理论力学习题解析

陈笃炎　高松坡
赵成璧　徐步政　编

中国农业机械出版社

目　录

第一篇　静　力　学

第一章　汇交力系

理论提要

作用在物体上各力的作用线都相交于一点的力系称为**汇交力系**。根据力的可传性，各力作用线的汇交点可看成是各力的公共作用点，所以汇交力系有时也称为**共点力系**。另外，按照各力的作用线是否都位于同一平面内，汇交力系又分为**平面汇交力系**和**空间汇交力系**。

一、汇交力系的合成

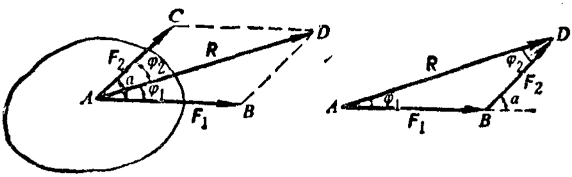
作用于物体上的力系如果可以用一个力来代替而不改变对物体的运动效应，那么这个力就称为该力系的**合力**，而力系中的各个力则称为**分力**。由各分力求合力叫做力系的合成；反之，一个力也可以分解为若干个分力。

（一）力的平行四边形法则和力三角形法则

作用于物体上同一点的两个力可以合成为一个合力，合力与原来两力共作用点，并等于两力的矢量和；即合力矢由以原来两力矢为邻边所构成的平行四边形的对角线来表示。

设物体上A点作用有两个力$\boldsymbol{F}_1$和$\boldsymbol{F}_2$（图1-1a），用$\boldsymbol{R}$代表它们的合力，则有矢量表达式

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2 \qquad (1\text{-}1)$$



a)　　b)

图 1-1

为求合力$\boldsymbol{R}$的大小和方向，可以用几何作图法或者用三角公式计算。

几何作图法：

选取适当的比例尺作出力的平行四边形，其对角线的长度按比例等于合力的大小，对角线与分力之间的夹角则表示合力的方向。可分别用尺和量角器在图中量出。

由图1-1a可见，求合力$\boldsymbol{R}$时，实际上不必作出整个力的平行四边形，而只要将力$\boldsymbol{F}_1$和$\boldsymbol{F}_2$首尾相接作出力三角形ABD（图1-1b），则矢量$\boldsymbol{AD}$就代表合力矢$\boldsymbol{R}$。这种合成方法称为**力三角形法则**。

用三角形公式计算：

若已知$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$及其夹角α，则用余弦定理得合力$\boldsymbol{R}$的大小为

$$R=\sqrt{F_1^2+F_2^2-2F_1F_2\cos(180^\circ-\alpha)} \qquad (1\text{-}2)$$

合力$\boldsymbol{R}$与两分力$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$之间的夹角φ_1、φ_2，可由正弦定理求得，即

$$\frac{F_1}{\sin\varphi_2}=\frac{F_2}{\sin\varphi_1}=\frac{R}{\sin(180^\circ-\alpha)}$$

所以

$$\sin\varphi_1=\frac{F_2\sin\alpha}{R}, \qquad \sin\varphi_2=\frac{F_1\sin\alpha}{R} \tag{1-3}$$

此外

$$R=F_1\cos\varphi_1+F_2\cos\varphi_2 \tag{1-4}$$

力的平行四边形法则（或力三角形法则）是解决力系的合成和力的分解问题的基础。

（二）汇交力系的合成

汇交力系合成的结果得一合力，合力的作用线通过力系的汇交点，合力的大小和方向等于力系中各力的矢量和。

设物体上作用一汇交力系$\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，……$\boldsymbol{F}_n$，则该力系的合力

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\cdots+\boldsymbol{F}_n=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i$$

或简写为

$$\boldsymbol{R}=\Sigma\boldsymbol{F} \tag{1-5}$$

Ⅰ．合成的几何法

应用力多边形法则将力系中各力按首尾相连的次序作出力多边形(作图的顺序不影响合成的结果)，连接第一个力的始端和最后一个力的末端所得力多边形的封闭边，就是合力矢$\boldsymbol{R}$。

对于平面汇交力系，用几何作图法求合力很方便，只要选取适当的比例尺并足够精确地作出力多边形，则合力$\boldsymbol{R}$的大小和方向就可以按同一比例尺在图中直接量出。对于空间汇交力系，由于力多边形是一条空间折线，因而不容易直接量出合力的大小和方向，所以空间问题一般不用几何作图法，而采用解析法。

Ⅱ. 合成的解析法

（1） 力在直角坐标轴上的投影

直接投影法

若已知力F与空间直角坐标系三个轴的夹角分别为α、β和γ（图1-2a），则力F在三个坐标轴上的投影分别为

$$\left.\begin{aligned} X&=F\cos\alpha \\ Y&=F\cos\beta \\ Z&=F\cos\gamma \end{aligned}\right\} \tag{1-6}$$

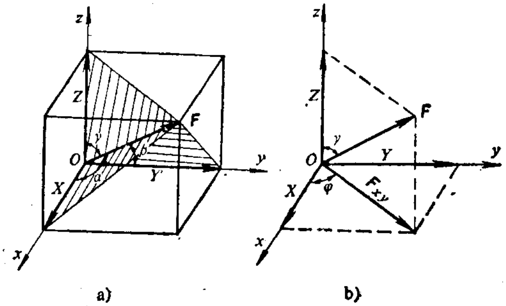


图 1-2

如果已知力F在三个坐标轴上的投影X、Y和Z，也可以反过来求出力F的大小和方向，即

$$\left.\begin{aligned} &F=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2} \\ &\cos\alpha=\frac{X}{F},\qquad \cos\beta=\frac{Y}{F},\qquad \cos\gamma=\frac{Z}{F} \end{aligned}\right\} \tag{1-7}$$

二次投影法

这种方法的要点是先将力F投影到某一坐标面上，而后再将坐标面上的投影投影到坐标轴上。如图1-2b所示，

先求力$\boldsymbol{F}$在Oxy面上的投影$\boldsymbol{F}_{xy}$，显然$F_{xy}=F\sin\gamma$，而后再将$\boldsymbol{F}_{xy}$投影到x和y轴上，于是可得

$$\left.\begin{aligned} X&=F\sin\gamma\cos\varphi \\ Y&=F\sin\gamma\sin\varphi \\ Z&=F\cos\gamma \end{aligned}\right\} \tag{1-8}$$

在某些实际问题中，当力$\boldsymbol{F}$与坐标轴之间的夹角不易直接确定时，应用二次投影法往往是较为方便的。

（2） 力沿直角坐标轴的分解

在空间矢量运算中，力矢有时须用矢量分解式表示。为此，将力$\boldsymbol{F}$按坐标轴x、y和z的方向分解为空间正交分量$\boldsymbol{F}_x$、$\boldsymbol{F}_y$和$\boldsymbol{F}_z$（图1-3），这些分量称为力$\boldsymbol{F}$的**坐标轴向分量**。写成关系式有

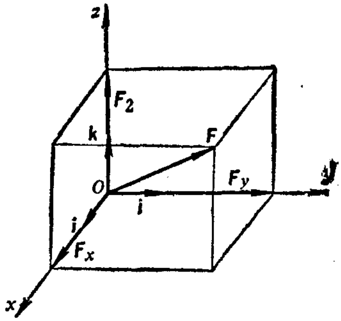


图 1-3

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_x+\boldsymbol{F}_y+\boldsymbol{F}_z \tag{1-9}$$

容易看出，力$\boldsymbol{F}$的坐标轴向分量的模，分别与该力在相应坐标轴上投影的绝对值相等，即

$$|\boldsymbol{F}_x|=|X|,\quad |\boldsymbol{F}_y|=|Y|,\quad |\boldsymbol{F}_z|=|Z|$$

令$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$分别表示直角坐标轴x、y、z的单位矢量，则上式可写为

$$\boldsymbol{F}_x=X\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{F}_y=Y\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{F}_z=Z\boldsymbol{k} \tag{1-10}$$

因而（1-9）式又可写为

$$\boldsymbol{F}=X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k} \tag{1-11}$$

这就是力$\boldsymbol{F}$沿坐标轴向的分解式。

（3） 用解析法求合力

由合矢量与分矢量的投影关系定理可知，合力在某一轴上的投影等于诸分力在同一轴上投影的代数和。于是，汇交力系的合力$\boldsymbol{R}$在直角坐标系$Oxyz$的三个轴上的投影分别为

$$\left.\begin{aligned} R_x &= X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n=\Sigma X \\ R_y &= Y_1+Y_2+\cdots\cdots+Y_n=\Sigma Y \\ R_z &= Z_1+Z_2+\cdots\cdots+Z_n=\Sigma Z \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}12)$$

算出合力的投影之后，合力$\boldsymbol{R}$的大小和方向即可用下列公式求得：

$$\left.\begin{aligned} R &= \sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2} \\ &= \sqrt{(\Sigma X)^2+(\Sigma Y)^2+(\Sigma Z)^2} \\ \cos(\boldsymbol{R},x) &= R_x/R,\quad \cos(\boldsymbol{R},y)=R_y/R, \\ &\qquad \cos(\boldsymbol{R},z)=R_z/R \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}13)$$

二、汇交力系的平衡条件

汇交力系平衡的充分和必要条件是力系的合力等于零。即

$$\boldsymbol{R}=0 \quad 或 \quad \Sigma \boldsymbol{F}=0 \qquad (1\text{-}14)$$

（一）汇交力系平衡的几何条件： 力多边形自行封闭。

（二）汇交力系平衡的解析条件——平衡方程

Ⅰ. 平面汇交力系

$$\left.\begin{aligned} \Sigma X &= 0 \\ \Sigma Y &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}15)$$

Ⅱ. 空间汇交力系

$$\left.\begin{aligned} \Sigma X &= 0 \\ \Sigma Y &= 0 \\ \Sigma Z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}16)$$

（三）求解物体在汇交力系作用下平衡问题的一般方法和主要步骤

1．明确研究对象

弄清题意，根据问题的要求，选取合适的研究对象，并单独画出其简图。

2．分析研究对象的受力情况，作受力图

先在图上画出全部主动力；而后根据约束的性质，解除约束画出相应的约束反力。如存在二力构件时，要注意约束反力的作用线应沿二力作用点的连线。在同一平面内受三个力作用而平衡的构件中，若已知其中两个力的作用线的交点，则第三个力的作用线必通过该点(三力平衡汇交定理)，通常可由此确定第三个力的作用线。

3．根据汇交力系的平衡条件求出未知量

用几何作图法解题时，要按力多边形中各力首尾相接的条件画出封闭的力多边形，而后用尺和量角器在图中量出未知力的大小和方向。为此要注意作图的精度和比例尺的选定。

用解析法解题时，首先要根据实际情况选择合适的坐标轴，尽量使每个平衡方程中只出现一个未知量，以避免解联立方程。要注意力在坐标轴上投影的符号及数值，对于未知力的指向，可以先假定，而后从解出结果的正负号来决定其正确的指向。

4．必要时应对计算结果进行分析讨论。

习 题 解 析

一、力的合成和分解

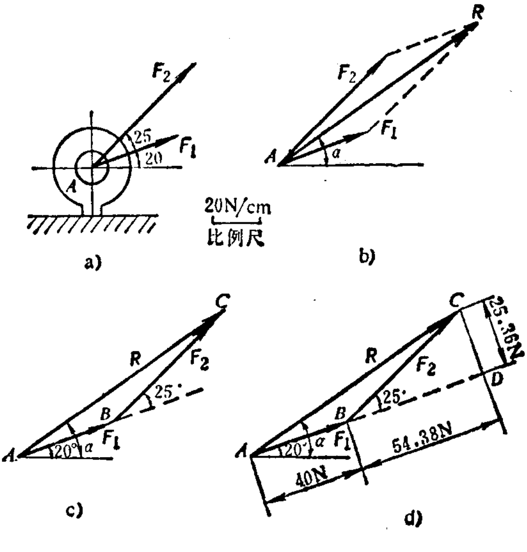
1-1 作用在圆环A上的两个力$\boldsymbol{F}_1$和$\boldsymbol{F}_2$（图a），其大小分别为$F_1=40N$，$F_2=60N$，试求该两力的合力。

解：（一）用几何作图法求解

选比例尺如图示。按比例以$\boldsymbol{F}_1$和$\boldsymbol{F}_2$为邻边作力的平行四边形(图b)或作力三角形（图c）。由图上量得合力

$$R=98N, \qquad \alpha=35^\circ$$

α为合力$\boldsymbol{R}$与水平方向的夹角。



题 1-1 图

（二）用三角公式计算

这种方法仍以力的平行四边形法则或力三角形法则为依据，但不需要严格按比例作图，而是应用三角学中余弦定理和正弦定理来计算合力的大小和方向。

对图c应用余弦定理，得

$$R^2=F_1^2+F_2^2-2F_1F_2\cos B$$

即

$$R^2=40^2+60^2-2\times40\times60\cos155^\circ$$

可解出合力R的大小为

$$R=97.73\text{N}$$

再应用正弦定理，得

$$\frac{F_2}{\sin A}=\frac{R}{\sin B}$$

代入已知数值，得

$$\sin A=\frac{60\sin155^\circ}{97.73}=0.259$$

$$\therefore\quad A=15^\circ$$

于是得合力R与水平方向的夹角

$$\alpha=A+20^\circ=35^\circ$$

（三）另一种三角解法（图d）

由直角三角形BCD，得

$$CD=F_2\sin25^\circ=60\sin25^\circ=25.36\text{N}$$

$$BD=F_2\cos25^\circ=60\cos25^\circ=54.38\text{N}$$

再由直角三角形ACD，得

$$\text{tg}A=\frac{25.36}{94.38}=0.269$$

$$\therefore\quad A=15^\circ$$

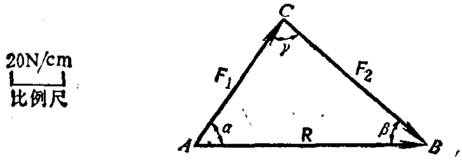
$$R=25.36/\sin A=97.73\text{N}$$

$$\alpha=A+20^\circ=35^\circ$$

1-2 已知两共点力 $F_1=60\text{N}$，$F_2=75\text{N}$，如其合力 $R=93\text{N}$，试求该两力与合力之间的夹角。

解：（一）用几何作图法求解

选比例尺如图示。在图上任取一点 A，自 A 点按比例画矢量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{R}$，再分别以 A 和 B 点为圆心，以 $|\boldsymbol{F}_1|=60\text{N}$，$|\boldsymbol{F}_2|=75\text{N}$ 为半径作两圆弧得交点 C，按照力的三角形法则，显然 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{F}_1$，$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{F}_2$。由图中直接量得



题 1-2 图

$\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{R}$ 的夹角　　$\alpha=53°$

$\boldsymbol{F}_2$ 与 $\boldsymbol{R}$ 的夹角　　$\beta=40°$

（二）用三角公式计算

对力的三角形 ACB 应用余弦定理，得

$$R^2=F_1^2+F_2^2-2F_1F_2\cos\gamma$$

即

$$\cos\gamma=\frac{F_1^2+F_2^2-R^2}{2F_1F_2}=\frac{60^2+75^2-93^2}{2\times60\times75}$$

$$=0.064$$

$$\therefore\quad \gamma=86.33°$$

再应用正弦定理，得

$$\frac{F_1}{\sin\beta}=\frac{F_2}{\sin\alpha}=\frac{R}{\sin\gamma}$$

所以

$$\sin\alpha=\frac{F_2\sin\gamma}{R}=\frac{75\times0.998}{93}=0.805$$

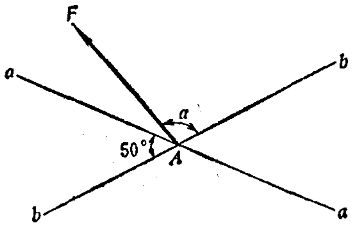
$$\therefore\quad \alpha=53.61^\circ$$

$$\sin\beta=\frac{F_1\sin\gamma}{R}=\frac{60\times0.998}{93}=0.644$$

$$\therefore\quad \beta=40^\circ$$

1-3 将$F=800$N的力沿图示a—a和b—b线分解，已知$\boldsymbol{F}$沿b—b线分力的大小为120N，试求角α。

答：$\alpha=123.4^\circ$



题 1-3 图

1-4 力$\boldsymbol{F}$的大小$F=140$ N，试将它分解为两力$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$，使能同时满足下列条件：(1)$F_1+F_2=160$N；(2)两分力$\boldsymbol{F}_1$和$\boldsymbol{F}_2$之间的夹角为60°，求此两分力的大小。

答：$F_1=60$N，$F_2=100$N

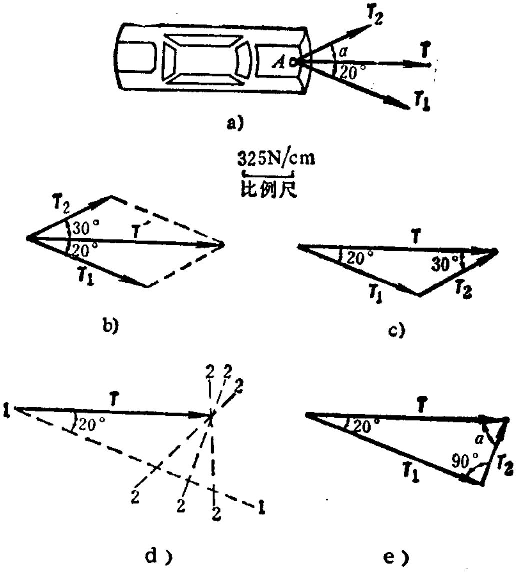
1-5 一汽车因故障停在路上，用图a所示两根绳索拖动。若两绳的合力$T=1300$N，方向沿汽车的轴线。试求：

Ⅰ. 已知$\alpha=30^\circ$时，两绳拉力$\boldsymbol{T}_1$和$\boldsymbol{T}_2$的大小。

Ⅱ. 欲使T_2值为最小，角α及$\boldsymbol{T}_1$、$\boldsymbol{T}_2$的大小。

解：

Ⅰ. 已知$\alpha=30^\circ$，求$\boldsymbol{T}_1$、$\boldsymbol{T}_2$的大小



题 1-5 图

（1）用几何作图法求解

选比例尺如图示。按比例先画出合力 T＝1300N，方向水平向右，再以两绳为邻边作出力的平行四边形（图b），或者按比例作出力三角形（图 c），由同一比例尺在图 b或图c中量得

$$T_1=848\text{N}，\ T_2=582\text{N}$$

（2）用三角公式计算

根据力三角形，应用正弦定理，得

$$\frac{T_1}{\sin 30°}=\frac{T_2}{\sin 20°}=\frac{T}{\sin 130°}$$

所以

$$T_1=\frac{T\sin 30°}{\sin 130°}=\frac{1300\times 0.5}{0.766}=848.6\text{N}$$

$$T_2=\frac{T\sin 20°}{\sin 130°}=\frac{1300\times 0.342}{0.766}$$

$$=580.4\text{N}$$

Ⅱ．欲使T_2值为最小，求角α及$\boldsymbol{T}_1$、$\boldsymbol{T}_2$的大小

仍然应用力三角形法则，先画出合力T＝1300N，方向水平向右，作直线1-1表示$\boldsymbol{T}_1$的已知方向，而$\boldsymbol{T}_2$的几个可能的方向用直线2-2表示（图d），由图显见，只有当$\boldsymbol{T}_1$与$\boldsymbol{T}_2$相垂直时，$\boldsymbol{T}_2$的值才是最小。于是得$\boldsymbol{T}_2$为最小值时的力三角形（图e）。所以

$\boldsymbol{T}_2$的最小值为

$$T_2=T\sin 20°=1300\times 0.342=444.6\text{N}$$

相应的$\boldsymbol{T}_1$和α值为

$$T_1=T\cos 20°=1300\times 0.94=1222\text{N}$$

$$\alpha=90°-20°=70°$$

二、汇交力系的合成问题

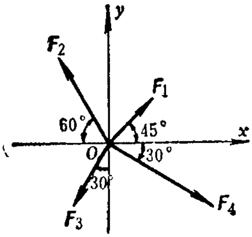
1-6 四力作用于物体上O点，其方向如图a所示。已知各力的大小为：$F_1=50$N，$F_2=80$N，$F_3=60$N，$F_4=100$N。试求该力系的合力$\boldsymbol{R}$。

解：（一）几何作图法

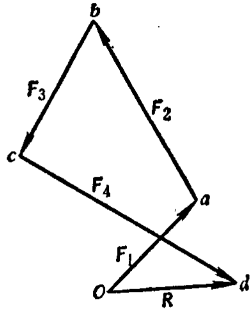
选比例尺如图示。按比例将力$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$和$\boldsymbol{F}_4$首尾相接依次画出，得力多边形$Oabcd$（图b），其封闭边$\overrightarrow{Od}$即为合力$\boldsymbol{R}$。由图中量得

$$R=52\text{N},\quad \angle(\boldsymbol{R},x)=2.58°$$

（二）解析法



a)



b)

题 1-6 图

在图a所示直角坐标系Oxy中，合力$\boldsymbol{R}$在x、y轴上的投影为

$$R_x=\Sigma X=F_1\cos45°-F_2\cos60°-F_3\sin30°+F_4\cos30°$$
$$=50\times0.707-80\times0.5-60\times0.5+100\times0.866$$
$$=51.95\text{N}$$
$$R_y=\Sigma Y=F_1\sin45°+F_2\sin60°-F_3\cos30°-F_4\sin30°$$
$$=50\times0.707+80\times0.866-60\times0.866-100\times0.5$$
$$=2.67\text{N}$$

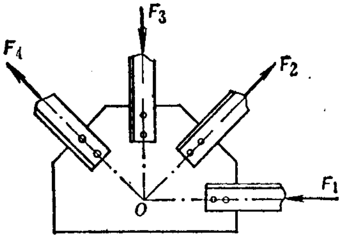
于是可得

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2}=\sqrt{51.95^2+2.67^2}=52.02\text{N}$$
$$\cos(\boldsymbol{R},x)=R_x/R=\frac{51.95}{52.02}=0.999$$
$$\therefore\quad \angle(\boldsymbol{R},x)=2.56°$$

1-7 在图示联结板上作用有四个汇交于O点的力，已知各力的大小为：$F_1=400\text{N}$，$F_2=250\text{N}$，$F_3=500\text{N}$，$F_4=200\text{N}$。试求该力系的合力$\boldsymbol{R}$。

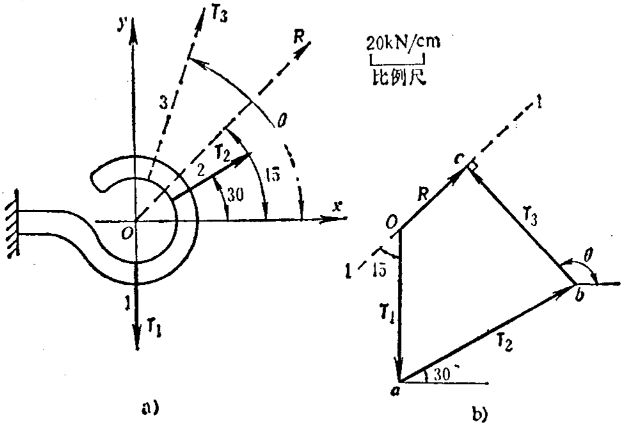
答：$R=433.8\text{N}$

$$\angle(\boldsymbol{R},x)=152^\circ$$



题 1-7 图

1-8 系在挂钩上的三根绳索，施于挂钩上的力组成一平面汇交力系，绳索1和2分别以$T_1=6\text{kN}$和$T_2=8\text{kN}$的力拉曳挂钩。欲使三个力的合力$\boldsymbol{R}$沿图a中所示的方向，并希望绳索3的拉力$\boldsymbol{T}_3$为最小，试求$\boldsymbol{T}_3$的大小及相应的角度θ之值。



题 1-8 图