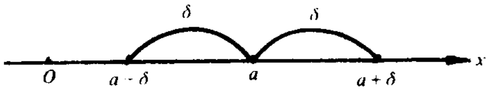

图 1－4

例 1 设 $a=-1,\delta=\frac{1}{2}$，试用区间表示点 a 的 δ 邻域及点 a 的 δ 空心邻域．

解 由于 $|x-(-1)|<\frac{1}{2}$，

即有 $$-\frac{3}{2}<x<-\frac{1}{2}.$$

所以，点 a 的 δ 邻域可表示为开区间 $\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$；点 a 的 δ 空心邻域为 $\left(-\frac{3}{2},-1\right)\cup\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$.

例 2 求不等式 $|x+1|+|x-1|\leqslant 4$ 的解．

解 由于不等式两端的值均非负，故两端平方得

$$x^2+2x+1+x^2-2x+1+2|x+1|\cdot|x-1|\leqslant 16.$$

整理得 $$|x^2-1|\leqslant 7-x^2,$$

即 $$x^2-7\leqslant x^2-1\leqslant 7-x^2,$$

亦即 $$\begin{cases} x^2-7\leqslant x^2-1, & (1.3) \\ x^2-1\leqslant 7-x^2. & (1.4) \end{cases}$$

式(1.3)对一切实数 x 恒成立．由式(1.4)解出

$$|x| \leqslant 2.$$

即所给不等式的解为$[-2,2]$.

§1.2 函数

我们在观察自然现象、进行科学试验的过程中，经常会遇到各种不同的量．这些量可以分为两种：一种是在过程进行中其数值保持不变，这样的量称为常量；另一种是在过程进行中其数值会发生变化，这种量称为变量．习惯上用字母a，b，c等表示常量，用字母x，y，t，s等表示变量．例如，一辆行驶中的公共汽车，车上的人数是常量；而汽车的行驶速度、油箱中的汽油量等是变量．常量用数轴上的定点来表示，变量用数轴上的动点来表示．

在同一过程中，往往有几个变量，并且它们之间的变化不是孤立的，而是相互联系、相互影响、遵循着一定的规律．现在我们就两个变量的情形，考察几个例子．

例1 将一个边长为60cm的正方形铁片的四个角各割去一个小正方形．然后将四边垂直于底面折起，焊成一个无盖的溶槽．则所割下的小正方形的边长x与溶槽的体积V都是变量，它们之间有以下关系：

$$V=(60-2x)^2x, \qquad 0<x<30.$$

当割下的小正方形的边长x在$(0,30)$内取某一数值时，由上式就可以确定溶槽的体积V的一个数值．

例2 自由落体运动中，设物体下落的时间为t，所落下的距离为s. 假定开始下落的时刻为$t=0$，着地时刻为$t=T$，则s与t之间有如下关系：