圣才学习网
www.100xuexi.com

中国精算师资格考试辅导系列

中国精算师

精算模型过关必做1000题（含历年真题）

（第2版）

主编：圣才学习网
www.100xuexi.com

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

中国精算师资格考试辅导系列

中国精算师
精算模型过关必做1000题
（含历年真题）
（第2版）

主编：圣才学习网
www.100xuexi.com

中国石化出版社

内 容 提 要

本书是一本中国精算师资格考试科目“精算模型”过关必做习题集，基本遵循中国精算师资格考试指定教材《精算模型》(肖争艳主编，孙佳美主审，中国财政经济出版社)的章目编排，共分14章，根据最新《中国精算师资格考试－考试指南》中“精算模型”的考试内容和要求精心编写了约1000道习题，其中包括了部分**历年真题、样题和教材习题**，所选习题基本覆盖了考试指南规定需要掌握的知识内容，并对全部习题进行了详细的分析和解答。

圣才学习网｜精算师(www.100xuexi.com)提供中国精算师资格考试辅导方案【网络课程、3D电子书、3D题库等】(详细介绍参见本书书前彩页)。购书享受大礼包增值服务【100元网授班＋20元真题模考＋20元圣才学习卡】。本书特别适用于参加中国精算师资格考试的考生，也可供各大院校精算专业的师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

中国精算师精算模型过关必做1000题:含历年真题/圣才学习网主编.—2版.—北京:中国石化出版社，2014.8
(中国精算师资格考试辅导系列)
ISBN 978－7－5114－2965－0

Ⅰ.①中… Ⅱ.①圣… Ⅲ.①精算学－资格考试－习题集 Ⅳ.①F224.0－44

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第191824号

中国石化出版社出版发行
地址:北京市东城区安定门外大街58号
邮编:100011 电话:(010)84271850
读者服务部电话:(010)84289974
http://www.sinopec-press.com
E-mail:press@sinopec.com
北京东运印刷有限公司印刷
全国各地新华书店经销
*
787×1092毫米16开本21.25印张4彩插534千字
2014年9月第2版 2014年9月第1次印刷
定价:46.00元

《中国精算师资格考试辅导系列》

编　委　会

主编：圣才学习网(www.100xuexi.com)

编委：邱亚辉　娄旭海　郑　炳　肖　娟　张宇宁

周玉芳　程新慧　黄永民　孙新华　田小文

严　宽　郑云龙　吴　平

序　　言

中国精算师资格考试是中国保险监督管理委员会立项，由中国精算师协会组织实施的一项国家级职业资格考试。中国精算师分准精算师和精算师两个层级。准精算师部分由八门科目组成，每门均为3小时笔试；精算师部分分为寿险和非寿险两个方向，每门均为4小时笔试。考生一次可以报考一科或多科，报考科目不受科目代码顺序限制。考试成绩采取10分制，6分以上(含6分)为通过。各科目成绩“通过”后，没有时间限制，终身有效。为了帮助考生顺利通过中国精算师资格考试，我们根据最新《中国精算师资格考试－考试指南》和指定教材编写了中国精算师资格考试辅导系列：

1. 中国精算师－数学过关必做1000题(含历年真题)
2. 中国精算师－金融数学过关必做1000题(含历年真题)
3. 中国精算师－精算模型过关必做1000题(含历年真题)
4. 中国精算师－经济学基础过关必做习题集(含历年真题)
5. 中国精算师－寿险精算过关必做习题集(含历年真题)
6. 中国精算师－非寿险精算过关必做500题(含历年真题)
7. 中国精算师－会计与财务过关必做习题集(含历年真题)
8. 中国精算师－精算管理过关必做习题集(含历年真题)

本书是中国精算师资格考试科目“精算模型”过关必做习题集，基本遵循中国精算师资格考试指定教材《精算模型》(肖争艳主编，孙佳美主审，中国财政经济出版社)的章目编排，共分14章，根据最新《中国精算师资格考试－考试指南》中“精算模型”的考试内容和要求精心编写了约1000道习题，其中包括了部分历年真题、样题和教材习题，所选习题基本覆盖了考试指南规定需要掌握的知识内容，并对全部习题进行了详细的分析和解答。

需要特别说明的是：对于考试动态、最新的考试大纲以及相关考试资料，圣才学习网｜精算师(www.100xuexi.com)会及时根据当年的大纲对本书进行修订和说明，读者可以登陆网站查看并下载相关修订部分。本教材参考了众多的配套资料和相关参考书，书中错误、遗漏不可避免，敬请指正和提出建议。

购买本书享受大礼包增值服务，登录相关网站，刮开所购图书封面防伪标的密码，即可享受大礼包增值服务：①价值100元的网授班。可冲抵价值100元的网授班学费。②价值20元的真题模考。可免费参加或者下载价值20元的历年真题模拟试题(在线考试)。③价值20元的圣才学习卡。您的账户可以获得20元充值，可在圣才学习网旗下所有网站进行消费。

与本书相配套，圣才学习网提供中国精算师考试网络课程、3D电子书、3D题库(免费下载，免费升级)(详细介绍参见本书书前彩页)。

圣才学习网(www.100xuexi.com)是一家为全国各类考试和专业课学习提供名师网络课程、3D电子书、3D题库(免费下载，免费升级)等全方位教育服务的综合性学习型视频学习网站，拥有近100种考试(含418个考试科目)、194种经典教材(含英语、经济、管理、证券、金融等共16大类)，合计近万小时的面授班、网授班课程。

精算考试：www.100xuexi.com(圣才学习网)

考研辅导：www.100exam.com(圣才考研网)

圣才学习网编辑部

目 录

第1章　绪论(略)

第2章　生存分析的基本函数及生存模型

单项选择题(以下各小题所给出的5个选项中，只有一项最符合题目要求，请将正确选项的代码填入括号内)

1. 已知如下生存函数：$S(x)=(b-x/a)^{0.5}$，$0\leqslant x\leqslant k$。中位数年龄为75岁，则$\mathring{e}_{75}$的值为(　　)。[2011年秋季真题]

A. 12.5　　B. 16.7　　C. 20.0　　D. 25.4

E. 33.3

【答案】B

【解析】有生存函数的性质：$S(0)=b^{0.5}=1$，$S(k)=(b-k/a)^{0.5}=0$，所以$b=1$，$a=k$，故$S(x)=(1-x/k)^{0.5}$。由题：$S(75)=0.5$，所以$(1-75/k)^{0.5}=0.5$，解得$k=100$。故$\mathring{e}_{75}=\int_{75}^{100}\frac{S(x)}{S(75)}\mathrm{d}x=\int_{75}^{100}\frac{(1-x/100)^{0.5}}{0.5}\mathrm{d}x=16.7$。

2. 在一个二元衰减模型中，已知：

(1)$h_x^{(1)}(t)=0.2h_x^{(\tau)}(t)$，$t>0$；

(2)$h_x^{(\tau)}(t)=kt^2$，$t>0$；

(3)$q'^{(1)}_x=0.04$；

则$_2q_x^{(2)}$的值为(　　)。[2011年秋季真题]

A. 0.45　　B. 0.53　　C. 0.58　　D. 0.64

E. 0.73

【答案】D

【解析】因为多减因生存模型的生存分析函数与联合单减因模型相应函数之间的转换建立在相邻整数年间终止分布的假设下，因此不能直接计算$_2q_x^{(2)}$，而应分别计算$q_x^{(2)}$，$q_{x+1}^{(2)}$。下面先计算$q_x^{(2)}$。由题：$p'^{(1)}_x=1-q'^{(1)}_x=1-0.04=0.96$，而$p'^{(1)}_x=e^{-\int_0^1 h_x^{(1)}(t)\mathrm{d}t}=e^{-\int_0^1 0.2kt^2\mathrm{d}t}=e^{-\frac{0.2k}{3}}$，所以$e^{-\frac{0.2k}{3}}=0.96$，所以$p_x^{(\tau)}=e^{-\int_0^1 h_x^{(\tau)}(t)\mathrm{d}t}=e^{-\int_0^1 kt^2\mathrm{d}t}=e^{-\frac{k}{3}}=(e^{-\frac{0.2k}{3}})^5=0.96^5$。又因为$p_x^{(\tau)}=p'^{(1)}_x p'^{(2)}_x$，所以$p'^{(2)}_x=\frac{0.96^5}{0.96}=0.96^4$。由于$q_x^{(2)}=\frac{\ln p'^{(2)}_x}{\ln p_x^{(\tau)}}(1-p_x^{\tau})$，所以$q_x^{(2)}=$

$\dfrac{\ln p'^{(2)}_x}{\ln p^{(\tau)}_x}(1-p^{\tau}_x)=\dfrac{\ln 0.96^4}{\ln 0.96^5}\times(1-0.96^5)=0.1477$。再计算 $q^{(2)}_{x+1}$。由题：$h^{(\tau)}_{x+1}(t)=k(t+1)^2$，所以 $p'^{(1)}_{x+1}=e^{-\int_0^1 h^{(1)}_{x+1}(t)\mathrm{d}t}=e^{-\int_0^1 0.2k(t+1)^2\mathrm{d}t}=e^{-\frac{1.4k}{3}}=0.96^7$，$p^{(\tau)}_{x+1}=e^{-\int^1 0h^{(\tau)}_{x+1}(t)\mathrm{d}t}=e^{-\int_0^1 k(t+1)^2\mathrm{d}t}$ $=e^{-\frac{7k}{3}}=0.96^{35}$。又因为 $p^{(\tau)}_{x+1}=p'^{(1)}_{x+1}p'^{(2)}_{x+1}$，所以 $p'^{(2)}_{x+1}=\dfrac{0.96^{35}}{0.96^7}=0.96^{28}$，所以 $q^{(2)}_{x+1}=$ $\dfrac{\ln p'^{(2)}_{x+1}}{\ln p^{(\tau)}_{x+1}}(1-p^{\tau}_{x+1})=\dfrac{\ln 0.96^{28}}{\ln 0.96^{35}}\times(1-0.96^{35})=0.6083$。故 $2q^{(2)}_x=q^{(2)}_x+p^{(\tau)}_x q^{(2)}_{x+1}=0.1477$ $+0.96^5\times 0.6083=0.64$。

3. 设 X 服从 $\theta=1$ 的指数分布，令 $y=g(x)=\sqrt{x}$，则随机变量 Y 的危险率函数为(　　)。

A. 1　　B. y　　C. $2y$　　D. y^2

E. $2y^2$

【答案】C

【解析】解法①：因为 $y=g(x)=\sqrt{x}$ 是严格递增的，且 $x=m(y)=y^2$，则 $F_Y(y)=F_X(y^2)$。由于 X 服从 $\theta=1$ 的指数分布，即 $F_X(x)=1-e^{-x}$，有 $F_Y(y)=1-e^{-y^2}$，于是 $f_Y(y)=\dfrac{d}{dy}F_Y(y)=2y\cdot e^{-y^2}$，故

$$h_Y(y)=\frac{f_Y(y)}{1-F_Y(y)}=\frac{2y\cdot e^{-y^2}}{e^{-y^2}}=2y$$

解法②：因为 $y=g(x)=\sqrt{x}$ 是严格递增的，且 $x=m(y)=y^2$。已知 X 服从 $\theta=1$ 的指数分布，故 $h_X(x)=h_X[m(y)]=1$，所以

$$h_Y(y)=h_X[m(y)]\cdot\frac{dx}{dy}=\frac{dx}{dy}=2y$$

4. 令 $y=g(x)=-\ln S_X(x)$，则 Y 的概率密度函数为(　　)。

A. $-e^{-y}$　　B. $-e^{y}$　　C. e^{-y}　　D. e^{y}

E. $1-e^{-y}$

【答案】C

【解析】由于 $S_X(x)$ 由 1 递减到 0，则 $\ln S_X(x)$ 由 0 递减到 $-\infty$，所以 $y=g(x)=-\ln S_X(x)$ 由 0 递增到 $+\infty$。令 $Z=S_X(x)$，则 Z 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布，即对所有 z 值，$f_Z(z)=1$。

对于 $y=-\ln z$，其反函数为 $z=m(y)=e^{-y}$，故 $\dfrac{dz}{dy}=-e^{-y}$，其中 y 是 z 的递减函数。所以 $f_Y(y)=-f_Z[m(y)]\cdot\dfrac{dz}{dy}=(-1)\cdot\dfrac{dz}{dy}=e^{-y}$。

5. 设某随机变量 X 的生存函数为：$S(x)=ax^3+b$，$0\leqslant x\leqslant k$。若 $E(X)=45$，则 $Var(X)=$(　　)。

A. 90　　B. 120　　C. 135　　D. 450

E. 500

【答案】C

【解析】由生存函数的性质 $S(0)=1$，得：$b=1$。

又由 $S(k)=0=ak^3+b=a\cdot k^3+1$，解得：$a=-\frac{1}{k^3}$。

从而

$$E(X)=\int_0^k S(x)dx=\int_0^k\left(-\frac{x^3}{k^3}+1\right)dx=45$$

得 $k=60$。由于 $f(x)=-\frac{dS(x)}{dx}=\frac{3x^2}{k^3}$，则

$$E(X^2)=\int_0^k x^2 f(x)dx=\int_0^k x^2\frac{3x^2}{k^3}dx=\frac{3}{5}k^2$$

所以

$$Var(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{3}{5}\times 60^2-45^2=135$$

6. 设 X_1 与 X_2 是两个相互独立的随机变量，如果 $Z=\max(X_1,X_2)$，$Y=\min(X_1,X_2)$，则下列选项错误的是(　　)。

A. Y 的生存函数是 X_1 与 X_2 生存函数的乘积

B. 若 X_1 与 X_2 都服从指数分布，则 Y 也服从指数分布

C. 若 X_1 与 X_2 都服从指数分布，则 Z 不服从指数分布

D. Z 的累积分布函数为 X_1 与 X_2 累积分布函数的乘积

E. Z 的密度函数为 X_1 与 X_2 密度函数的乘积

【答案】E

【解析】A 项，$S_Y(y)=P(Y>y)=P[\min(X_1,X_2)>y]=P(X_1>y,X_2>y)=P(X_1>y)\cdot P(X_2>y)$

$$=S_{X_1}(y)S_{X_2}(y)$$

B 项，设 $X_1\sim exp(\lambda_1)$，$X_2\sim exp(\lambda_2)$，则有：

$$S_Y(y)=S_{X_1}(y)S_{X_2}(y)=e^{-\lambda_1 y}\cdot e^{-\lambda_2 y}=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)y}$$

即 $Y\sim exp(\lambda_1+\lambda_2)$；

C 项，设 $X_1\sim exp(\lambda_1)$，$X_2\sim exp(\lambda_2)$，则：

$$F_Z(y)=F_{X_1}(y)F_{X_2}(y)=(1-e^{-\lambda_1 y})(1-e^{-\lambda_2 y})\neq 1-e^{-\lambda y}$$

即 Z 不服从指数分布；

D 项，
$$\begin{aligned}P(Z\leqslant y)&=P(\max(X_1,X_2)\leqslant y)\\&=P(X_1\leqslant y,X_2\leqslant y)=P(X_1\leqslant y)P(X_2\leqslant y)\\&=F_{X_1}(y)\cdot F_{X_2}(y)\end{aligned}$$

E 项，$F_Z(y)=F_{X_1}(y)F_{X_2}(y)$，所以 Z 的密度函数为：

$$f_Z(y)=f_{X_1}(y)F_{X_2}(y)+F_{X_1}(y)f_{X_2}(y)$$

7. 已知随机变量 X 的危险率函数为 $h(x)=3x^4$，$x\geqslant 0$，作变换 $Y=\ln X$，则 Y 的危险率函数为(　　)。

A. $\frac{3}{5}e^{5y}$　　B. $5e^{3y}$　　C. $5e^{-3y}$　　D. $3e^{-5y}$

E. $3e^{5y}$

【答案】E

【解析】解法①：由 $h(x) = 3x^4$ 得：$S(x) = e^{-\int_0^x h(y)dy} = e^{-\int_0^x 3y^4 dy} = e^{-\frac{3}{5}x^5}$。又 $Y = \ln X$，则

$$P(Y>y)=P(\ln X>y)=P(X>e^y)=S_X(e^y)=e^{-\frac{3}{5}e^{5y}}$$

所以

$$S_Y(y)=e^{-\frac{3}{5}e^{5y}},\ S'_Y(y)=e^{-\frac{3}{5}e^{5y}}\cdot\left(-\frac{3}{5}e^{5y}\cdot 5\right)=-e^{-\frac{3}{5}e^{5y}}\cdot(3e^{5y})$$

故

$$h_Y(y)=\frac{-S'_Y(y)}{S_Y(y)}=\frac{e^{-\frac{3}{5}e^{5y}}\cdot 3e^{5y}}{e^{-\frac{3}{5}e^{5y}}}=3e^{5y}$$

解法②：因为 $Y=\ln X$ 是严格递增的，且 $x=e^y$。所以

$$h_Y(y)=h_X(e^y)\frac{dx}{dy}=3e^{4y}e^y=3e^{5y}$$

8. 已知随机变量 X 服从 0 到 20 上的均匀分布，$f_X(x)=1/20$，随机变量 $Y=4X^2$，则 Y 的危险率函数 $h_Y(16)=($ $)$。

A. 0.0016 B. 0.0023 C. 0.0026 D. 0.0032

E. 0.0035

【答案】E

【解析】当 $y>0$ 时，有

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(4X^2\leqslant y)=P\left(0\leqslant X\leqslant\frac{\sqrt{y}}{2}\right)=\int_0^{\frac{\sqrt{y}}{2}}\frac{1}{20}dx=\frac{\sqrt{y}}{40}$$

所以

$$f(y)\Big|_{y=16}=\frac{1}{40}\times\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}\Big|_{y=16}=\frac{1}{40\times 8}$$

故 $h_y(16)=\dfrac{f(y)}{S(y)}\Big|_{y=16}=\dfrac{\frac{1}{40\times 8}}{1-\frac{\sqrt{16}}{40}}=0.0035$。

9. 设 X_1 与 X_2 是两个相互独立的随机变量，且 $X_1\sim exp(\lambda_1)$，$X_2\sim exp(\lambda_2)$，$\lambda_1>\lambda_2$。设 $Y=\min(X_1, X_2)$，$Z=\max(X_1, X_2)$，已知 $S_Y(2)=0.24$，$S_Z(2)=0.86$，则 $\lambda_1-\lambda_2=$ ( )。

A. 0.112 B. 0.490 C. 0.590 D. 0.602

E. 0.612

【答案】B

【解析】由 $S_Y(2)=P(Y>2)=P[\min(X_1, X_2)>2]=P(X_1>2)P(X_2>2)=e^{-2(\lambda_1+\lambda_2)}=0.24$，

$$\begin{aligned}S_Z(2)&=P(Z>2)=P[\max(X_1, X_2)>2)=1-P[\max(X_1, X_2)\leqslant 2]\\&=1-P(X_1\leqslant 2)P(X_2\leqslant 2)=1-(1-e^{2\lambda_1})(1-e^{-2\lambda_2})=0.86\end{aligned}$$

可得 $\begin{cases}e^{-2\lambda_1}e^{-2\lambda_2}=0.24\\e^{-2\lambda_1}+e^{-2\lambda_2}=1.1\end{cases}$，解得：$e^{-2\lambda_1}=0.3$，$e^{-2\lambda_2}=0.8$。

所以 $\lambda_1=-\dfrac{\ln 0.3}{2}$，$\lambda_2=-\dfrac{\ln 0.8}{2}$，故 $\lambda_1-\lambda_2=0.490$。

10. 已知：$S(x)=\frac{1}{100^2}\cdot\left(\frac{x-100}{x+1}\right)^2$，则 $\mu_{10}=($　　$)$。

A. 0.354　　B. 0.204　　C. 0.304　　D. 0.564

E. 0.654

【答案】B

【解析】由于 $\mu_X=\frac{-S'(x)}{S(x)}=\frac{202}{(x+1)(100-x)}$，所以 $\mu_{10}=\frac{202}{(10+1)(100-10)}=0.204$。

11. 寿命 X 是随机变量，则 60 岁的人的寿命不超过 80 岁的概率为(　　)。

(1) $\frac{S(60)-S(80)}{S(60)}$；(2) $\frac{F(80)-F(60)}{1-F(60)}$；(3) $\frac{F(80)+F(60)}{1-F(60)}$；(4) $\frac{S(60)+S(80)}{S(60)}$

A. (1)(2)　　B. (1)(3)　　C. (2)(4)　　D. (3)(4)

E. (4)

【答案】A

【解析】由已知可得：

$$P\{X\leq 80\mid X>60\}=\frac{P\{X\leq 80\cap X>60\}}{P\{X>60\}}=\frac{P\{X\leq 80\}-P\{X\leq 60\}}{1-P\{X\leq 60\}}=\frac{F(80)-F(60)}{1-F(60)}$$
$$=\frac{1-S(80)-(1-S(60))}{1-(1-S(60))}=\frac{S(60)-S(80)}{S(60)}$$

12. 已知生存函数为 $S(x)=1-\frac{x}{105}(0\leqslant x\leqslant 105)$，则其平均寿命为(　　)。

A. 50.5　　B. 52.5　　C. 55.5　　D. 58.5

E. 60.5

【答案】B

【解析】解法①：由已知生存函数得其密度函数为：

$$f(x)=-S'(x)=\frac{1}{105}$$

故其平均寿命为：

$$E(X)=\int_0^{\infty}xf(x)dx=\int_0^{105}\frac{x}{105}dx=52.5$$

解法②：平均寿命为：

$$\begin{aligned}EX&=\int_0^{\infty}S(x)dx\\&=\int_0^{105}\left(1-\frac{x}{105}\right)dx\\&=52.5\end{aligned}$$

13. 已知某细菌的死亡力为 $\mu_x=\frac{1}{\omega-x}$，$0\leqslant x\leqslant\omega$，$\omega$ 为极限年龄，则其 x 岁的生存函数是(　　)。

A. $\frac{\omega-x-t}{\omega-x}$　　B. $\frac{t}{\omega-x}$　　C. $\frac{1}{\omega-x}$　　D. $\frac{\omega-x+t}{\omega-x}$

E. $1-\frac{x}{\omega}$

【答案】A

【解析】由已知条件得：

$$S(t;x) = exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s}ds\right) = 1-\frac{t}{\omega-x} = \frac{\omega-x-t}{\omega-x},0\leqslant t\leqslant \omega-x$$

14. 假设某人群的生存函数为 $S(x)=1-\frac{x}{100}$，$0\leqslant x<100$，则下列计算中，正确的是（　　）。

(1)一个刚出生的婴儿活不到50岁的概率为0.5；

(2)一个刚出生的婴儿寿命超过80岁的概率为0.8；

(3)一个刚出生的婴儿会在60~70岁之间死亡的概率0.1；

(4)一个活到30岁的人活不到60岁的概率为0.43。

A. (1)(2)(3)　　B. (1)(2)(4)　　C. (1)(3)(4)　　D. (2)(3)(4)

E. (1)(2)(3)(4)

【答案】C

【解析】由已知可得：

$$(1)P(X\leqslant 50)=F(50)=1-S(50)=\frac{50}{100}=0.5$$

$$(2)P(X>80)=S(80)=1-\frac{80}{100}=0.2$$

$$(3)P(60<X\leqslant 70)=P(X>60)-P(X>70)=S(60)-S(70)=0.1$$

$$(4)P(X\leqslant 60\mid X>30)=\frac{P(30<X\leqslant 60)}{P(X>30)}=\frac{S(30)-S(60)}{S(30)}=0.43$$

15. 已知某群体的生存函数为 $S(x)=\frac{\sqrt{100-x}}{20}$，$0<x\leqslant 100$，则$\frac{f(75)}{F(75)}=$（　　）。

A. 0.0020　　B. 0.0025　　C. 0.0050　　D. 0.00667

E. 0.00825

【答案】D

【解析】由已知得：$f(x)=-S'(x)=\frac{1}{40\sqrt{100-x}}$，$F(x)=1-S(x)=1-\frac{\sqrt{100-x}}{20}$

所以$f(75)=\frac{1}{40\sqrt{25}}=0.005$，$F(75)=1-\frac{\sqrt{25}}{20}=0.75$，

故$\frac{f(75)}{F(75)}=\frac{0.005}{0.75}=0.00667$。

16. 已知 $S(x)=\left(1-\frac{x}{100}\right)^2$，$0\leqslant x<100$，则下列计算中正确的是（　　）。

(1)$S(75)=0.0625$　(2)$F(75)=0.9375$　(3)$f(75)=0.5$　(4)$\mu_{75}=0.08$

A. (1)(2)(3)(4)　　B. (1)(2)(3)

C. (1)(3)(4)　　D. (1)(2)(4)

E. (2)(3)(4)

【答案】D

【解析】由已知得：$f(x)=-S'(x)=\frac{1}{50}\left(1-\frac{x}{100}\right)$，$\mu_x=-\frac{S'(x)}{S(x)}=\frac{f(x)}{S(x)}=\frac{2}{100-x}$，故

(1) $S(75)=\left(1-\frac{75}{100}\right)^2=\frac{1}{16}=0.0625$

(2) $F(75)=1-S(75)=\frac{15}{16}=0.9375$

(3) $f(75)=\frac{1}{50}\left(1-\frac{75}{100}\right)=\frac{1}{200}=0.005$

(4) $\mu_{75}=\frac{2}{100-75}=\frac{2}{25}=0.08$

17. 已知剩余寿命 $T(x)$ 和 $T(y)$ 相互独立，且 $E[T(x)]=E[T(y)]=4$，$\mathrm{Cov}[T(xy), T(\overline{xy})]=0.09$，则 $E[T(xy)]$等于(　　)。

A. 2.0　　B. 2.8　　C. 3.7　　D. 4.0

E. 4.3

【答案】C

【解析】根据题意有：

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}[T(xy), T(\overline{xy})] &= E[T(xy)\cdot T(\overline{xy})]-E[T(xy)]E[T(\overline{xy})]\\ &=\mathring{e}_x\cdot\mathring{e}_y-\mathring{e}_{xy}\cdot\mathring{e}_{\overline{xy}}\\ &=\mathring{e}_x\cdot\mathring{e}_y-\mathring{e}_{xy}\cdot(\mathring{e}_x+\mathring{e}_y-\mathring{e}_{xy})\\ &=(\mathring{e}_x-\mathring{e}_{xy})(\mathring{e}_y-\mathring{e}_{xy})\end{aligned}$$

由已知有：$\mathring{e}_x=\mathring{e}_y=4$，故$(4-\mathring{e}_{xy})^2=0.09$，故 $\mathring{e}_{xy}=3.7$。

18. 已知 $T(0)$的分布为：$F_0(t)=\begin{cases}t/100, & 0<t\leqslant 100\\ 1, & t>100\end{cases}$，则新生婴儿在 30 岁和 50 岁之间死亡的概率为(　　)。

A. 0.2　　B. 0.5　　C. 0.6　　D. 0.7

E. 0.9

【答案】A

【解析】由题意知：$P[30<T(0)<50]=F_0(50)-F_0(30)=50/100-30/100=0.2$。

19. 某一产品的死亡力为 μ_{x+t}，经一精算师测算，死亡力应修正为 $\mu_{x+t}-C$。原来的产品损坏概率为 q_x，死亡力修正后一年内该产品损坏的概率减半，则常数 $C=$(　　)。

A. $\ln\left(1+\frac{1}{2}q_x\right)-\ln(1-q_x)$　　B. $\ln\left(1-\frac{1}{2}q_x\right)+\ln(1-q_x)$

C. $\ln\left(1-\frac{1}{2}q_x\right)-\ln(1+q_x)$　　D. $\ln\left(1-\frac{1}{2}q_x\right)-\ln(1-q_x)$

E. $\ln\left(1-\frac{1}{2}q_x\right)+\ln(1+q_x)$

【答案】D

【解析】由于 $q_x^{old}=1-e^{-\int_0^1\mu_{x+t}\mathrm{d}t}$

$q_x^{new}=1-e^{-\int_0^1(\mu_{x+t}-C)dt}=1-e^{-\int_0^1\mu_{x+t}\mathrm{d}t}\cdot \mathrm{e}^C$

则$\frac{1}{2}q_x^{old}=q_x^{new}$，即$\frac{1}{2}(1-p_x)=(1-p_x\cdot\mathrm{e}^C)$

故常数 C 为：$C=\ln\left(1-\frac{1}{2}q_x\right)-\ln(1-q_x)$

20. 设 $S(x)$是生存函数，函数 $\varphi(x)=\frac{2}{75}x^{-\frac{1}{3}}$且 $\varphi(x)+S'(x)=0$，则生存函数 $S(x)$的极限年龄 ω 为(　　)。

A. 121　　B. 122　　C. 125　　D. 128

E. 130

【答案】C

【解析】由 $\varphi(x)+S'(x)=0$ 知：$S'(x)=-\varphi(x)$，即 $\varphi(x)$为未来寿命 X 的概率密度函数。所以 $\int_0^{\omega}\varphi(x)dx=\int_0^{\omega}\frac{2}{75}x^{-\frac{1}{3}}dx=1$，即$\frac{1}{25}\omega^{\frac{2}{3}}=1$，解得 $\omega=125$。

21. 已知某生存分布为 $5\leqslant x\leqslant 15$ 的双截尾指数分布，参数 $\lambda=0.02$，该生存分布随机变量未来寿命的中位数为(　　)。

A. 9.7504　　B. 8.7504　　C. 6.7504　　D. 4.7504

E. 3.7504

【答案】D

【解析】由已知条件得：$S(x)=e^{-\lambda x}=e^{-0.02x}$，故

$$F(x\mid 5\leqslant X\leqslant 15)=\frac{P(5\leqslant X<x)}{P(5\leqslant X\leqslant 15)}=\frac{S(5)-S(x)}{S(5)-S(15)}$$
$$=\frac{e^{-0.02\times 5}-e^{-0.02x}}{e^{-0.02\times 5}-e^{-0.02\times 15}}=\frac{1}{2}$$

解得：$x=9.7504$。

所以该生存分布随机变量未来寿命的中位数为：$9.7504-5=4.7504$。

22. 某产品的寿命生存函数为 $S(x)=1-0.0025x^2$，$0\leqslant x\leqslant 20$，则该产品中值年龄时的未来期望寿命为(　　)。

A. 1.0965　　B. 2.0965　　C. 3.0966　　D. 12.142

E. 14.142

【答案】C

【解析】由 $S(x)=1-0.0025x^2=\frac{1}{2}$，解得：$x=14.142$，即为其中值寿命，故

$$\begin{aligned}
\mathring{e}_{14.142}&=\int_0^{+\infty}xP'(T(y)\leqslant x)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{20-14.142}x\cdot P'(14.142<X\leqslant 14.142+x\mid X>14.142)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{5.858}x\cdot\left(\frac{F(14.142+x)-F(14.142)}{S(14.142)}\right)'\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{5.858}x\cdot\frac{f(14.142+x)}{S(14.142)}\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{5.858}x\cdot\frac{[0.0025(x+14.142)^2]'}{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\\
&=2\int_0^{5.858}x\cdot 0.005(x+14.142)\mathrm{d}x\\
&=\left(0.01\times\frac{x^3}{3}+0.07071x^2\right)\Big|_0^{5.858}
\end{aligned}$$

$= 3.0966$

23. 已知生存函数为 $S(x)=1-\frac{x}{100}(0\leqslant x\leqslant 100)$，某人现在为 30 岁，则他在 60 岁到 80 岁之间死亡的概率及其平均余命分别为(　　)。

A. 2/7，35　　B. 3/7，50　　C. 1/7，35　　D. 2/7，50

E. 3/7，35

【答案】A

【解析】设此人的剩余寿命为 T。由于 ${}_tp_{30}=\frac{70-t}{70}$，则 T 的密度函数为 $f_{30}(t)=\frac{1}{70}$，所以

$$P\{30<T<50\}=\int_{30}^{50}\frac{1}{70}dt=\frac{2}{7}$$

平均余命为：

$$\mathring{e}_{30}=\int_0^{+\infty}tf_{30}(t)\,dt=\int_0^{70}\frac{t}{70}dt=35$$

24. 下列表达式中与 ${}_kp_x$ 等价的是(　　)。

A. $\frac{S(x+k+1)}{S(x+1)}$　　B. $\frac{S(x+k-1)}{S(x)}$

C. $p_x\cdot p_{x+1}\cdot\cdots\cdot p_{x+k-1}$　　D. $p_{x+1}\,p_{x+2}\cdots p_{x+k}$

E. $p_{x-1}\,p_x\cdots p_{x+k-1}$

【答案】C

【解析】${}_kp_x=\frac{S(x+1)}{S(x)}\cdot\frac{S(x+2)}{S(x+1)}\cdots\frac{S(x+k)}{S(x+k-1)}=\frac{S(x+k)}{S(x)}=p_x\cdot p_{x+1}\cdot\cdots\cdot p_{x+k-1}$

25. 已知死亡服从 Makeham 死亡分布，$h_{20}=0.003$，$h_{30}=0.004$，$h_{40}=0.006$，则${}_{10}p_{10}$(　　)。

A. 0.98315　　B. 0.97555　　C. 0.97315　　D. 0.98555

E. 0.97355

【答案】C

【解析】由已知可得：

$$h_{20}=A+Bc^{20}=0.003 \quad (1)$$

$$h_{30}=A+Bc^{30}=0.004 \quad (2)$$

$$h_{40}=A+Bc^{40}=0.006 \quad (3)$$

利用$\frac{h_{40}-h_{30}}{h_{30}-h_{20}}=c^{10}=2$，可得 $c=2^{0.1}$。

把 c 的值代入(1)和(2)得：

$$A+4B=0.003$$

$$A+8B=0.004$$

解得，$B=0.00025$，$A=0.002$，则

$$h_x=0.002+0.00025\times 2^{0.1x}$$

$$S(x)=exp\left[-Ax-\frac{B}{\ln c}(c^x-1)\right]=exp\left[-0.002x-0.0036067(2^{0.1x}-1)\right]$$

所以${}_{10}p_{10}=S(20)/S(10)=0.97315$。

26. 已知 $S(x)=\left(1-\frac{x}{100}\right)^2$，$0\leqslant x\leqslant 100$。设剩余寿命为 T，则一个 50 岁人的剩余寿命的期望和标准差之和为(　　)。

A. 24.32　　B. 28.45　　C. 29.42　　D. 29.65

E. 32.54

【答案】B

【解析】由已知条件得：

$$_tp_{50}=\frac{S(50+t)}{S(50)}=\left(\frac{100-50-t}{100-50}\right)^2=\left(\frac{50-t}{50}\right)^2$$

所以 $E[T(50)]=\mathring{e}_x=\int_0^{50}{}_tp_{50}dt=\int_0^{50}\left(\frac{50-t}{50}\right)^2dt=\frac{50}{3}$,

又 $E[T^2(50)]=\int_0^{50}2t\cdot{}_tp_{50}dt=\frac{1}{50^2}\int_0^{50}2t(50-t)^2dt=\frac{1250}{3}$,

所以 $Var[T(50)]=E[T^2(50)]-E^2[T(50)]=\frac{1250}{3}-\left(\frac{50}{3}\right)^2=\frac{1250}{9}$,

故 $E(T(50))+\sqrt{Var(T(50))}=\frac{50}{3}+\sqrt{\frac{1250}{9}}=28.45$。

27. 设新生婴儿的生存函数为 $S(x)=1-\frac{x}{100}(0\leqslant x<100)$，则对于一个 40 岁的人，下列计算中正确的是(　　)。

(1)生存函数为$\frac{60-t}{40}$；　(2)死亡力函数为$\frac{1}{60-t}$；　(3)密度函数为$\frac{1}{60}$。

A. (1)(2)(3)　　B. (1)(2)　　C. (1)(3)　　D. (2)(3)

E. (1)

【答案】D

【解析】由生命函数之间的关系，得：

(1)$S_{T(40)}(t)={}_tp_{40}=\frac{S(t+40)}{S(40)}=\frac{60-t}{60}$，$0\leqslant t<60$

(2)$\mu_{T(40)}(t)=-\frac{S'(t+40)}{S(t+40)}=\frac{1}{60-t}$，$0\leqslant t<60$

(3)$f_{T(40)}(t)={}_tp_{40}\,\mu_{T(40)}(t)=\frac{60-t}{60}\times\frac{1}{60-t}=\frac{1}{60}$，$0\leqslant t<60$

28. $\mathring{e}_x$ 为 x 岁的个体的剩余寿命的均值，$\mu(x)$为其死亡力函数，则$\mathring{e}_x\mu(x)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathring{e}_x=$(　　)。

A. $\frac{S(x+t)}{S(x)}$　　B. -1　　C. 0　　D. 1

E. $\frac{1}{S(x)}$

【答案】D

【解析】由题意可得：

$$\frac{d}{\mathrm{d}x}\mathring{e}_x=\frac{d}{\mathrm{d}x}\int_0^{\infty}{}_tp_x\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\left[\frac{d}{\mathrm{d}x}{}_tp_x\right]\mathrm{d}t$$

而$\dfrac{d}{\mathrm{d}x}{}_tp_x = \dfrac{d}{\mathrm{d}x}\dfrac{S(x+t)}{S(x)} = \dfrac{S(x)[-S(x+t)\mu(x+t)] - S(x+t)[-S(x)\mu(x)]}{[S(x)]^2}$

$$= \frac{S(x+t)\mu(x) - S(x+t)\mu(x+t)}{S(x)} = {}_tp_x[\mu(x) - \mu(x+t)],$$

故 $\dfrac{d}{\mathrm{d}x}\mathring{e}_x = \dfrac{d}{\mathrm{d}x}\int_0^{\infty} {}_tp_x \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} {}_tp_x[\mu(x) - \mu(x+t)]\mathrm{d}t$

$$= \mu(x)\int_0^{\infty} {}_tp_x \mathrm{d}t - \int_0^{\infty} {}_tp_x\mu(x+t)\mathrm{d}t$$

$$= \mathring{e}_x\mu(x) - \frac{-1}{S(x)}\int_0^{\infty} S'(x+t)\mathrm{d}t$$

$$= \mathring{e}_x\mu(x) - \frac{-1}{S(x)}S(x+t)\Big|_0^{\infty} = \mathring{e}_x\mu(x) - 1,$$

即$\mathring{e}_x\mu(x) - \dfrac{d}{\mathrm{d}x}\mathring{e}_x = 1$。

29. 假设 X 服从[0，10]均匀分布，设中心死亡率为 m_x，则 m_5 为(　　)。

A. $\dfrac{3}{8}$　　B. $\dfrac{2}{9}$　　C. $\dfrac{3}{5}$　　D. $\dfrac{1}{3}$

E. $\dfrac{1}{7}$

【答案】B

【解析】已知 X 服从[0，10]均匀分布，所以生存函数和 X 的概率密度分别为：

$$S(x) = \frac{10-x}{10},\ f(x) = \frac{1}{10},\ 0 \leqslant x \leqslant 10$$

根据定义，有 $m_5 = \dfrac{\int_5^6 f(x)\mathrm{d}x}{\int_5^6 S(x)\mathrm{d}x} = \dfrac{\int_5^6 \frac{1}{10}\mathrm{d}x}{\int_5^6 \frac{10-x}{10}\mathrm{d}x} = \dfrac{2}{9}$。

30. 设死亡力函数为：$\mu_x = \dfrac{1}{100-x}$，$0 \leqslant x \leqslant 100$，则 $P(30 < x \leqslant 35 \mid x > 20) = ($　　$)$。

A. 0.0327　　B. 0.0428　　C. 0.0625　　D. 0.0728

E. 0.0825

【答案】C

【解析】因为

$$\begin{aligned} F_X(x) &= 1 - exp(-\int_0^x \frac{1}{100-s}\mathrm{d}s) \\ &= 1 - exp[\ln(100-x) - \ln 100] \\ &= x/100 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} P(30 < x \leqslant 35 \mid x > 20) &= \frac{F(35) - F(30)}{1 - F(20)} \\ &= \frac{35/100 - 30/100}{1 - 20/100} \\ &= 0.0625 \end{aligned}$$