

51. 811
674

高等学校教学参考书

微 积 分 学 教 程

第一卷 第一分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著

叶 彦 谦 等 译

樊 映 川 校 订

(修 订 本)

人 民 教 育 出 版 社

第一分册目录

緒論 实数

§ 1. 有理数域	1
1. 前言(1) 2. 有理数域的順序(2) 3. 有理数的加法及減法(2)	
4. 有理数的乘法及除法(4) 5. 阿基米德公理(6)	
§ 2. 无理数的导入·实数域的順序	7
6. 无理数的定义(7) 7. 实数域的順序(10) 8. 輔助命题(11)	
9. 用无尽小数来表示实数(12) 10. 实数域的連續性(14) 11. 数集的界(16)	
§ 3. 实数的算术运算	18
12. 实数的和的定义(18) 13. 加法的性質(19) 14. 实数的积的定义(21)	
15. 乘法的性質(22) 16. 結論(24) 17. 絕對值(25)	
§ 4. 实数的其他性質及应用	26
18. 根的存在·以有理数为指数的幂(26) 19. 以任意实数为指数的幂(27)	
20. 对数(30) 21. 綫段的度量(31)	

第一章 極限論

§ 1. 整序变量及其極限	34
22. 变量、整序变量(34) 23. 整序变量的極限(37) 24. 无穷小量(38)	
25. 例題(39) 26. 关于有極限的整序变量的一些定理(43) 27. 无穷大量(45)	
§ 2. 極限的定理·若干容易求得的極限	47
28. 对等式及不等式取極限(47) 29. 关于无穷小的預备定理(49)	
30. 变量的算术运算(50) 31. 不定式(52) 32. 極限求法的例題(55)	
33. 施篤茲定理及其应用(59)	
§ 3. 單調整序变量	62
34. 單調整序变量的極限(62) 35. 例題(64) 36. 数 c (67)	
37. 数 e 的近似計算法(71) 38. 关于区間套的預备定理(74)	
§ 4. 收斂原理·部分極限	76
39. 收斂原理(76) 40. 部分数列及部分極限(78) 41. 波查諾-魏施德拉斯司	
預备定理(79) 42. 上限及下限(81)	

第二章 一元函数

§ 1. 函数概念	85
43. 变量及其变动区域(85) 44. 变量間的函数关系, 例题(86)	
45. 函数概念的定义(87) 46. 函数的解析表示法(90) 47. 函数的圖綫(92)	
48. 几类最重要的函数(94) 49. 反函数的概念(99) 50. 反三角函数(101)	
51. 函数的叠置·总结(106)	
§ 2. 函数的極限	107
52. 函数的極限的定义(107) 53. 变成整序变量的情形(109) 54. 例题(112)	
55. 極限理論的拓广(120) 56. 例题(123) 57. 單調函数的極限(125)	
58. 波查諾—柯希的一般判定法(126) 59. 函数的上限及下限(128)	
§ 3. 无穷小及无穷大的分級	128
60. 无穷小的比較(128) 61. 无穷小的尺度(129) 62. 等价无穷小(131)	
63. 上部的分出(133) 64. 应用題(135) 65. 无穷大的分級(137)	
§ 4. 函数的連續性及間断	137
66. 函数在一点处的連續性的定义(137) 67. 連續函数的算术运算(139)	
68. 連續函数的例題(140) 69. 單方連續·間断的分类(142) 70. 間断函数的例題(143)	
71. 單調函数的連續性及間断(146) 72. 初等函数的連續性(147)	
73. 連續函数的叠置(149) 74. 一个函数方程的解(149) 75. 指数函数、对数函数及幂函数的函数特性(151)	
76. 三角余弦及双曲余弦的函数特性(152)	
77. 函数的連續性在計算極限时应用(154) 78. 幂指数式(157) 79. 例題(158)	
§ 5. 連續函数的性質	160
80. 关于函数取零值的定理(160) 81. 应用于解方程(163) 82. 介值定理(163)	
83. 反函数的存在(165) 84. 关于函数的有界性的定理(167) 85. 函数的最大值及最小值(168)	
86. 均匀連續的概念(170) 87. 康托定理(172)	
88. 博萊尔預备定理(173) 89. 基本定理的新証明(175)	

第三章 导数及微分

§ 1. 导数及其求法	179
90. 求动点速度的問題(179) 91. 在曲綫上作切綫的問題(180)	
92. 导数的定义(182) 93. 求导数的例題(186) 94. 反函数的导数(190)	
95. 导数公式一覽表(192) 96. 函数的变量的公式(193) 97. 求导数的几个簡單法則(194)	
98. 复合函数的导数(196) 99. 例題(197) 100. 單方导数(203)	
101. 无穷导数(204) 102. 特殊情形的例題(205)	
§ 2. 微分	206
103. 微分的定义(206) 104. 可微性与导数存在之間的关系(207)	

105. 微分法的基本公式及法則(209)	106. 微分的形式不变性(211)
107. 微分是近似公式的來源(213)	108. 应用微分來估計誤差(215)
§ 3. 微分学的基本定理	217
109. 費馬定理(217)	110. 达布定理(219)
111. 洛尔定理(220)	112. 拉格朗奇公式(221)
113. 导数的極限(223)	114. 柯希公式(225)
§ 4. 高阶导数及高阶微分	226
115. 高阶导数的定义(226)	116. 任意阶导数的普遍公式(228)
117. 萊伯尼茲公式(232)	118. 例題(234)
119. 高阶微分(236)	120. 高阶微分的形式不变性的破坏(237)
121. 参变量微分法(238)	122. 有限差分(240)
§ 5. 戴勞公式	242
123. 多項式的戴勞公式(242)	124. 任意函数的展开式·余項的皮亞諾式(244)
125. 例題(247)	126. 余項的其他形式(251)
127. 近似公式(254)	
§ 6. 插值法	260
128. 插值法的最簡單問題·拉格朗奇公式(260)	129. 拉格朗奇公式的余項(261)
130. 有重基点的插值法·埃尔密特公式(263)	
第四章 利用导数研究函数	
§ 1. 函数的动态的研究	265
131. 函数为常数的条件(265)	132. 函数为單調的条件(267)
133. 不等式的証明(270)	134. 極大值及極小值·必要条件(273)
135. 充分条件·第一法則(275)	136. 例題(277)
137. 第二法則(281)	138. 高阶导数的应用(283)
139. 最大值及最小值的求法(285)	140. 应用題(287)
§ 2. 凸(与凹)函数	291
141. 凸(与凹)函数的定义(291)	142. 关于凸函数的簡單命題(292)
143. 函数凸性的条件(295)	144. 顏森不等式及其应用(298)
145. 拐点(301)	
§ 3. 函数的作圖	303
146. 問題的提出(303)	147. 作圖的步驟·例題(304)
148. 无穷間断·无穷区間·漸近綫(307)	149. 例題(310)
§ 4. 不定式的定值法	313
150. $\frac{0}{0}$ 型不定式(313)	151. $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式(319)
152. 其他型的不定式(321)	
§ 5. 方程式的近似解	323
153. 导言(323)	154. 比例法則(弦綫法)(324)
155. 牛頓法則(切綫法)(327)	156. 例題及習題(329)
157. 联合法(334)	158. 例題及習題(334)
字义索引	人名对照表

緒論 实数

§ 1. 有理数域

1. 前言 讀者对于有理数及其性質，从中学的教材內便很熟悉了。在那时，初等数学的要求，已趋向于必需扩大数的領域。的确，在有理数中即使是正整数(自然数)的根，例如 $\sqrt{2}$ ，也常常并不存在。就是說，并没有这样的有理数 $\frac{p}{q}$ (式中 p 及 q —自然数)，其平方能等于2。

为了証明，試假定其反面：設有分数 $\frac{p}{q}$ ，其平方为 $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ 。我們可以假設 $\frac{p}{q}$ 是既約分数，即 p 和 q 是沒有公約数的。因 $p^2 = 2q^2$ ，故 p 为偶数： $p = 2r$ (r —整数)，于是 q 为奇数。用 p 的式子代入，得： $q^2 = 2r^2$ ，由此推得 q 为偶数。所得的矛盾便証明了我們的命題。

同时，若我們仅停留在有理数的範圍內，那末在几何学上便已显然知道，并非一切的綫段都能有一个長度。例如考察边長为單位長度的正方形，其对角綫就不可能有有理長度 $\frac{p}{q}$ ，因若不然，依畢达哥拉定理，这長度的平方应等于2，而我們已看到这是不可能的。

在本緒論內，我們要做这样一件工作：在有理数域中添上新的数——无理数，以扩大有理数域的范围。同时，我們要証明，对有理数施行算术运算及用等号、不等号結合它們等普通性質，在扩大的領域內仍然是真实的。为着要对扩大后的数域来驗證上述性質，需选出为数最少的基本性質，使其余的一切性質都能作为形式邏輯的結果而从之推出：所要驗證的便仅限于这些基本性質了。

因此，我們列举有理数域的下列一些基本性質。同时我們將用一

些例子來證明，它們的另一些眾所周知的性質是怎樣從基本性質推導出來的。我們這裡所說的“數”，總是指的有理數，用字母 a, b, \dots 等來表示它們。

2. 有理數域的順序 首先讓我們約定：所謂相等的數就是同一數的各種不同形式。換言之，“相等”(=)的概念即指“恒等”。因此，我們不再列舉相等的數的性質。

有理數域的順序得自“大於”(>)的概念，與之有關的是第一組性質。

I 1° 每一對數 a 與 b 之間必有且僅有下列關係之一

$$a = b, a > b, a < b;$$

I 2° 由 $a > b$ 及 $b > c$ 推得 $a > c$ (> 的傳遞性)；

I 3° 若 $a > b$ ，則必能求得一數 c ，使

$$a > c, \text{ 且 } c > b \textcircled{1}$$

(稠密性)。

“小於”(<)的概念作為派生的而引入。說 $a < b$ ，當且僅當 $b > a$ 時。顯而易見，由 $a < b$ 及 $b < c$ ，即得 $a < c$ (< 的傳遞性)。實則，由假設，不等式 $a < b$ 及 $b < c$ ，相當於不等式 $b > a$ 及 $c > b$ ；由此推得 $c > a$ (I 2°)，或即 $a < c$ 。

在對有理數施行算術運算時所要牽涉到的“大於”這一概念的其他性質，將在以後隨時指出之。

3. 有理數的加法及減法 第二組性質是關於加法的，即關於求兩數之和的運算的。對於每一對數 a 及 b ，存在着一個(唯一的)數，被稱為 a 及 b 的和(記成 $a + b$)。這概念具有下列的性質：

II 1° $a + b = b + a$ (加法的交換性)；

II 2° $(a + b) + c = a + (b + c)$ (加法的結合性)。

① 在這條件下也說成：數 c 位於數 a 與 b 之間；顯然，這樣的數有無限個之多。

零这个数比较特殊,它具有下列特性:

$$\text{II } 3^\circ \quad a+0=a;$$

此外,

$$\text{II } 4^\circ \quad \text{对每一数 } a \text{ 存在着(与它对称的)数 } -a, \text{ 使 } a+(-a)=0.$$

在这些性质的基础上,首先解决加法的逆运算,即减法的问题。通常称使 $c+b=a$ ① 的数 c 为数 a 及 b 的差,假若如此,便发生这样的数的存在及其唯一性的问题。

设 $c=a+(-b)$, 则得 [II 2°, 1°, 4°, 3°]:

$$c+b=[a+(-b)]+b=a+[(-b)+b]=a+[b+(-b)]=a+0=a,$$

因此,这 c 满足于差的定义。

反之,令 c' 为数 a 及 b 的差,则有 $c'+b=a$ 。在这等式两边各加 $(-b)$, 并变换其左边 [II 2°, 4°, 3°]:

$$(c'+b)+(-b)=c'+[b+(-b)]=c'+0=c',$$

结果得 $c'=a+(-b)=c$ 。

这样,就证明了数 a 及 b 的差的存在及单值性;把它记成 $a-b$ 。

由差的单值性可以推得一系列的推论。首先,由 II 3° 推得 $0=a-a$, 因而得出结论:除去数 0 以外,具有相似于 II 3° 的性质的数不存在。其次,由此推得与所给数对称的数的唯一性: $-a=0-a$ 。

因为由 $a+(-a)=0$ 可推得 $(-a)+a=0$ [II 1°], 所以 $a=-(-a)$, 即数 a 及 $-a$ 为互相对称的数。我们再来证明对称数满足下述性质:

$$-(a+b)=(-a)+(-b).$$

为此,只须证明

$$(a+b)+[(-a)+(-b)]=0,$$

而这由 II 1°, 2°, 4°, 3°, 便可推得。

最后,再引进联系 $>$ 与加号的一个性质。

$$\text{II } 5^\circ \quad \text{由 } a > b \text{ 推得 } a+c > b+c.$$

① 依 II 1° 定义差的这个等式可写成: $b+c=a$ 。

它使我們得以在不等式的兩邊各加上一個等量；用它又可證明兩不等式

$$a > b \text{ 和 } a - b > 0$$

是相當的。其次，由 $a > b$ 推得 $-a < -b$ 。實則，由 $a > b$ 引致 $a - b > 0$ ；但 $a - b = a + (-b) = (-b) + a = (-b) + [-(-a)] = (-b) - (-a)$ ，因此這不等式可改寫成： $(-b) - (-a) > 0$ ，由此 $-b > -a$ 或 $-a < -b$ 。

特別是，由 $a > 0$ 推得 $-a < 0$ ，由 $a < 0$ 推得 $-a > 0$ 。若 $a \neq 0$ ，則在兩個互相對稱的數 a 及 $-a$ 中，必有一個（且僅一個）將大於 0；它即稱為數 a 或數 $-a$ 的絕對值，記成

$$|a| = |-a|.$$

零的絕對值就定為零： $|0| = 0$ 。

根據性質 II 5°，可以逐項地合并不等式：由 $a > b$ 及 $c > d$ 推得 $a + c > b + d$ 。實因，由 $a > b$ 推得 $a + c > b + c$ ；仿此，由 $c > d$ 推得 $c + b > d + b$ ，或 [II 1°] $b + c > b + d$ ，然後由 I 2°，最後即得 $a + c > b + d$ 。

4. 有理數的乘法及除法 第三組性質是關於乘法的，即關於求兩數之乘積的運算的。對於每一對數 a 及 b 存在着一個（唯一的）數，被稱為 a 及 b 的乘積（記成 $a \cdot b$ 或 ab ）。這概念具有下列性質：

III 1° $ab = ba$ （乘法的交換性）；

III 2° $(ab)c = a(bc)$ （乘法的結合性）。

壹這個數比較特殊，它具有下列特性：

III 3° $a \cdot 1 = a$ ；

此外，

III 4° 對於每一異於 0 的數 a ，必有數 $\frac{1}{a}$ （其倒數），使 $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ 。

關於除法的問題，作為乘法的逆運算，亦可根據乘法的性質來解決，正如前面根據加法的性質來解決關於減法的問題一樣。倒數在這裡的作用正如對稱數在那裡的作用一樣。

如果一數 c 滿足關係

$$c \cdot b = a \textcircled{1}$$

(其中 b 常预先假定异于 0), 则 c 称为 a 及 b 的商。

令 $c = a \cdot \frac{1}{b}$, 就可以满足这定义。因 [III 2°, 1°, 4°, 3°]:

$$c \cdot b = \left(a \cdot \frac{1}{b}\right) \cdot b = a \cdot \left(\frac{1}{b} \cdot b\right) = a \cdot \left(b \cdot \frac{1}{b}\right) = a \cdot 1 = a.$$

反之, 若数 c' 满足数 a 及 b 的商的定义, 于是 $c' \cdot b = a$, 则在这等式两边乘以 $\frac{1}{b}$, 并变换左边 [III 2°, 4°, 3°]:

$$(c' \cdot b) \cdot \frac{1}{b} = c' \cdot \left(b \cdot \frac{1}{b}\right) = c' \cdot 1 = c',$$

就得到 $c' = a \cdot \frac{1}{b} = c$ 。

这样, 就证明了数 a 及 b (设 $b \neq 0$) 的商的存在及单值性; 把它记成 $a:b$ 或 $\frac{a}{b}$ 。

由商的单值性可知, 除了 1 以外, 再没有什么数能具有类似于 III 3° 的性质。由此, 如前所述, 推得倒数 (看成 1 及 a 的商) 的唯一性; 此外, 容易证明数 a 及 $\frac{1}{a}$ 是互为倒数。

下列性质与算术的基本运算——加法及乘法双方都有关系:

III 5° $(a+b)c = a \cdot c + b \cdot c$ (乘法关于和的分配性)。

由此很易导出关于乘法关于差的分配性:

$$(a-b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c.$$

依差的定义, 这可以直接由下式推出

$$(a-b) \cdot c + b \cdot c = [(a-b) + b] \cdot c = a \cdot c.$$

再应用性质 III 5°, 可证

$$b \cdot 0 = 0 \cdot b = 0.$$

实因 [II 3°]

$$a + 0 = a, (a+0) \cdot b = a \cdot b + 0 \cdot b = a \cdot b,$$

① 依 III 1°, 定义商的这个等式也可写成: $b \cdot c = a$ 。

由此推得 $0 \cdot b = 0$, 再由 [III 1°] 得 $b \cdot 0 = 0$ 。

反之, 若 $a \cdot b = 0$ 又 $b \neq 0$, 則必須 $a = 0$ 。實因, $a = \frac{0}{b}$, 但同時又有 $0 = \frac{0}{b}$ (因 $b \cdot 0 = 0$), 因為商是唯一的, 故 $a = 0$ 。

最後, 我們指出聯系符號 $>$ 與乘號的一個性質:

III 6° 由 $a > b$ 及 $c > 0$ 推得 $a \cdot c > b \cdot c$ 。

據此可以用正數乘不等式的兩邊。由此可知, 當 $a > 0$ 及 $b > 0$ 時, 亦必有 $a \cdot b > 0$ 。

注意, $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$; 這由下面推得

$$a \cdot b + (-a) \cdot b = [a + (-a)] \cdot b = 0 \cdot b = 0.$$

現在不難看出, 若 $a < 0, b > 0$, 於是 $a = -|a|, b = |b|$, 則

$$a \cdot b = (-|a|) \cdot |b| = -(|a| \cdot |b|) < 0;$$

當 $a > 0, b < 0$ 時亦如此, 又若 $a < 0, b < 0$, 則

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (-|a|)(-|b|) = -[|a| \cdot (-|b|)] = \\ &= -[-(|a| \cdot |b|)] = |a| \cdot |b| > 0. \end{aligned}$$

這樣, 我們已完全重新建立了關於乘法的符號規則, 這些符號規則現在已成為有理數的上述性質的邏輯推論了。換言之, 如果有有理數要滿足上述諸性質, 就必定要遵守這些符號規則。關於乘以 0 的規則, 也可以這樣說(如上所述)。

在處理了加法和乘法的性質以後, 我們現在能夠證明在前面數的基本性質 [I 3°] 中已述及的有理數域的稠密性了。就是, 可以用它們證明, 例如, 由 $a > b$ 推得 $a > \frac{a+b}{2} > b$ 。

5. 阿基米德公理 我們用下列的簡單而重要的論證, 來結束我們的有理數基本性質一覽表。這一性質是不能由上述的諸性質里推得的。

IV 1° 不論 $c > 0$ 是怎樣的數, 總有大于 c 的自然數 n 存在着(«阿基米德公理»)。

实际上，阿基米德曾說明一个几何的命題，即为众所周知的《阿基米德公理》：

若在直線上給定任意兩綫段 A 及 B ，則 A 重复相加若干次后，其和总可以大于 B 。

$$\underbrace{A + A + \cdots + A}_{n\text{次}} = A \cdot n > B.$$

若将这論証轉而对正数 a 及 b 来叙述，它便肯定有这样的自然数 n 存在使

$$\underbrace{a + a + \cdots + a}_{n\text{次}} = a \cdot n > b.$$

若应用已研究过的有理数的性質，則这不等式相当于 $n > \frac{b}{a}$ ；把商 $\frac{b}{a}$ 記成 c ，我們便得出上面所叙述的 IV 1°。

§ 2. 无理数的导入 · 实数域的順序

6. 无理数的定义 有理数集及其在第一节內列举的一切性質，作为是已給的。

我們仿效戴狄金 (R. Dedekind) 来叙述无理数的理論。有理数域內的分划的概念是这理論的基础。若将有理数全体所成的集合分拆为两个非空集合(即至少包含一个数的) A, A' 。我們把这样的分拆叫做分划，只要滿足条件：

- 1° 任一有理数，必在且仅在 A 及 A' 二集之一^① 中出现；
- 2° 集 A 內的任一数 a ，必小于集 A' 內的任一数 a' 。

集 A 称为分划的下組，集 A' 为上組。分划記成 $A|A'$ 。

由分划的定义推得，小于下組內的数 a 的一切有理数也都属于下

① “任一有理数仅在二集之一中出现”这一事实亦可由 2° 推得。

組。仿此，大于上組內的數 a' 的一切有理數亦都屬於上組。

例 1. 一切有理數 a ，滿足不等式 $a < 1$ 的，定為集 A ，一切 a' ，滿足 $a' \geq 1$ 的，都算入集 A' 。

很易驗證，這樣，我們實際上已得出分劃了。數 1 屬於 A' 組，且顯然成為其中最小的數。由另一方面看，在 A 組內並無最大數，因不論我們在 A 內取怎樣的數 a ，恒能在 a 與 1 之間指出有理數 a_1 來，因而它必大于 a 並且屬於 A 組。

例 2. 取小于或等于 1 的一切有理數 a ， $a \leq 1$ ，歸入下組 A ；取大于 1 的一切有理數 a' ， $a' > 1$ ，歸入上組。

則亦得一分劃，且其中在上組無最小數，而在下組有最大數（即 1）。

例 3. 取使 $a^2 < 2$ 的一切正有理數 a ，數 0 及一切負有理數歸入 A 組，使 $a'^2 > 2$ 的一切正有理數 a' 歸入 A' 組。

很易證明，我們亦已得出分劃。此處，在 A 組內既無最大數，在 A' 組內亦無最小數。我們將證明，例如，這論斷的第一點（第二點同樣可以證明）。設 a 為 A 組內的任意正數，則 $a^2 < 2$ 。再證，必能得這樣的正整數 n ，使

$$\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 < 2,$$

於是 $a + \frac{1}{n}$ 亦屬於 A 。

這不等式相當于：

$$a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < 2, \quad \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < 2 - a^2,$$

若 n 滿足不等式 $\frac{2a+1}{n} < 2 - a^2$ ，則上面第二個不等式也自然能滿足了。為此，只須取

$$n > \frac{2a+1}{2-a^2},$$

而這是恒為可能的 [依《阿基米德公理》IV 1°]。因此，不論 a 為 A 組內的怎樣的正數，在這 A 組內終能求得大于它的數；又因為當 $a \leq 0$ 時

这論証显也成立,故在 A 組內沒有任何数能成为最大的。

很易明了,不可能有这样的分划存在,在它的下組內有最大数 a_0 ,同时在上組內又有最小数 a'_0 。实际上,假設这样的分划存在着。則应用有理数域的稠密性[13°],必能取得一个位于 a_0 与 a'_0 之間的有理数 $c: a_0 < c < a'_0$ 。数 c 不能属于 A 組,因否則, a_0 就不是此組的最大数,仿此, c 亦不能属于 A' 組,但这是与定义分划的概念的性質 1° 相矛盾的。

这样,分划仅能有三种类型,如剛才例 1, 2, 3 所表明的:

- 1) 在下組 A 內无最大数,而在上組 A' 內有最小数 r ;
- 2) 在下組 A 內有最大数 r ,而在上組 A' 內无最小数;
- 或 3), 在下組內既无最大数,在上組內亦无最小数。

在前两种情形,我們說,分划由有理数 r 所产生(r 成为 A 与 A' 之間的界数),或說分划定义有理数 r 。在例 1, 2 中, 1 便是这样的数。在第三种情形界数并不存在,分划并不定义任何有理数。今引入新的对象——无理数。讓我們約定,任一 3) 型的分划定义某一无理数 α 。这个数 α 便代替缺少的界数,我們好象把它插入在 A 組的一切数 a 与 A' 組的一切数 a' 中間。在例 3 中,这新創的数,很易推想而知,即是 $\sqrt{2}$ 。

我們并不引入无理数的任何同一式样的記法①,我們总是把无理数 α 理解为有理数域中确定它的分划 $A|A'$ 。

为了一致起見,同样来理解有理数 r 也常是很方便的。但对于任一有理数 r 存在着确定它的两种分划: 在两种情形中,数 $a < r$ 总是属于下組,数 $a' > r$ 总是属于上組,而数 r 本身可以任意包含在下組(这时 r 为下組的最大数),或包含在上組(r 为上組的最小数)。为了确定起見,我們約定: 凡說到确定有理数 r 的分划时,常把这数放在上組內。

① 这里說的是有尽的記法,对于无尽記法,讀者在 9 中会熟習它。个别給定的无理数我們經常总是用这数所由产生的关系式来記它,如 $\sqrt{2}$, $\log 5$, $\sin 10^\circ$ 等。

有理數及無理數總稱為實數。實數的概念，為數學分析的基本概念之一。

7. 實數域的順序 由分划 $A|A'$ 及 $B|B'$ 所確定的二無理數 α 及 β ，當且僅當二分划為恒等時，始認為相等。實際上只要下組 A 及 B 互相重合就夠了，因為這時 A' 與 B' 亦必互相重合。這定義在數 α 及 β 為有理數時，仍可保持不變。換言之，若二有理數 α 與 β 相等，則確定它們的分划相重合，反之，由分划的重合推得數 α 與 β 相等。在這裡，自然仍須注意到，以分划來確定有理數時的上述約定^①。

現在轉而建立關於實數“大於”的概念。關於有理數這概念早已建立了。對於有理數 r 與無理數 α 之間，“大於”的概念實際上在 6 中已建立了：即，若 α 由分划 $A|A'$ 所確定，我們便算作 α 大於 A 組中的一切有理數，同時 A' 組中的一切有理數大於 α 。

現在設有二無理數 α 及 β ， α 由分划 $A|A'$ ， β 由分划 $B|B'$ 所確定。我們將稱有較大下組的那個數為較大數。更準確些說，若 A 組整個包含着 B 組，並且不與它重合，則算作 $\alpha > \beta$ 。（這條件，顯然，相當於： B' 組整個包含着 A' 組，並且不與它重合）。很易驗證，當 α, β 之一是或甚至二者都是有理數時，這定義仍可保持。

現在證明實數均能滿足性質 I1° 及 2°。

I1° 任一對（實）數 α 與 β 之間必有且僅有下列三種關係之一：

$$\alpha = \beta, \alpha > \beta, \beta > \alpha.$$

若確定 α 的分划 $A|A'$ 與確定 β 的分划 $B|B'$ 相重合，則 $\alpha = \beta$ 。若這二分划不相重合，則或 A 整個包含 B （這時 $\alpha > \beta$ ），或不是這樣。在後一情形， B 組內有元素 b_0 ，落在 A' 組內。則對於 A 組內的任何元素 a ，必有 $a < b_0$ 。因此 B 組整個包含 A 組，且不與它重合，於是我們有 $\beta > \alpha$ 。

① 沒有這條件，例如，在 6 的例 1 及 2 內所考察的分划，雙方都定義數 1，但非恒等。

I 2° 由 $\alpha > \beta, \beta > \gamma$ 推得 $\alpha > \gamma$ 。

設数 α, β, γ (它們中間可能有有理数) 是由分划 $A|A', B|B', C|C'$ 来确定的。若 $\alpha > \beta$, 則依“大于”的定义, A 組包含 B 組, 且并不与它重合。但因 $\beta > \gamma$, 故 B 組包含 C 組, 且不与它重合。因此, A 組亦包含 C 組, 并且不与它重合, 即 $\alpha > \gamma$ 。

如在 2 中一样現在可以建立“小于”的概念: 若 $\beta > \alpha$, 則我們說 $\alpha < \beta$ 。< 号亦与 > 号一样具有傳遞性。

8. 輔助命題 現在我們来建立实数域的稠密性(比較 I 3°); 准确些說, 我們將証明下列論断:

預备定理 1. 对于不論怎样的两个实数 α 及 β , 其中 $\alpha > \beta$, 恒有一个位于它們中間的有理数 $r: \alpha > r > \beta$ (因此, 这种有理数有无穷个)。

因 $\alpha > \beta$, 故确定数 α 的分划的下組 A 整个包含确定 β 的下組 B , 且不与 B 重合。因此在 A 內必有有理数 r , 它不包含在 B 內, 于是必属于 B' ; 对于它

$$\alpha > r \geq \beta$$

(只有在 β 为有理数时始能成立等式)。但因为 A 內无最大数, 故在必要时, 把 r 取得大一些就可以取消等式。

附注 我們事实上已証明了比实数域的稠密性还要强的性質: 即在实数 α 与 β (若 $\alpha > \beta$) 之間必定存在着有理数 (不仅是实数)。以后我們就将引用这个更强的稠密性。

由此直接推得

預备定理 2. 設給定两个实数 α 和 β 。如果任取一个数 $e > 0$, 数 α 及 β 都能位于同一对有理数 s 与 s' 之間:

$$s' > \alpha > s, \quad s' > \beta > s,$$

这对数的差小于 e :

$$s' - s < e,$$

則数 α 与 β 必須相等。

證明 我們用反証法來證明。例如，設 $\alpha > \beta$ ，依預備定理 1，在 α 與 β 間可以插入兩個有理數 r 及 $r' > r$ ：

$$\alpha > r' > r > \beta.$$

於是對於任何二數 s 及 s' ，當 α 及 β 都在它們之間時，顯然成立如下不等式

$$s' > r' > r > s,$$

由此

$$s' - s > r' - r > 0,$$

因此差 $s' - s$ 不能小於數 $e = r' - r$ ，違背預備定理的條件。這矛盾即證明了預備定理。

9. 用無窮小數來表示實數 現在我們考慮這樣的表示實數的方法，即其分數部分（尾數）是正的，而同時，其整數部分可以為正的、負的或零。

首先假定被考察的實數 α 並非整數，亦非有盡十進小數。現在要來求它的十進小數近似值。若 α 由分劃 $A|A'$ 所確定，則首先易見在 A 組內必有整數 M ，又在 A' 組內亦必有整數 $N > M$ 。在 M 上次第加 1，必能得出這樣兩個相鄰的整數 C_0 及 $C_0 + 1$ ，使

$$C_0 < \alpha < C_0 + 1.$$

這裡的數 C_0 可以為正的、負的或零。

若再用數 $C_0.1; C_0.2; \dots; C_0.9$ ，分 C_0 與 $C_0 + 1$ 間的區間為十等分，則 α 必（且僅）落在其中的一個部分區間內，因此我們又求得相差為 $\frac{1}{10}$ 的兩數： $C_0.c_1$ 及 $C_0.c_1 + \frac{1}{10}$ ，且有

$$C_0.c_1 < \alpha < C_0.c_1 + \frac{1}{10}.$$

繼續這樣分下去，在確定數碼 c_1, c_2, \dots, c_{n-1} 後，我們就用不等式

$$C_0.c_1c_2 \dots c_n < \alpha < C_0.c_1c_2 \dots c_n + \frac{1}{10^n}. \quad (1)$$

定義第 n 位數碼 c_n 。

這樣，在求數 α 的十進小數近似值的过程中，我們求得整數 C_0 及

数碼 $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ 的无尽序列。由此組成的无尽小数，即記号

$$C_0.c_1 c_2 \dots c_n \dots \quad (2)$$

可以看成是实数 α 的一种表示。

在例外的情形，当 α 本身就是整数或有尽小数，亦可以用相似的方法由比(1)更普遍的关系式

$$C_0.c_1 c_2 \dots c_n \leq \alpha \leq C_0.c_1 c_2 \dots c_n + \frac{1}{10^n} \quad (1a)$$

来相繼地确定数 C_0 及数碼 $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ 。事情是这样的，到某时，数 α 会重合于包含它的区間的一端，重合于左端或右端都行；从这时开始，相应地，在(1a)中左端或右端就将經常不变地成立等式。按照成立等式的是左端还是右端，这以后的各数碼就将全是 0 或全是 9。因此，这时 α 就有了双重的表示，一种是用零循环的，一种是用 9 循环的，例如，

$$\begin{aligned} 3.826 &= 3.826000\dots = 3.825999\dots, \\ -3.826 &= \bar{4}.174000\dots = \bar{4}.173999\dots \end{aligned}$$

反之，今設任給一无尽十进小数(2)；我們要証明总可以找到一实数 α ，刚好是被这小数所表示的。为此，我們来考察小数(2)的一段：

$$C_n = C_0.c_1 c_2 \dots c_n, \quad (3)$$

把它作为所求数的“亏(不足的)近似值”，同样把

$$C'_n = C_0.c_1 c_2 \dots c_n + \frac{1}{10^n} \quad (4)$$

作为其“盈(过剩的)近似值”。不难看出，每一 C_n 小于每一 C'_n 。現在我們用如下法来定有理数域的一个分划：把大于一切 C_n 的有理数 a' (例如，一切数 C'_n) 放在上組 A' 內，而把一切余下的数(例如，数 C_n 本身)放在 A 組內。很易驗証，这就是我們所要的分划，它确定了所求的实数 α 。

实則，因 α 就是在兩組之間的界数，因此，当然成立

$$C_n \leq \alpha \leq C'_n,$$