高等学校教学参考书

微积分学教程

第一卷 第一分册

Г. M. 菲赫金哥尔茨著

叶彦谦等译

樊映川校订

(修订本)

人民教育出版社

第一分册目录

緒論　实数

第一章　極限論

第二章 一元函数

第三章 导数及微分

第四章　利用导数研究函数

緒論　实数

§1. 有理数域

1. 前言　讀者对于有理数及其性質，从中学的教材内便很熟悉了。在那时，初等数学的要求，已趋向于必需扩大数的領域。的确，在有理数中卽使是正整数(自然数)的根，例如$\sqrt{2}$，也常常并不存在。就是說，并沒有这样的有理数$\frac{p}{q}$(式中p及q——自然数)，其平方能等于2。

为了証明，試假定其反面：設有分数$\frac{p}{q}$，其平方为$\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$。我們可以假設$\frac{p}{q}$是既約分数，卽$p$和$q$是沒有公約数的。因$p^2=2q^2$，故$p$为偶数：$p=2r$($r$—整数)，于是$q$为奇数。用$p$的式子代入，得：$q^2=2r^2$，由此推得$q$为偶数。所得的矛盾便証明了我們的命題。

同时，若我們仅停留在有理数的范圍內，那末在几何学上便已显然知道，并非一切的綫段都能有一个長度。例如考察边長为單位長度的正方形，其对角綫就不可能有有理長度$\frac{p}{q}$，因若不然，依畢达哥拉定理，这長度的平方应等于2，而我們已看到这是不可能的。

在本緒論內，我們要做这样一件工作：在有理数域中添上新的数——无理数，以扩大有理数域的范圍。同时，我們要証明，对有理数施行算术运算及用等号、不等号結合它們等普通性質，在扩大的領域內仍然是眞实的。为着要对扩大后的数域来驗証上述性質，需选出为数最少的基本性質，使其余的一切性質都能作为形式邏輯的結果而从之推出：所要驗証的便仅限于这些基本性質了。

因此，我們列举有理数域的下列一些基本性質。同时我們将用一

些例子来証明，它們的另一些众所周知的性質是怎样从基本性質推导出来的。我們这里所說的"数"，总是指的有理数，用字母 $a, b\cdots$ 等来表示它們。

2．有理数域的順序 首先讓我們約定：所謂相等的数就是同一数的各种不同形式。换言之，"相等"(=)的概念即指"恒等"。因此，我們不再列举相等的数的性質。

有理数域的順序得自"大于"(>)的概念，与之有关的是第一組性質。

I 1° 每一对数 a 与 b 之間必有且仅有下列关系之一

$$a=b,\ a>b,\ a<b;$$

I 2° 由 $a>b$ 及 $b>c$ 推得 $a>c$（> 的傳遞性）；

I 3° 若 $a>b$，則必能求得一数 c，使

$$a>c,\ 且\ c>b①$$

（稠密性）。

"小于"(<)的概念作为派生的而引入。說 $a<b$，当且仅当 $b>a$ 时。显而易見，由 $a<b$ 及 $b<c$，即得 $a<c$（< 的傳遞性）。实則，由假設，不等式 $a<b$ 及 $b<c$，相当于不等式 $b>a$ 及 $c>b$；由此推得 $c>a$（I2°），或即 $a<c$。

在对有理数施行算术运算时所要牵涉到的"大于"这一概念的其他性質，将在以后随时指出之。

3．有理数的加法及减法 第二組性質是关于加法的，即关于求两数之和的运算的。对于每一对数 a 及 b，存在着一个（唯一的）数，被称为 a 及 b 的和（記成 $a+b$）。这概念具有下列的性質：

II 1° $a+b=b+a$（加法的交換性）；

II 2° $(a+b)+c=a+(b+c)$（加法的結合性）。

① 在这条件下也說成：数 c 位于数 a 与 b 之間；显然，这样的数有无限个之多。

零这个数比較特殊，它具有下列特性：

II 3° $a+0=a$;

此外，

II 4° 对每一数 a 存在着(与它对称的)数 $-a$, 使 $a+(-a)=0$。

在这些性質的基础上，首先解决加法的逆运算即减法的問題。通常称使 $c+b=a$[1] 的数 c 为数 a 及 b 的差，假若如此，便發生这样的数的存在及其唯一性的問題。

設 $c=a+(-b)$, 則得[II 2°, 1°, 4°, 3°]:

$$c+b=[a+(-b)]+b=a+[(-b)+b]=a+[b+(-b)]=a+0=a,$$

因此，这 c 滿足于差的定义。

反之，令 c' 为数 a 及 b 的差，則有 $c'+b=a$。在这等式两边各加 $(-b)$, 并变換其左边[II 2°, 4°, 3°]:

$$(c'+b)+(-b)=c'+[b+(-b)]=c'+0=c',$$

結果得 $c'=a+(-b)=c$。

这样，就証明了数 a 及 b 的差的存在及單值性；把它記成 $a-b$。

由差的單值性可以推得一系列的推論。首先，由 II 3° 推得 $0=a-a$, 因而得出結論：除去数 0 以外，具有相似于 II 3° 的性質的数不存在。其次，由此推得与所給数对称的数的唯一性：$-a=0-a$。

因为由 $a+(-a)=0$ 可推得 $(-a)+a=0$ [II 1°], 所以 $a=-(-a)$, 即数 a 及 $-a$ 为互相对称的数。我們再来証明对称数滿足下述性質：

$$-(a+b)=(-a)+(-b)。$$

为此，只須証明

$$(a+b)+[(-a)+(-b)]=0,$$

而这由 II 1°, 2°, 4° 3°, 便可推得。

最后，再引进联系 > 与加号的一个性質。

II 5° 由 $a>b$ 推得 $a+c>b+c$。

---

① 依 II 1° 定义差的这个等式可写成：$b+c=a$。

它使我們得以在不等式的两边各加上一个等量；用它又可証明两不等式

$$a>b \text{ 和 } a-b>0$$

是相当的。其次，由 $a>b$ 推得 $-a<-b$。实則，由 $a>b$ 引致 $a-b>0$；但 $a-b=a+(-b)=(-b)+a=(-b)+[-(-a)]=(-b)-(-a)$，因此这不等式可改写成：$(-b)-(-a)>0$，由此 $-b>-a$ 或 $-a<-b$。

特别是，由 $a>0$ 推得 $-a<0$，由 $a<0$ 推得 $-a>0$。若 $a\neq 0$，則在两个互相对称的数 a 及 $-a$ 中，必有一个（且仅一个）将大于 0；它即称为数 a 或数 $-a$ 的絕对值，記成

$$|a|=|-a|.$$

零的絕对值就定为零：$|0|=0$。

根据性質 II 5°，可以逐項地合并不等式：由 $a>b$ 及 $c>d$ 推得 $a+c>b+d$。实因，由 $a>b$ 推得 $a+c>b+c$；仿此，由 $c>d$ 推得 $c+b>d+b$，或[II 1°] $b+c>b+d$，然后由 I 2°，最后卽得 $a+c>b+d$。

4. 有理数的乘法及除法 第三組性質是关于乘法的，卽关于求两数之乘积的运算的。对于每一对数 a 及 b 存在着一个（唯一的）数，被称为 a 及 b 的乘积（記成 $a\cdot b$ 或 ab）。这概念具有下列性質：

III 1° $ab=ba$（乘法的交換性）；

III 2° $(ab)c=a(bc)$（乘法的結合性）。

壹这个数比較特殊，它具有下列特性：

III 3° $a\cdot 1=a$；

此外，

III 4° 对于每一异于 0 的数 a，必有数 $\frac{1}{a}$（其倒数），使 $a\cdot\frac{1}{a}=1$。

关于除法的問題，作为乘法的逆运算，亦可根据乘法的性質来解决，正如前面根据加法的性質来解决关于减法的問題一样。倒数在这里的作用正如对称数在那里的作用一样。

如果一数 c 滿足关系

$$c \cdot b = a$$①

(其中 b 常预先假定异于 0)，則 c 称为 a 及 b 的商。

令 $c = a \cdot \frac{1}{b}$，就可以滿足这定义。因[III 2°, 1°, 4°, 3°]:

$$c \cdot b = \left(a \cdot \frac{1}{b}\right) \cdot b = a \cdot \left(\frac{1}{b} \cdot b\right) = a \cdot \left(b \cdot \frac{1}{b}\right) = a \cdot 1 = a.$$

反之，若数 c' 滿足数 a 及 b 的商的定义，于是 $c' \cdot b = a$，則在这等式两边乘以 $\frac{1}{b}$，并变換左边[III 2°, 4°, 3°]:

$$(c' \cdot b) \cdot \frac{1}{b} = c' \cdot \left(b \cdot \frac{1}{b}\right) = c' \cdot 1 = c',$$

就得到 $c' = a \cdot \frac{1}{b} = c$。

这样，就証明了数 a 及 b(設 $b \neq 0$)的商的存在及單值性；把它記成 $a:b$ 或 $\frac{a}{b}$。

由商的單值性可知，除了 1 以外，再沒有什么数能具有类似于 III 3° 的性質。由此，如前所述，推得倒数(看成 1 及 a 的商)的唯一性；此外，容易証明数 a 及 $\frac{1}{a}$ 是互为倒数。

下列性質与算术的基本运算——加法及乘法双方都有关系:

III 5° $(a+b)c = a \cdot c + b \cdot c$(乘法关于和的分配性)。

由此很易导出关于乘法关于差的分配性:

$$(a-b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c.$$

依差的定义，这可以直接由下式推出

$$(a-b) \cdot c + b \cdot c = [(a-b)+b] \cdot c = a \cdot c.$$

再应用性質 III 5°，可証

$$b \cdot 0 = 0 \cdot b = 0.$$

实因[II 3°]

$$a + 0 = a, (a+0) \cdot b = a \cdot b + 0 \cdot b = a \cdot b,$$

① 依III1°，定义商的这个等式也可写成: $b \cdot c = a$。

由此推得 $0\cdot b=0$, 再由[III 1°]得 $b\cdot 0=0$。

反之，若 $a\cdot b=0$ 又 $b\neq 0$, 則必須 $a=0$。实因，$a=\frac{0}{b}$，但同时又有 $0=\frac{0}{b}$(因 $b\cdot 0=0$), 因为商是唯一的，故 $a=0$。

最后，我們指出联系符号>与乘号的一个性質:

III 6° 由 $a>b$ 及 $c>0$ 推得 $a\cdot c>b\cdot c$。

据此可以用正数乘不等式的两边。由此可知，当 $a>0$ 及 $b>0$ 时，亦必有 $a\cdot b>0$。

注意，$(-a)\cdot b=-(a\cdot b)$; 这由下面推得

$$a\cdot b+(-a)\cdot b=[a+(-a)]\cdot b=0\cdot b=0.$$

現在不难看出，若 $a<0$, $b>0$, 于是 $a=-|a|$, $b=|b|$, 則

$$a\cdot b=(-|a|)\cdot|b|=-(|a|\cdot|b|)<0;$$

当 $a>0$, $b<0$ 时亦如此，又若 $a<0$, $b<0$, 則

$$a\cdot b=(-|a|)(-|b|)=-[|a|\cdot(-|b|)]=$$
$$=-[-(|a|\cdot|b|)]=|a|\cdot|b|>0.$$

这样，我們已完全重新建立了关于乘法的符号規則，这些符号規則現在已成为有理数的上述性質的邏輯推論了。換言之，如果有理数要滿足上述諸性質，就必定要遵守这些符号規則。关于乘以 0 的規則，也可以这样說(如上所述)。

在处理了加法和乘法的性質以后，我們現在能够証明在前面数的基本性質[I 3°]中已述及的有理数域的稠密性了。就是，可以用它們証明，例如，由 $a>b$ 推得 $a>\frac{a+b}{2}>b$。

5. 阿基米德公理 我們用下列的簡單而重要的論証，来結束我們的有理数基本性質一覽表。这一性質是不能由上述的諸性質里推得的。

IV 1° 不論 $c>0$ 是怎样的数，总有大于 c 的自然数 n 存在着(《阿基米德公理》)。

实际上，阿基米德曾説明一个几何的命题，即为众所周知的《阿基米德公理》：

若在直綫上給定任意两綫段 A 及 B，則 A 重复相加若干次后，其和总可以大于 B：

$$\underbrace{A+A+\cdots+A}_{n\text{次}}=A\cdot n>B.$$

若将这論証轉而对正数 a 及 b 来叙述，它便肯定有这样的自然数 n 存在使

$$\underbrace{a+a+\cdots+a}_{n\text{次}}=a\cdot n>b.$$

若应用已研究过的有理数的性質，則这不等式相当于 $n>\frac{b}{a}$；把商 $\frac{b}{a}$ 記成 c，我們便得出上面所叙述的 IV 1°。

§2. 无理数的导入·实数域的順序

6. 无理数的定义 有理数集及其在第一节内列举的一切性質，作为是已給的。

我們仿效戴狄金（R. Dedekind）来叙述无理数的理論。有理数域内的分划的概念是这理論的基础。若将有理数全体所成的集合分拆为两个非空集合（即至少包含一个数的）A, A'。我們把这样的分拆叫做分划，只要滿足条件：

1° 任一有理数，必在且仅在 A 及 A' 二集之一① 中出現；

2° 集 A 內的任一数 a，必小于集 A' 內的任一数 a'。

集 A 称为分划的下組，集 A' 为上組。分划記成 $A|A'$。

由分划的定义推得，小于下組內的数 a 的一切有理数也都屬于下

① “任一有理数仅在二集之一中出現”这一事实亦可由 2° 推得。

組。仿此，大于上組內的数 a' 的一切有理数亦都屬于上組。

例 1. 一切有理数 a, 滿足不等式 $a<1$ 的，定为集 A, 一切 a', 滿足 $a'\geqslant 1$ 的，都算入集 A'。

很易驗証，这样，我們实际上已得出分划了。数 1 屬于 A' 組，且显然成为其中最小的数。由另一方面看，在 A 組內并无最大数，因不論我們在 A 內取怎样的数 a, 恒能在 a 与 1 之間指出有理数 a_1 来，因而它必大于 a 并且屬于 A 組。

例 2. 取小于或等于 1 的一切有理数 a, $a\leqslant 1$, 归入下組 A; 取大于 1 的一切有理数 a', $a'>1$, 归入上組。

則亦得一分划，且其中在上組无最小数，而在下組有最大数(卽1)。

例 3. 取使 $a^2<2$ 的一切正有理数 a, 数 0 及一切負有理数归入 A 組，使 $a'^2>2$ 的一切正有理数 a' 归入 A' 組。

很易証明，我們亦已得出分划。此处，在 A 組內旣无最大数，在 A' 組內亦无最小数。我們将証明，例如，这論断的第一点(第二点同样可以証明)。設 a 为 A 組內的任意正数，則 $a^2<2$。再証，必能得这样的正整数 n, 使

$$\left(a+\frac{1}{n}\right)^2<2,$$

于是 $a+\frac{1}{n}$ 亦屬于 A。

这不等式相当于:

$$a^2+\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<2,\ \frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<2-a^2,$$

若 n 滿足不等式 $\frac{2a+1}{n}<2-a^2$, 則上面第二个不等式也自然能滿足了。为此，只須取

$$n>\frac{2a+1}{2-a^2},$$

而这是恒为可能的 [依«阿基米德公理» IV 1°]。因此，不論 a 为 A 組內的怎样的正数，在这 A 組內終能求得大于它的数; 又因为当 $a\leqslant 0$ 时

这論証显也成立，故在 A 組內沒有任何数能成为最大的。

很易明了，不可能有这样的分划存在，在它的下組內有最大数 a_0，同时在上組內又有最小数 a_0'。实际上，假設这样的分划存在着。則应用有理数域的稠密性[I 3°]，必能取得一个位于 a_0 与 a_0' 之間的有理数 c: $a_0<c<a_0'$。数 c 不能屬于 A 組，因否則，a_0 就不是此組的最大数，仿此，c 亦不能屬于 A' 組，但这是与定义分划的概念的性質 1° 相矛盾的。

这样，分划仅能有三种类型，如剛才例 1, 2, 3 所表明的：

1）在下組 A 內无最大数，而在上組 A' 內有最小数 r;

2）在下組 A 內有最大数 r，而在上組 A' 內无最小数；

或 3)，在下組內旣无最大数，在上組內亦无最小数。

在前两种情形，我們說，分划由有理数 r 所产生（r 成为 A 与 A' 之間的界数），或說分划定义有理数 r。在例 1, 2 中，1 便是这样的数。在第三种情形界数并不存在，分划并不定义任何有理数。今引入新的对象——无理数。讓我們約定，任一 3) 型的分划定义某一无理数 α。这个数 α 便代替缺少的界数，我們好象把它插入在 A 組的一切数 a 与 A' 組的一切数 a' 中間。在例 3 中，这新創的数，很易推想而知，即是 $\sqrt{2}$。

我們并不引入无理数的任何同一式样的記法①，我們总是把无理数 α 理解为有理数域中确定它的分划 $A|A'$。

为了一致起見，同样来理解有理数 r 也常是很方便的。但对于任一有理数 r 存在着确定它的两种分划：在两种情形中，数 $a<r$ 总是屬于下組，数 $a'>r$ 总是屬于上組，而数 r 本身可以任意包含在下組（这时 r 为下組的最大数），或包含在上組（r 为上組的最小数）。为了确定起見，我們約定：凡說到确定有理数 r 的分划时，常把这数放在上組內。

① 这里說的是有尽的記法，对于无尽的記法，讀者在 9 中会熟習它。个別給定的无理数我們經常总是用这数所由产生的关系式来記它，如 $\sqrt{2}$，$\log 5$，$\sin 10°$ 等。

有理数及无理数总称为实数。实数的概念，为数学分析的基本概念之一。

7. 实数域的顺序 由分划 $A|A'$ 及 $B|B'$ 所确定的二无理数 α 及 β，当且仅当二分划为恒等时，始認为相等。实际上只要下組 A 及 B 互相重合就够了，因为这时 A' 与 B' 亦必互相重合。这定义在数 α 及 β 为有理数时，仍可保持不变。換言之，若二有理数 α 与 β 相等，則确定它們的分划相重合，反之，由分划的重合推得数 α 与 β 相等。在这里，自然仍須注意到，以分划来确定有理数时的上述約定①。

現在轉而建立关于实数"大于"的概念。关于有理数这概念早已建立了。对于有理数 r 与无理数 α 之間，"大于"的概念实际上在 6 中已建立了：即，若 α 由分划 $A|A'$ 所确定，我們便算作 α 大于 A 組中的一切有理数，同时 A' 組中的一切有理数大于 α。

現在設有二无理数 α 及 β，α 由分划 $A|A'$，β 由分划 $B|B'$ 所确定。我們将称有較大下組的那个数为較大数。更准确些說，若 A 組整个包含着 B 組，并且不与它重合，則算作 $\alpha>\beta$。(这条件，显然，相当于：B' 組整个包含着 A' 組，并且不与它重合)。很易驗証，当 α,β 之一是或甚至二者都是有理数时，这定义仍可保持。

現在証明实数均能滿足性質 I 1° 及 2°。

I 1° 任一对(实)数 α 与 β 之間必有且仅有下列三种关系之一：

$$\alpha=\beta,\ \alpha>\beta,\ \beta>\alpha.$$

若确定 α 的分划 $A|A'$ 与确定 β 的分划 $B|B'$ 相重合，則 $\alpha=\beta$。若这二分划不相重合，則或 A 整个包含 B(这时 $\alpha>\beta$)，或不是这样。在后一情形，B 組內有元素 b_0，落在 A' 組內。則对于 A 組內的任何元素 a，必有 $a<b_0$。因此 B 組整个包含 A 組，且不与它重合，于是我們有 $\beta>\alpha$。

① 沒有这条件，例如，在 6 的例 1 及 2 內所考察的分划，双方都定义数 1，但非恒等。

I 2° 由 $\alpha>\beta, \beta>\gamma$ 推得 $\alpha>\gamma$。

設数 α, β, γ(它們中間可能有有理数)是由分划 $A|A'$, $B|B'$, $C|C'$ 来确定的。若 $\alpha>\beta$,則依"大于"的定义,A 組包含 B 組,且并不与它重合。但因 $\beta>\gamma$,故 B 組包含 C 組,且不与它重合。因此,A 組亦包含 C 組,并且不与它重合,即 $\alpha>\gamma$。

如在 2 中一样現在可以建立"小于"的概念:若 $\beta>\alpha$,則我們說 $\alpha<\beta$。$<$ 号亦与 $>$ 号一样具有傳遞性。

8. 輔助命題 現在我們来建立实数域的稠密性(比較 I 3°);准确些說,我們将証明下列論断:

預备定理 1. 对于不論怎样的两个实数 α 及 β,其中 $\alpha>\beta$,恒有一个位于它們中間的有理数 r: $\alpha>r>\beta$(因此,这种有理数有无穷个)。

因 $\alpha>\beta$,故确定数 α 的分划的下組 A 整个包含确定 β 的下組 B,且不与 B 重合。因此在 A 内必有有理数 r,它不包含在 B 内,于是必屬于 B';对于它

$$\alpha>r\geqslant\beta$$

(只有在 β 为有理数时始能成立等式)。但因为在 A 内无最大数,故在必要时,把 r 取得大一些就可以取消等式。

附注 我們事实上已証明了比实数域的稠密性还要强的性質:即在实数 α 与 β(若 $\alpha>\beta$)之間必定存在着有理数(不仅是实数)。以后我們就将引用这个更强的稠密性。

由此直接推得

預备定理 2. 設給定两个实数 α 和 β。如果任取一个数 $e>0$,数 α 及 β 都能位于同一对有理数 s 与 s' 之間:

$$s'>\alpha>s, \quad s'>\beta>s,$$

这对数的差小于 e:

$$s'-s<e,$$

則数 α 与 β 必須相等。

証明 我們用反証法来証明。例如，設 $\alpha>\beta$，依預备定理 1，在 α 与 β 間可以插入两个有理数 r 及 $r'>r$:

$$\alpha>r'>r>\beta.$$

于是对于任何二数 s 及 s'，当 α 及 β 都在它們之間时，显然成立如下不等式

$$s'>r'>r>s,$$

由此

$$s'-s>r'-r>0,$$

因此差 $s'-s$ 不能小于数 $e=r'-r$，違背預备定理的条件。这矛盾卽証明了預备定理。

9. 用无尽小数来表示实数 現在我們考虑这样的表示实数的方法，卽其分数部分(尾数)是正的，而同时，其整数部分可以为正的、負的或零。

首先假定被考察的实数 α 并非整数，亦非有尽十进小数。現在要来求它的十进小数近似値。若 α 由分划 $A|A'$ 所确定，則首先易見在 A 組內必有整数 M，又在 A' 組內亦必有整数 $N>M$。在 M 上次第加 1，必能得出这样两个相邻的整数 C_0 及 C_0+1，使

$$C_0<\alpha<C_0+1.$$

这里的数 C_0 可以为正的、負的或零。

若再用数 $C_0.1;\ C_0.2;\ \cdots;\ C_0.9,$

分 C_0 与 C_0+1 間的区間为十等分，則 α 必(且仅)落在其中之一个部分区間內，因此我們又求得相差为 $\frac{1}{10}$ 的两数：$C_0.c_1$ 及 $C_0.c_1+\frac{1}{10}$，且有

$$C_0.c_1<\alpha<C_0.c_1+\frac{1}{10}.$$

繼續这样分下去，在确定数碼 $c_1, c_2, \cdots, c_{n-1}$ 后，我們就用不等式

$$C_0.c_1c_2\cdots c_n<\alpha<C_0.c_1c_2\cdots c_n+\frac{1}{10^n}. \qquad (1)$$

定义第 n 位数碼 c_n。

这样，在求数 α 的十进小数近似値的过程中，我們求得整数 C_0 及

数碼 $c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$ 的无尽序列。由此組成的无尽小数，即記号

$$C_0.c_1\,c_2\cdots c_n\cdots \tag{2}$$

可以看成是实数 α 的一种表示。

在例外的情形，当 α 本身就是整数或有尽小数，亦可以用相似的方法由比(1)更普遍的关系式

$$C_0.c_1\,c_2\cdots c_n \leqslant \alpha \leqslant C_0.c_1\,c_2\cdots c_n + \frac{1}{10^n} \tag{1a}$$

来相繼地确定数 C_0 及数碼 $c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$。事情是这样的，到某时，数 α 会重合于包含它的区間的一端，重合于左端或右端都行；从这时开始，相应地，在(1a)中左端或右端就将經常不变地成立等式。按照成立等式的是左端还是右端，这以后的各数碼就将全是 0 或全是 9。因此，这时 α 就有了双重的表示，一种是用零循环的，一种是用 9 循环的，例如，

$$3.826 = 3.826000\cdots = 3.825999\cdots,$$

$$-3.826 = \bar{4}.174000\cdots = \bar{4}.173999\cdots.$$

反之，今設任給一无尽十进小数(2)；我們要証明总可以找到一实数 α，剛好是被这小数所表示的。为此，我們来考察小数(2)的一段：

$$C_n = C_0.c_1\,c_2\cdots c_n, \tag{3}$$

把它作为所求数的“亏(不足的)近似值”，同样把

$$C'_n = C_0.c_1\,c_2\cdots c_n + \frac{1}{10^n} \tag{4}$$

作为其“盈(过剩的)近似值”。不难看出，每一 C_n 小于每一 C'_n。現在我們用如下法来定有理数域的一个分划：把大于一切 C_n 的有理数 a' (例如，一切数 C'_n)放在上組 A' 內，而把一切余下的数(例如，数 C_n 本身)放在 A 組內。很易驗証，这就是我們所要的分划，它确定了所求的实数 α。

实則，因 α 就是在两組之間的界数，因此，当然成立

$$C_n \leqslant \alpha \leqslant C'_n,$$